Лекция 7. Антилептоны и ковариантная сопряженная алгебра действия.

А. А. Кецарис
(4 марта 2004 г.)

В этой лекции мы продолжаем рассматривать операцию сопряжения и вводим ковариантную сопряженную алгебру действия как способ описания антилептонов.

I. КОВАРИАНТНАЯ СОПРЯЖЕННАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА

В соответствии с нашей программой также будем рассматривать ковариантную алгебру действия для антилептонов как алгебру Клиффорда. В этом случае ковариантную алгебру действия будем называть ковариантной сопряженной алгеброй Клиффорда и обозначать $^{+}\mathbb{C}$. Базисные векторы для ковариантной сопряженной алгебры Клиффорда будем обозначать ε^I.

Зададим закон умножения базисных векторов в ковариантной сопряженной алгебре Клиффорда $^{+}\mathbb{C}$ следующим образом:

$$\varepsilon^K \circ \varepsilon^I = {}^{+}C^{IK}{}_L\, \varepsilon^L\,, \tag{1}$$

где $^{+}C^{IK}{}_L$ есть структурные постоянные ковариантной сопряженной алгебры $^{+}\mathbb{C}$.

Итак в соответствии с принятой нами программой мы имеем алгебру Клиффорда, построенную на шестнадцати базисных векторах ε^I, где индекс I пробегает значения от 0 до 15. Укажем эти векторы и правила умножения, которым они подчиняются.

- ε_0. Для него имеет место правило умножения

$$\varepsilon^0 \circ \varepsilon^0 = \varepsilon^0\,.$$

- ε^i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4.* То есть, число таких векторов равно четырем. Эти векторы являются образующими. Для них имеют место правила умножения

$$\varepsilon^i \circ \varepsilon^0 = \varepsilon^0 \circ \varepsilon^i = \varepsilon^i\,.$$

$$\varepsilon^i \circ \varepsilon^i = \operatorname{sign} \varepsilon^i\,,$$

где

$$\operatorname{sign} \varepsilon^1 = \operatorname{sign} \varepsilon^2 = \operatorname{sign} \varepsilon^3 = -\operatorname{sign} \varepsilon^4 = \varepsilon^0\,.$$

- Векторы

$$\varepsilon^{ik} = \varepsilon^k \circ \varepsilon^i\,.$$

Здесь $i \neq k$. Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6\,.$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие антикоммутативности

$$\varepsilon^{ik} = -\varepsilon^{ki}\,.$$

Остальные правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\varepsilon^{ik} \circ \varepsilon^{ik} = -\varepsilon^i \circ \left(\varepsilon^k \circ \varepsilon^k\right) \circ \varepsilon^i = -\operatorname{sign} \varepsilon^i \circ \operatorname{sign} \varepsilon^k\,.$$

- Векторы

$$\varepsilon^{ikl} = \varepsilon^i \circ \varepsilon^k \circ \varepsilon^l\,.$$

Здесь

$$i \neq k\,, i \neq l\,, k \neq l\,.$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4\,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, следующие из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$\varepsilon^{ikl} = \varepsilon^{kli} = \varepsilon^{lik} = -\varepsilon^{kil} = -\varepsilon^{ilk} = -\varepsilon^{lki}\,.$$

Остальные правила умножения, в которых участвуют эти векторы, также следуют из и условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\varepsilon^{ikl} \circ \varepsilon^{ikl} = -\varepsilon^i \circ \left(\varepsilon^k \circ \left(\varepsilon^l \circ \varepsilon^l\right) \circ \varepsilon^k\right) \circ \varepsilon^i = -\operatorname{sign} \varepsilon^i \circ \operatorname{sign} \varepsilon^k \circ \operatorname{sign} \varepsilon^l\,.$$

*Далее все индексы, обозначаемые малыми латинскими буквами, начиная с i, пробегают значения от 1 до 4.

- Вектор
$$\varepsilon^{iklm}=\varepsilon^i\circ\varepsilon^k\circ\varepsilon^l\circ\varepsilon^m\,.$$
Здесь
$$i\neq k\,,i\neq l\,,i\neq m\,,k\neq l\,,k\neq m\,,l\neq m\,.$$
Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице
$$C_4^4=1\,.$$
Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, следующие из условий ассоциативности и антикоммутативности
$$\begin{gathered}\varepsilon^{iklm}=\varepsilon^{ilmk}=\varepsilon^{imkl}=-\varepsilon^{ilkm}=\\-\varepsilon^{ikml}=-\varepsilon^{imlk}=-\varepsilon^{klmi}=-\varepsilon^{kmil}=\\-\varepsilon^{kilm}=\varepsilon^{kmli}=\varepsilon^{klim}=\varepsilon^{kiml}=\\\varepsilon^{lmik}=\varepsilon^{likm}=\varepsilon^{lmki}=-\varepsilon^{limk}=\\-\varepsilon^{lmki}=-\varepsilon^{lkim}=-\varepsilon^{mikl}=-\varepsilon^{mkli}=\\-\varepsilon^{mlik}=\varepsilon^{mkil}=\varepsilon^{milk}=\varepsilon^{mlki}\,.\end{gathered}$$
Остальные правила умножения, в которых участвует этот вектор, также следуют из условий ассоциативности и коммутативности. В частности,
$$\begin{gathered}\varepsilon^{iklm}\circ\varepsilon^{iklm}=\\\varepsilon^i\circ(\varepsilon^k\circ(\varepsilon^l\circ(\varepsilon^m\circ\varepsilon^m)\circ\varepsilon^l)\circ\varepsilon^k)\circ\varepsilon^i=\\\operatorname{sign}\varepsilon^i\circ\operatorname{sign}\varepsilon^k\circ\operatorname{sign}\varepsilon^l\circ\operatorname{sign}\varepsilon^m\,.\end{gathered}$$

В том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, мы будем использовать обозначение $^+\mathbb{C}_4$ вместо обозначения $^+\mathbb{C}$. Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например, ε^1, ε^2, ε^3), удобно обозначать $^+\mathbb{C}_3$.

В соответствии с нашим общим замыслом мы должны для указанных базисных векторов ε^I, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда, найти из (1) структурные матрицы $C^{IK}{}_L$ и показать, что эти матрицы связаны со структурными матрицами $C^L{}_{KI}$ алгебры $\mathbb{C}$ некоторой операцией "сопряжения", которая в комплексном представлении должна сводиться к эрмитовому сопряжению.

II. РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОВАРИАНТНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Рассмотрим соответствие между базисными векторами ковариантной сопряженной алгебры Клиффорда $^+\mathbb{C}$ и ее структурными матрицами. Для этого как и прежде воспользуемся ассоциативностью алгебры $^+\mathbb{C}$. Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов
$$(\varepsilon^N\circ\varepsilon^K)\circ\varepsilon^I=\varepsilon^N\circ(\varepsilon^K\circ\varepsilon^I)\,.$$
Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (1), получим
$$^+C^{KN}{}_L\,(\varepsilon^L\circ\varepsilon^I)=\,^+C^{IK}{}_L\,(\varepsilon^N\circ\varepsilon^L)\,.$$
Откуда
$$^+C^{KN}{}_L\,^+C^{IL}{}_M=\,^+C^{IK}{}_L\,^+C^{LN}{}_M\,. \tag{2}$$
Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (1), заключаем, что базисным векторам ε^I можно поставить в соответствие структурные матрицы $^+C^{IK}{}_L$. При этом $\circ$ – умножению базисных векторов ставится в соответствие обычное умножение матриц в *том же* порядке. Это соответствие составляет *регулярное (присоединенное) представление* алгебры $^+\mathbb{C}$ и обозначается:
$$\varepsilon^I\sim\,^+C^{IK}{}_L\,.$$
Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В регулярном представлении произвольному вектору алгебры $^+S=S_I\,\varepsilon^I$ соответствует матрица
$$^+S^K{}_L=S_I\cdot\,^+C^{IK}{}_L\,. \tag{3}$$

1. Действительное представление

Из (1) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора. Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером I, расположенного в строке с номером K и в столбце с номером L, необходимо базисный вектор, номер которого совпадает с номером *строки* матрицы, умножить *справа* на базисный вектор, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер L указанного базисного вектора определит номер столбца, на пересечении которого с рассматриваемой строкой, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы $^+C^{IK}{}_L$ по приведенному алгоритму для двух случаев

1. подалгебра $^+\mathbb{C}_3$ с тремя образующими базисными векторами ε^1, ε^2, ε^3;

2. алгебра $^+\mathbb{C}_4$ с четырьмя образующими базисными векторами ε^1, ε^2, ε^3, ε^4.

Для подалгебры $^+\mathbb{C}_3$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов:*

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$\begin{aligned} {}^+\psi &= \psi_{32}\,\varepsilon^{32} + \psi_{13}\,\varepsilon^{13} + \psi_{21}\,\varepsilon^{21} + \psi_0\,\varepsilon^0 \\ &+ \psi_1\,\varepsilon^1 + \psi_2\,\varepsilon^2 + \psi_3\,\varepsilon^3 + \psi_{123}\,\varepsilon^{123}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

В результате получим действительные матрицы 8×8 представления базисных векторов ε^I. (См. Раздел III).

Для алгебры $^+\mathbb{C}_4$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов, обобщающего предыдущий порядок индексов,

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$\begin{aligned} {}^+\psi &= \psi_{32}\varepsilon^{32} + \psi_{13}\varepsilon^{13} + \psi_{21}\varepsilon^{21} + \psi_0\varepsilon^0 \\ &+ \psi_{42}\varepsilon^{42} + \psi_{14}\varepsilon^{14} + \psi_{1324}\varepsilon^{1324} + \psi_{34}\varepsilon^{34} \\ &+ \psi_1\varepsilon^1 + \psi_2\varepsilon^2 + \psi_3\varepsilon^3 + \psi_{123}\varepsilon^{123} \\ &+ \psi_{134}\varepsilon^{134} + \psi_{234}\varepsilon^{234} + \psi_4\varepsilon^4 + \psi_{124}\varepsilon^{124}\,. \end{aligned}$$

В результате получим действительные матрицы 16×16 представления базисных векторов ε^I. (См. Раздел III).

Помимо действительного представления будем использовать *комплексное* и *кватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

2. Комплексное представление

1. подалгебра $^+\mathbb{C}_3$.

Остановимся на вопросе о представлении произведения алгебр Клиффорда. Алгебру Клиффорда $^+\mathbb{C}_n$ можно записать в виде произведения $^+\mathbb{C}_m \times {}^+\mathbb{C}_{(n-m)}$. И затем представить алгебру $^+\mathbb{C}_n$ как алгебру $^+\mathbb{C}_m$ над полем гиперчисел $^+\mathbb{C}_{(n-m)}$. Например вектор $^+\psi = \psi_I\,\varepsilon^I$ алгебры $^+\mathbb{C}_3$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} {}^+\psi &= \varepsilon^{13}\circ(\psi_{32}\varepsilon^{21} + \psi_{13}\varepsilon^0) + \varepsilon^0\circ(\psi_{21}\varepsilon^{21} + \psi_0\varepsilon^0) \\ &+ \varepsilon^2\circ(\psi_1\varepsilon^{21} + \psi_2\varepsilon^0) + \varepsilon^{123}\circ(\psi_3\varepsilon^{21} + \psi_{123}\varepsilon^0)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Эта запись соответствует записи алгебры $^+\mathbb{C}_3$ в виде произведения $^+\mathbb{C}_2 \times {}^+\mathbb{C}_1$. Базисными векторами алгебры $^+\mathbb{C}_2$ являются $\varepsilon^{13}, \varepsilon^0, \varepsilon^2, \varepsilon^{123}$; базисными векторами алгебры $^+\mathbb{C}_1$ являются $\varepsilon^{21}, \varepsilon^0$. Пространство $^+\mathbb{C}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору ε^{21} алгебры $^+\mathbb{C}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу i, имея в виду, что $\operatorname{sign}\varepsilon^{21} = -1$, а базисному вектору ε^0 алгебры $^+\mathbb{C}_1$ поставим в соответствие действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $^+\mathbb{C}_3$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned} {}^+\psi &= \varepsilon^{13}\circ(\psi_{32}\,i + \psi_{13}) + \varepsilon^0\circ(\psi_{21}\,i + \psi_0) \\ &+ \varepsilon^2\circ(\psi_1\,i + \psi_2) + \varepsilon^{123}\circ(\psi_3\,i + \psi_{123}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Комплексное представление дается матрицами 4×4, в которых блоки заменены базисными единицами 1 и i (см.Раздел III).

2. алгебра $^+\mathbb{C}_4$.

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$\begin{aligned} {}^+\psi &= \varepsilon^{13}\circ(\psi_{32}\varepsilon^{21} + \psi_{13}\varepsilon^0) + \varepsilon^0\circ(\psi_{21}\varepsilon^{21} + \psi_0\varepsilon^0) \\ &+ \varepsilon^{14}\circ(\psi_{42}\varepsilon^{21} + \psi_{14}\varepsilon^0) + \varepsilon^{34}\circ(\psi_{1324}\varepsilon^{21} + \psi_{34}\varepsilon^0) \\ &+ \varepsilon^2\circ(\psi_1\varepsilon^{21} + \psi_2\varepsilon^0) + \varepsilon^{123}\circ(\psi_3\varepsilon^{21} + \psi_{123}\varepsilon^0) \\ &+ \varepsilon^{234}\circ(\psi_{134}\varepsilon^{21} + \psi_{234}\varepsilon^0) + \varepsilon^{124}\circ(\psi_4\varepsilon^{21} + \psi_{124}\varepsilon^0)\,. \end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $^+\mathbb{C}_4$ в виде произведения $^+\mathbb{C}_3 \times {}^+\mathbb{C}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $^+\mathbb{C}_3$ являются ε^{13}, ε^0, ε^{14}, ε^{34} ε^2, ε^{123}, ε^{234}, ε^{124}; базисными векторами алгебры $^+\mathbb{C}_1$ являются ε^{21}, ε^0. Заменяя базисный вектор ε^{21} мнимой единицей i, а базисный вектор ε^0 действительной единицей, получим вектор алгебры $^+\mathbb{C}_4$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned} {}^+\psi &= \varepsilon^{13}\circ(\psi_{32}\,i + \psi_{13}) + \varepsilon^0\circ(\psi_{21}\,i + \psi_0) \\ &+ \varepsilon^{14}\circ(\psi_{42}\,i + \psi_{14}) + \varepsilon^{34}\circ(\psi_{1324}\,i + \psi_{34}) \\ &+ \varepsilon^2\circ(\psi_1\,i + \psi_2) + \varepsilon^{123}\circ(\psi_3\,i + \psi_{123}) \\ &+ \varepsilon^{234}\circ(\psi_{134}\,i + \psi_{234}) + \varepsilon^{124}\circ(\psi_4\,i + \psi_{124})\,. \end{aligned}$$

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8, в которых соответствующие блоки заменены базисными единицами 1 и i (см. Раздел III).

Сделаем замечание, на котором остановимся в дальнейшем. Назовем вектор ε^{21} *основным*, имея в виду ту роль, которую этот вектор играет в комплексном представлении. Однако, с алгебраической точки зрения направления ε^{13} и ε^{32} эквивалентны направлению ε^{21} и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать мнимую единицу через j, если за основное

---

*Приведенный порядок индексов оправдан тем, что для него структурные матрицы алгебры Клиффорда представлены матрицами Дирака (см. далее). С математической точки зрения порядок индексов несущественен вследствие аддитивности сложения компонент вектора, но с физической точки зрения указанному порядку индексов нужно придавать определенное значение.

направление принят вектор ε^{13}, и обозначать мнимую единицу через k, если за основное направление принят вектор ε^{32}.

3. Кватернионное представление.

1. подалгебра $^{+}\mathbb{C}_3$.

Кватернионное представление базисных векторов основано на следующем разложении вектора

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}\psi = (\psi_{32}\,\varepsilon^{32} + \psi_{13}\,\varepsilon^{13} + \psi_{21}\,\varepsilon^{21} + \psi_0\,\varepsilon^{0}) \circ \varepsilon^{0} \\
&+(\psi_{1}\,\varepsilon^{32} + \psi_{2}\,\varepsilon^{13} + \psi_{3}\,\varepsilon^{21} + \psi_{123}\,\varepsilon^{0}) \circ \varepsilon^{123} .
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Эта запись соответствует записи алгебры $^{+}\mathbb{C}_3$ в виде произведения $^{+}\mathbb{C}_1 \times {}^{+}\mathbb{C}_2$. Базисными векторами алгебры $^{+}\mathbb{C}_1$ являются $\varepsilon^0, \varepsilon^{123}$, базисными векторами алгебры $^{+}\mathbb{C}_2$ являются $\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{0}$.

Записи алгебры Клиффорда $^{+}\mathbb{C}_3$ в виде произведения $^{+}\mathbb{C}_1 \times {}^{+}\mathbb{C}_2$ соответствует представление базисных векторов алгебры $^{+}\mathbb{C}_3$ в пространстве подалгебры $^{+}\mathbb{C}_1$ над полем гиперчисел, составляющих алгебру $^{+}\mathbb{C}_2$. Причем базисные гиперчисла, изоморфные базисным векторам $\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{0}$, могут рассматриваться как кватернионы, так как

$$
\operatorname{sign}\varepsilon^{32} = \operatorname{sign}\varepsilon^{13} = \operatorname{sign}\varepsilon^{21} = -1 .
$$

Для базисных кватернионов используем соответственно следующие обозначения

$$
i\cdot\sigma^1, \quad i\cdot\sigma^2, \quad i\cdot\sigma^3, \quad 1 .
$$

Заменяя базисные векторы $\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}$, ε^{0} кватернионами, получим вектор алгебры $^{+}\mathbb{C}_3$ в кватернионном представлении

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}\psi = (\psi_{32}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{13}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{21}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_0) \circ \varepsilon^{0} \\
&+(\psi_{1}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{2}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{3}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_{123}) \circ \varepsilon^{123} .
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2, в которых соответствующие блоки заменены $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ (см. Раздел III).

2. алгебра $^{+}\mathbb{C}_4$.

Кватернионное представление базисных векторов основано на разложении вектора

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}\psi = (\psi_{32}\,\varepsilon^{32} + \psi_{13}\,\varepsilon^{13} + \psi_{21}\,\varepsilon^{21} + \psi_0\,\varepsilon^{0}) \circ \varepsilon^{0} \\
&+ (\psi_{42}\,\varepsilon^{32} + \psi_{14}\,\varepsilon^{13} + \psi_{1324}\,\varepsilon^{21} + \psi_{34}\,\varepsilon^{0}) \circ \varepsilon^{34} \\
&+ (\psi_{1}\,\varepsilon^{32} + \psi_{2}\,\varepsilon^{13} + \psi_{3}\,\varepsilon^{21} + \psi_{123}\,\varepsilon^{0}) \circ \varepsilon^{123} \\
&+ (\psi_{134}\,\varepsilon^{32} + \psi_{234}\,\varepsilon^{13} + \psi_{4}\,\varepsilon^{21} + \psi_{124}\,\varepsilon^{0}) \circ \varepsilon^{124} .
\end{aligned}
$$

Это представление соответствует записи алгебры $^{+}\mathbb{C}_4$ в виде произведения $^{+}\mathbb{C}_2 \times {}^{+}\mathbb{C}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{C}_2$ являются ε^0, ε^{34}, ε^{123}, ε^{124}; базисными векторами другой алгебры $^{+}\mathbb{C}_2$ являются ε^{32}, ε^{13}, ε^{21}, ε^{0}. Как и прежде, заменяя базисные векторы $\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}$ кватернионами, а базисный вектор (ε^0) действительной единицей, получим вектор алгебры $^{+}\mathbb{C}_4$ в кватернионном представлении

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}\psi = (\psi_{32}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{13}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{21}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_0) \circ \varepsilon^{0} \\
&+ (\psi_{42}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{14}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{1324}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_{34}) \circ \varepsilon^{34} \\
&+ (\psi_{1}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{2}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{3}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_{123}) \circ \varepsilon^{123} \\
&+ (\psi_{134}\,i\cdot\sigma^1 + \psi_{234}\,i\cdot\sigma^2 + \psi_{4}\,i\cdot\sigma^3 + \psi_{124}) \circ \varepsilon^{124} .
\end{aligned}
$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4, в которых соответствующие блоки заменены $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ (см. Раздел III).

III. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОВАРИАНТНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Приведем структурные матрицы алгебры Клиффорда, которые реализуют регулярное представление базисных векторов:

$$
\varepsilon^I \sim {}^{+}C^{IK}{}_{L} .
$$

При преобразовании матриц $^{+}C^{IK}{}_{L}$ от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$
\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad
a = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad
b = \begin{array}{|c|c|}\hline \text{-1} & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad
i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline \text{-1} & \\ \hline\end{array}\,.
$$

Алгебра системы чисел $\{\mathit{1}, a, b, i\}$ представлена законами умножения:

$$
\begin{gathered}
a^2 = b^2 = \mathit{1}\,, \qquad i^2 = -\mathit{1}\,, \qquad a\,b = -b\,a = i\,, \\
a\,i = i\,a = -b\,, \qquad b\,i = i\,b = -a\,.
\end{gathered}
$$

При преобразовании матриц $^{+}C^{IK}{}_{L}$ от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$
\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad
I = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline \text{-1} & \\ \hline\end{array}\,.
$$

3. Подалгебра $^{+}\mathbb{C}_3$

$$
\varepsilon^0 \quad \sim \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}
\end{array}
\quad = \quad \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \quad \mathit{1}
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\varepsilon^{1} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&&&& -1 \\ 13 &&&&&&& -1 \\ 21 &&&&&& 1 \\ 0 &&&&& 1 \\ \hline 1 &&&& 1 \\ 2 &&& 1 \\ 3 && -1 \\ 123 & -1 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|} 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline &&& -1 \\ && 1 & \\ \hline & 1 && \\ -1 &&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & -I & 0 \\ \hline I & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{32} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&& -1 \\ 13 &&& -1 \\ 21 && 1 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 &&&&&&&& -1 \\ 2 &&&&&&& -1 \\ 3 &&&&&& 1 \\ 123 &&&&& 1 \\ \hline \end{array} = -a \begin{array}{|cc|cc|} 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline & 1 && \\ -1 &&& \\ \hline &&& 1 \\ && -1 & \\ \hline \end{array} = -a \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline I & & 0 \\ \hline & I & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{2} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&&& 1 \\ 13 &&&&&&&& -1 \\ 21 &&&&& -1 \\ 0 &&&&&& 1 \\ \hline 1 &&& -1 \\ 2 &&&& 1 \\ 3 & 1 \\ 123 && -1 \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|} 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline &&& -1 \\ && 1 & \\ \hline & 1 && \\ -1 &&& \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & -I & 0 \\ \hline I & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{123} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&& 1 \\ 13 &&&&&& 1 \\ 21 &&&&&&& 1 \\ 0 &&&&&&&& 1 \\ \hline 1 & -1 \\ 2 && -1 \\ 3 &&& -1 \\ 123 &&&& -1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|} 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline && 1 & \\ &&& 1 \\ \hline -1 &&& \\ & -1 && \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & \mathbb{1} & 0 \\ \hline \mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{3} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&& -1 \\ 13 &&&&& 1 \\ 21 &&&&&&&& -1 \\ 0 &&&&&&& 1 \\ \hline 1 && 1 \\ 2 & -1 \\ 3 &&&& 1 \\ 123 &&& -1 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|} 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline && -1 & \\ &&& -1 \\ \hline 1 &&& \\ & 1 && \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline \mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

4. *Алгебра* $^{+}\mathbb{C}_4$

$$\varepsilon^{0} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline 32 & 1 \\ 13 && 1 \\ 21 &&& 1 \\ 0 &&&& 1 \\ \hline 42 &&&&& 1 \\ 14 &&&&&& 1 \\ 1324 &&&&&&& 1 \\ 34 &&&&&&&& 1 \\ \hline 1 &&&&&&&&& 1 \\ 2 &&&&&&&&&& 1 \\ 3 &&&&&&&&&&& 1 \\ 123 &&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline 134 &&&&&&&&&&&&& 1 \\ 234 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\ 4 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ 124 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline \end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|l} 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline 1 &&&&&&&& 13 \\ & 1 &&&&&&& 0 \\ && 1 &&&&&& 14 \\ &&& 1 &&&&& 34 \\ \hline &&&& 1 &&&& 2 \\ &&&&& 1 &&& 123 \\ &&&&&& 1 && 234 \\ &&&&&&& 1 & 124 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline \mathbb{1} &&&& 0 \\ & \mathbb{1} &&& 34 \\ \hline && \mathbb{1} && 123 \\ &&& \mathbb{1} & 124 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{21} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 52 && -1 \\ 13 & 1 \\ 21 &&&& -1 \\ 0 &&& 1 \\ \hline 1 &&&&&& -1 \\ 2 &&&&& 1 \\ 3 &&&&&&&& -1 \\ 123 &&&&&&& 1 \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|cc|cc|} 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline 1 &&& \\ & 1 && \\ \hline && 1 & \\ &&& 1 \\ \hline \end{array} = -i \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon^{13} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&& 1 \\ 13 &&&& -1 \\ 21 & -1 \\ 0 && 1 \\ \hline 1 &&&&&&& 1 \\ 2 &&&&&&&& -1 \\ 3 &&&&& -1 \\ 123 &&&&&& 1 \\ \hline \end{array} = -b \begin{array}{|cc|cc|} 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline & 1 && \\ -1 &&& \\ \hline &&& 1 \\ && -1 & \\ \hline \end{array} = -b \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline I & & 0 \\ \hline & I & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$
\varepsilon^1 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32&13&21&0&42&14&1324&34&1&2&3&123&134&234&4&124 \\ \hline
32&&&&&&&&&&&&-1\\
13&&&&&&&&&&&-1\\
21&&&&&&&&&&1\\
0&&&&&&&&&1\\ \hline
42&&&&&&&&&&&&&&&&-1\\
14&&&&&&&&&&&&&&&-1\\
1324&&&&&&&&&&&&&&1\\
34&&&&&&&&&&&&&1\\ \hline
1&&&&1\\
2&&&1\\
3&&-1\\
123&-1\\ \hline
134&&&&&&&&1\\
234&&&&&&&1\\
4&&&&&&-1\\
124&&&&&-1\\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13&0&14&34&2&123&134&124& \\ \hline
&&&&&-1&&&13\\
&&&&1&&&&0\\
&&&&&&&-1&14\\
&&&&&&1&&34\\ \hline
&1&&&&&&&2\\
-1&&&&&&&&123\\
&&&1&&&&&234\\
&&-1&&&&&&124\\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|l}
0&34&123&124& \\ \hline
&&-I&&0\\
&&&-I&34\\ \hline
I&&&&123\\
&I&&&124\\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^3 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32&13&21&0&42&14&1324&34&1&2&3&123&134&234&4&124 \\ \hline
32&&&&&&&&&&-1\\
13&&&&&&&&&1\\
21&&&&&&&&&&&&-1\\
0&&&&&&&&&&&1\\ \hline
42&&&&&&&&&&&&&&1\\
14&&&&&&&&&&&&&-1\\
1324&&&&&&&&&&&&&&&&1\\
34&&&&&&&&&&&&&&&-1\\ \hline
1&&1\\
2&-1\\
3&&&&1\\
123&&&-1\\ \hline
134&&&&&&-1\\
234&&&&&1\\
4&&&&&&&&-1\\
124&&&&&&&1\\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13&0&14&34&2&123&134&124& \\ \hline
&&&&-1&&&&13\\
&&&&&-1&&&0\\
&&&&&&1&&14\\
&&&&&&&1&34\\ \hline
1&&&&&&&&2\\
&1&&&&&&&123\\
&&-1&&&&&&234\\
&&&-1&&&&&124\\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0&34&123&124& \\ \hline
&&-\mathbb{1}&&0\\
&&&\mathbb{1}&34\\ \hline
\mathbb{1}&&&&123\\
&-\mathbb{1}&&&124\\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^2 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32&13&21&0&42&14&1324&34&1&2&3&123&134&234&4&124 \\ \hline
32&&&&&&&&&&&1\\
13&&&&&&&&&&&&-1\\
21&&&&&&&&&-1\\
0&&&&&&&&&&1\\ \hline
42&&&&&&&&&&&&&&&1\\
14&&&&&&&&&&&&&&&&-1\\
1324&&&&&&&&&&&&&-1\\
34&&&&&&&&&&&&&&1\\ \hline
1&&&-1\\
2&&&&1\\
3&1\\
123&&-1\\ \hline
134&&&&&&&-1\\
234&&&&&&&&1\\
4&&&&&1\\
124&&&&&&-1\\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13&0&14&34&2&123&134&124& \\ \hline
&&&&&-1&&&13\\
&&&&1&&&&0\\
&&&&&&&-1&14\\
&&&&&&1&&34\\ \hline
&1&&&&&&&2\\
-1&&&&&&&&123\\
&&&1&&&&&234\\
&&-1&&&&&&124\\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|cc|cc|l}
0&34&123&124& \\ \hline
&&-I&&0\\
&&&-I&34\\ \hline
I&&&&123\\
&I&&&124\\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^4 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32&13&21&0&42&14&1324&34&1&2&3&123&134&234&4&124 \\ \hline
32&&&&&&&&&&&&&&-1\\
13&&&&&&&&&&&&&1\\
21&&&&&&&&&&&&&&&&-1\\
0&&&&&&&&&&&&&&&1\\ \hline
42&&&&&&&&&&1\\
14&&&&&&&&&-1\\
1324&&&&&&&&&&&&1\\
34&&&&&&&&&&&-1\\ \hline
1&&&&&&1\\
2&&&&&-1\\
3&&&&&&&&1\\
123&&&&&&&-1\\ \hline
134&&-1\\
234&1\\
4&&&&-1\\
124&&&1\\ \hline
\end{array}
$$

$$
= -i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13&0&14&34&2&123&134&124& \\ \hline
&&&&&&1&&13\\
&&&&&&&1&0\\
&&&&-1&&&&14\\
&&&&&-1&&&34\\ \hline
&&-1&&&&&&2\\
&&&-1&&&&&123\\
1&&&&&&&&234\\
&1&&&&&&&124\\ \hline
\end{array}
= -i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0&34&123&124& \\ \hline
&&&\mathbb{1}&0\\
&&-\mathbb{1}&&34\\ \hline
&-\mathbb{1}&&&123\\
\mathbb{1}&&&&124\\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{21} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; -i
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & 1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & 1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; -i
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 0 \\
 & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline
 & & \mathbb{1} & & 123 \\
 & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{32} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; -a
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & -1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & -1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & -1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; -a
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
 & -I & & & 34 \\ \hline
 & & I & & 123 \\
 & & & -I & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{13} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
1324 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
3 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
4 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; -b
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
-1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & -1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & -1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & -1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; -b
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
I & & & & 0 \\
 & -I & & & 34 \\ \hline
 & & I & & 123 \\
 & & & -I & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{14} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
21 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
1324 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
3 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
4 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \; b
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & -1 & & & & & 13 \\
 & & 1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & & 14 \\
-1 & & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 2 \\
 & & & & & & 1 & & 123 \\
 & & & & & 1 & & & 234 \\
 & & & & -1 & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\; = \; b
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -I & & & 0 \\
I & & & & 34 \\ \hline
 & & & -I & 123 \\
 & & I & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{42} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\
13 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
21 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
0 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\ \hline
42 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
14 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\
1324 && -1 &&&& &&&& &&&& && \\
34 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
2 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
3 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
123 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\ \hline
134 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
234 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
4 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
124 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& -1 &&&& & 13 \\
&& 1 &&&& && 0 \\
& 1 &&&& &&& 14 \\
-1 &&&& &&&& 34 \\ \hline
&&& &&&& -1 & 2 \\
&&& &&& 1 && 123 \\
&&& && 1 &&& 234 \\
&&& & -1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -I &&& 0 \\
I &&&& 34 \\ \hline
&&& -I & 123 \\
&& I && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{123} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& & 1 &&&& &&& \\
13 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\
21 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
0 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
14 &&&& &&&& &&&& && -1 && \\
1324 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
34 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\ \hline
1 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
2 && -1 &&&& &&&& &&&& && \\
3 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\
123 &&&& -1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
134 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\
234 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
4 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\
124 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= -\mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& -1 &&&& 13 \\
&&&& & -1 &&& 0 \\
&&&& && 1 && 14 \\
&&&& &&& 1 & 34 \\ \hline
1 &&&& &&&& 2 \\
& 1 &&& &&&& 123 \\
&& -1 && &&&& 234 \\
&&& -1 & &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= -\mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&& -\mathbb{1} && 0 \\
&&& \mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} &&&& 123 \\
& -\mathbb{1} &&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{34} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\
13 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
21 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\
0 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\ \hline
42 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
14 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
1324 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\
34 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
2 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
3 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
123 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\ \hline
134 &&&& &&&& & 1 &&&& &&& \\
234 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\
4 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
124 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&& 1 &&&& && 13 \\
&&& 1 &&&& & 0 \\
1 &&&& &&&& 14 \\
& 1 &&& &&&& 34 \\ \hline
&&&& && 1 && 2 \\
&&&& &&& 1 & 123 \\
&&&& 1 &&&& 234 \\
&&&& & 1 &&& 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& \mathbb{1} &&& 0 \\
\mathbb{1} &&&& 34 \\ \hline
&&& \mathbb{1} & 123 \\
&& \mathbb{1} && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon^{124} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
13 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
21 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
0 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\ \hline
42 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
14 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
1324 &&&& &&&& &&& -1 &&&& & \\
34 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\ \hline
1 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\
2 &&&& && -1 &&&& &&&& && \\
3 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
123 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\ \hline
134 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
234 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
4 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\
124 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& && 1 && 13 \\
&&&& &&& 1 & 0 \\
&&&& -1 &&&& 14 \\
&&&& & -1 &&& 34 \\ \hline
&& -1 && &&&& 2 \\
&&& -1 & &&&& 123 \\
1 &&&& &&&& 234 \\
& 1 &&& &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
&&& \mathbb{1} & 0 \\
&& -\mathbb{1} && 34 \\ \hline
& -\mathbb{1} &&& 123 \\
\mathbb{1} &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$\varepsilon^{134} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
0 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
14 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
34 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
123 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
234 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
124 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 13 \\
 & & & & & & 1 & & 0 \\
 & & & & & -1 & & & 14 \\
 & & & & 1 & & & & 34 \\ \hline
 & & & 1 & & & & & 2 \\
 & & -1 & & & & & & 123 \\
 & 1 & & & & & & & 234 \\
-1 & & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -I & 0 \\
 & & -I & & 34 \\ \hline
 & I & & & 123 \\
I & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{1324} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & -1 & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= -i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & 1 & & & & & & 13 \\
 & & & 1 & & & & & 0 \\
1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & 1 & & 2 \\
 & & & & & & & 1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & 1 & & & 124 \\ \hline
\end{array} = -i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & & & 0 \\
\mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline
 & & & \mathbb{1} & 123 \\
 & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon^{234} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
21 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
0 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
42 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
14 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
1324 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
3 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
123 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
134 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
234 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
4 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
124 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & & -1 & 13 \\
 & & & & & & 1 & & 0 \\
 & & & & & -1 & & & 14 \\
 & & & & 1 & & & & 34 \\ \hline
 & & & 1 & & & & & 2 \\
 & & -1 & & & & & & 123 \\
 & 1 & & & & & & & 234 \\
-1 & & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & -I & 0 \\
 & & -I & & 34 \\ \hline
 & I & & & 123 \\
I & & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

IV. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ.

В этом разделе мы остановимся на представлении базисных векторов алгебры Клиффорда $^{+}\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $^{+}\mathbb{C}_{n-k}$, где $k < n$. Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры $^{+}\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $^{+}\mathbb{C}_{n-1}$. Разобьем базисные векторы ε^I алгебры $^{+}\mathbb{C}_n$ на две группы ε^{I_1} и ε^{I_2} с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы ε^{I_1} образовывали алгебру $^{+}\mathbb{C}_{n-1}$. В силу симметрий алгебры Клиффорда соотношения (1) принимают вид

$$\varepsilon^{I_1} \circ \varepsilon^{K_1} = C^{I_1 K_1}{}_{L_1} \cdot \varepsilon^{L_1}\,, \tag{9}$$

$$\varepsilon^{I_2} \circ \varepsilon^{K_1} = C^{I_2 K_1}{}_{L_2} \cdot \varepsilon^{L_2}\,, \tag{10}$$

$$\varepsilon^{I_1} \circ \varepsilon^{K_2} = C^{I_1 K_2}{}_{L_2} \cdot \varepsilon^{L_2}\,,$$

$$\varepsilon^{I_2} \circ \varepsilon^{K_2} = C^{I_2 K_2}{}_{L_1} \cdot \varepsilon^{L_1}\,.$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры $^{+}\mathbb{C}_n$ в алгебре $^{+}\mathbb{C}_{n-1}$ базисные векторы ε^{L_2} в правой части уравнения (10) можно заменить на базисные векторы ε^{L_1} с помощью соотношения

$$\varepsilon^{L_2} = P^{L_2}{}_{L_1} \cdot \varepsilon^{L_1}\,, \tag{11}$$

где $P^{L_2}{}_{L_1}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (10) принимает вид:

$$\varepsilon^{I_2} \circ \varepsilon^{K_1} = C^{I_2 K_1}{}_{L_2} \cdot P^{L_2}{}_{L_1} \cdot \varepsilon^{L_1}\,. \tag{12}$$

Соотношения (9) и (12) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры $^{+}\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $^{+}\mathbb{C}_{n-1}$, причем базисные векторы подалгебры $^{+}\mathbb{C}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре ${}^{+}\mathbb{C}_{n-k}$, где $k < n$.

1. Первое сжатое представление.

Рассмотрим первое сжатое представление

$$R_1 : {}^{+}\mathbb{C}_4 \to {}^{+}\mathbb{C}_3\,\{\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{0}, \varepsilon^{1}, \varepsilon^{2}, \varepsilon^{3}, \varepsilon^{123}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (12) соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в комплексном представлении и 2×2 в кватернионном представлении. В результате будем иметь

$$\varepsilon^{0}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & 1 &&&&&&& \\
13 && 1 &&&&&& \\
21 &&& 1 &&&&& \\
0 &&&& 1 &&&& \\ \hline
1 &&&&& 1 &&& \\
2 &&&&&& 1 && \\
3 &&&&&&& 1 & \\
123 &&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}
= 1\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 &&& \\ & 1 && \\ \hline && 1 & \\ &&& 1 \\ \hline\end{array}
= 1\,\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline\end{array}$$

$$\varepsilon^{1}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 &&&&&&&& -1 \\
13 &&&&&&& -1 & \\
21 &&&&&& 1 && \\
0 &&&&& 1 &&& \\ \hline
1 &&&& 1 &&&& \\
2 &&& 1 &&&&& \\
3 && -1 &&&&&& \\
123 & -1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array}
= a\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline &&& -1 \\ && 1 & \\ \hline & 1 && \\ -1 &&& \\ \hline\end{array}
= a\,\begin{array}{|c|c|}\hline & -I \\ \hline I & \\ \hline\end{array}$$

$$\varepsilon^{2}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 &&&&&&& 1 & \\
13 &&&&&&&& -1 \\
21 &&&&& -1 &&& \\
0 &&&&&& 1 && \\ \hline
1 &&& -1 &&&&& \\
2 &&&& 1 &&&& \\
3 & 1 &&&&&&& \\
123 && -1 &&&&&& \\ \hline
\end{array}
= b\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline &&& -i \\ && i & \\ \hline & i && \\ -i &&& \\ \hline\end{array}
= b\,\begin{array}{|c|c|}\hline & -I \\ \hline I & \\ \hline\end{array}$$

$$\varepsilon^{3}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 &&&&&& -1 && \\
13 &&&&& 1 &&& \\
21 &&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&& 1 & \\ \hline
1 && 1 &&&&&& \\
2 & -1 &&&&&&& \\
3 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 &&&&& \\ \hline
\end{array}
= i\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline && -1 & \\ &&& -1 \\ \hline 1 &&& \\ & 1 && \\ \hline\end{array}
= i\,\begin{array}{|c|c|}\hline & -I \\ \hline I & \\ \hline\end{array}$$

$$\varepsilon^{4}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 &&&&&& -1 && \\
13 &&&&& 1 &&& \\
21 &&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&& 1 & \\ \hline
1 && 1 &&&&&& \\
2 & -1 &&&&&&& \\
3 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 &&&&& \\ \hline
\end{array}
= i\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline && -1 & \\ &&& -1 \\ \hline 1 &&& \\ & 1 && \\ \hline\end{array}
= i\,\begin{array}{|c|c|}\hline & -\mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline\end{array}$$

$$\varepsilon^{21}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 && -1 &&&&&& \\
13 & 1 &&&&&&& \\
21 &&&& -1 &&&& \\
0 &&& 1 &&&&& \\ \hline
1 &&&&&& -1 && \\
2 &&&&& 1 &&& \\
3 &&&&&&&& -1 \\
123 &&&&&&& 1 & \\ \hline
\end{array}
= -i\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 &&& \\ & 1 && \\ \hline && 1 & \\ &&& 1 \\ \hline\end{array}
= -i\,\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline\end{array}$$

$$\varepsilon^{13}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 &&& 1 &&&&& \\
13 &&&& -1 &&&& \\
21 & -1 &&&&&&& \\
0 && 1 &&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&& 1 & \\
2 &&&&&&&& -1 \\
3 &&&&& -1 &&& \\
123 &&&&&& 1 && \\ \hline
\end{array}
= -b\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline & i && \\ -i &&& \\ \hline &&& i \\ && -i & \\ \hline\end{array}
= -b\,\begin{array}{|c|c|}\hline I & \\ \hline & I \\ \hline\end{array}$$

$$\varepsilon^{32}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 &&&& -1 &&&& \\
13 &&& -1 &&&&& \\
21 && 1 &&&&&& \\
0 & 1 &&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&& -1 \\
2 &&&&&&& -1 & \\
3 &&&&&& 1 && \\
123 &&&&& 1 &&& \\ \hline
\end{array}
= -a\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline & 1 && \\ -1 &&& \\ \hline &&& 1 \\ && -1 & \\ \hline\end{array}
= -a\,\begin{array}{|c|c|}\hline I & \\ \hline & I \\ \hline\end{array}$$

$$\varepsilon^{14}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & \mathit{42} & \mathit{14} & \mathit{1324} & \mathit{34} & \mathit{134} & \mathit{234} & \mathit{4} & \mathit{124}\\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 &&& 1 &&&&& \\
13 &&&& -1 &&&& \\
21 & -1 &&&&&&& \\
0 && 1 &&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&& 1 & \\
2 &&&&&&&& -1 \\
3 &&&&& -1 &&& \\
123 &&&&&& 1 && \\ \hline
\end{array}
= -b\,\begin{array}{|cc|cc|}\hline & 1 && \\ -1 &&& \\ \hline &&& 1 \\ && -1 & \\ \hline\end{array}
= -b\,\begin{array}{|c|c|}\hline I & \\ \hline & I \\ \hline\end{array}$$

$$
\varepsilon^{42} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & -1 & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & -1 \\
2 & & & & & & & -1 & \\
3 & & & & & & 1 & & \\
123 & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}
= -a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline & & & i \\ & & -i & \\ \hline \end{array}
= -a \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline & I \\ \hline \end{array}
$$

$$
\varepsilon^{34} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}
= 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array}
= 1 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}
$$

$$
\varepsilon^{123} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & 1 & & & \\
13 & & & & & & 1 & & \\
21 & & & & & & & 1 & \\
0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
1 & -1 & & & & & & & \\
2 & & -1 & & & & & & \\
3 & & & -1 & & & & & \\
123 & & & & -1 & & & & \\ \hline
\end{array}
= 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline \end{array}
= 1 \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & \\ \hline \end{array}
$$

$$
\varepsilon^{124} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & 1 & & & \\
13 & & & & & & 1 & & \\
21 & & & & & & & 1 & \\
0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
1 & -1 & & & & & & & \\
2 & & -1 & & & & & & \\
3 & & & -1 & & & & & \\
123 & & & & -1 & & & & \\ \hline
\end{array}
= 1 \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline \end{array}
= 1 \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & \\ \hline \end{array}
$$

$$
\varepsilon^{134} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & -1 & \\
21 & & & & & & 1 & & \\
0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
1 & & & & 1 & & & & \\
2 & & & 1 & & & & & \\
3 & & -1 & & & & & & \\
123 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & -i \\ & & i & \\ \hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline \end{array}
= a \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array}
$$

$$
\varepsilon^{234} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & -1 \\
21 & & & & & -1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
1 & & & -1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & \\
3 & 1 & & & & & & & \\
123 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|} \hline & & & -1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline \end{array}
= b \begin{array}{|c|c|} \hline & -I \\ \hline I & \\ \hline \end{array}
$$

$$
\varepsilon^{1324} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & \\
21 & & & & -1 & & & & \\
0 & & & 1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & -1 & & \\
2 & & & & & 1 & & & \\
3 & & & & & & & & -1 \\
123 & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
= -i \begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline \end{array}
= -i \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array}
$$

2. Второе сжатое представление.

Рассмотрим второе сжатое представление

$$R_2 : {}^{+}\mathbb{C}_4 \to {}^{+}\mathbb{C}_2 \, \{\varepsilon^{32}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^{21}, \varepsilon^{0}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (12) соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в комплексном представлении и 1×1 в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ в алгебре ${}^{+}\mathbb{C}_2$. Имеем

$$
\varepsilon^{1} \sim
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 1 & 2 & 3 & 123 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
32 & & & & -1 \\
13 & & & -1 & \\ \hline
21 & & 1 & & \\
0 & 1 & & & \\ \hline
\end{array}
= -a \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array}
= -a\, I
$$

$$
\varepsilon^{2} \sim
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 1 & 2 & 3 & 123 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
32 & & & 1 & \\
13 & & & & -1 \\ \hline
21 & -1 & & & \\
0 & & 1 & & \\ \hline
\end{array}
= -b \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array}
= -b\, I
$$

$$
\varepsilon^{3} \sim
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 1 & 2 & 3 & 123 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
32 & & -1 & & \\
13 & 1 & & & \\ \hline
21 & & & & -1 \\
0 & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
= -i \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}
= -i\, \mathbb{1}
$$

$$
\varepsilon^{4} \sim
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
32 & & -1 & & \\
13 & 1 & & & \\ \hline
21 & & & & -1 \\
0 & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
= -i \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}
= -i\, \mathbb{1}
$$

В результате для базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ получим

$$
\begin{array}{ll}
\varepsilon^{32} \sim -a\, I\,, & \varepsilon^{42} \sim -a\, I\,, \\
\varepsilon^{13} \sim -b\, I\,, & \varepsilon^{14} \sim -b\, I\,, \\
\varepsilon^{21} \sim -i\, \mathbb{1}\,, & \varepsilon^{1324} \sim -i\, \mathbb{1}\,, \\
\varepsilon^{0} \sim 1\, \mathbb{1}\,, & \varepsilon^{34} \sim 1\, \mathbb{1}\,, \\
 & \\
\varepsilon^{1} \sim -a\, I\,, & \varepsilon^{134} \sim -a\, I\,, \\
\varepsilon^{2} \sim -b\, I\,, & \varepsilon^{234} \sim -b\, I\,, \\
\varepsilon^{3} \sim -i\, \mathbb{1}\,, & \varepsilon^{4} \sim -i\, \mathbb{1}\,, \\
\varepsilon^{123} \sim 1\, \mathbb{1}\,, & \varepsilon^{124} \sim 1\, \mathbb{1}\,.
\end{array}
$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы ε^{32}, ε^{13}, ε^{21}, ε^{0} представлены точно. Соотношения

$$
\begin{array}{c}
\varepsilon^{32} \sim -a\, I\,, \\
\varepsilon^{13} \sim -b\, I\,, \\
\varepsilon^{21} \sim -i\, \mathbb{1}\,, \\
\varepsilon^{0} \sim 1\, \mathbb{1}
\end{array}
$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами. Именно такое соответствие было постулировано в разделе VC.

3. Третье сжатое представление.

Рассмотрим третье сжатое представление

$$R_3 :\ {}^{+}\mathbb{C}_4 \to\ {}^{+}\mathbb{C}_1\, \{\varepsilon^{21}, \varepsilon^{0}\}$$

Для этого положим, что соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14)$, $(1324, 34)$, $(134, 234)$, $(4, 124)$, $(1, 2)$, $(3, 123)$, $(32, 13)$ заменяются на векторы с индексами $(21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры ${}^{+}\mathbb{C}_4$ получим

$$
\begin{array}{llll}
\varepsilon^{32} \sim a\,, & \varepsilon^{1} \sim a\,, & \varepsilon^{42} \sim a\,, & \varepsilon^{134} \sim a\,, \\
\varepsilon^{13} \sim b\,, & \varepsilon^{2} \sim b\,, & \varepsilon^{14} \sim b\,, & \varepsilon^{234} \sim b\,, \\
\varepsilon^{21} \sim -i\,, & \varepsilon^{3} \sim -i\,, & \varepsilon^{1324} \sim -i\,, & \varepsilon^{4} \sim -i\,, \\
\varepsilon^{0} \sim 1\,, & \varepsilon^{123} \sim 1\,, & \varepsilon^{34} \sim 1\,, & \varepsilon^{124} \sim 1
\end{array}
$$

В рассматриваемом представлении вектор ε^{21} и только он представляется точно.

V. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ ЛЕПТОНОВ. ОБОБЩАЮЩАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ.

Пытаясь найти алгебраическую основу для квантовых явлений и отталкиваясь от уравнения Дирака, мы пришли к необходимости ввести целый букет алгебр Клиффорда – алгебр действия лептонов и антилептонов. Количество этих алгебр – четыре. Каждая из них построена на четырех образующих базисных векторах, три из которых имеют сигнатуру равную $(+1)$ и один базисный вектор имеет сигнатуру равную (-1). Общее число базисных векторов каждой из алгебр равно 16.

Укажем еще раз установленные алгебры.

- Контравариантная алгебра $\mathbb{C}$. Ее базисные векторы обозначены ε_I. Закон умножения базисных векторов в этой алгебре записан так
$$\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L \cdot C^{L}{}_{KI}\,. \tag{13}$$
- Ковариантная сопряженная алгебра ${}^{+}\mathbb{C}$. Ее базисные векторы обозначены ε^I. Закон умножения базисных векторов в этой алгебре записан так
$$\varepsilon^K \circ \varepsilon^I =\ {}^{+}C^{IK}{}_{L}\, \varepsilon^L\,. \tag{14}$$
- Контравариантная сопряженная алгебра ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$. Ее базисные векторы обозначены $\mathcal{E}_I$. Закон умножения базисных векторов в этой алгебре записан так
$$\mathcal{E}_I \circ \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_L \cdot\ {}^{+}C^{L}{}_{KI}\,. \tag{15}$$
- Ковариантная алгебра $\widetilde{\mathbb{C}}$. Ее базисные векторы обозначены $\mathcal{E}^I$. Закон умножения базисных векторов в этой алгебре записан так
$$\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K = C^{IK}{}_{L}\, \mathcal{E}^L\,. \tag{16}$$

В формировании уравнения Дирака для лептонов принимают участие структурные матрицы алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ и векторы алгебры $\mathbb{C}$. В формировании уравнения Дирака для антилептонов принимают участие структурные матрицы алгебры ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ и векторы алгебры ${}^{+}\mathbb{C}$.

Рассматривая законы умножения (13) и (15), мы замечаем, что алгебры $\mathbb{C}$ и ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как две разновидности одной и той же алгебры, отличающиеся между собой порядком умножения базисных векторов. Умножение в первом случае (по формуле (13)) назовем *правым*, так как базисный вектор с номером структурной матрицы занимает правое место в произведении. В законе умножения (15) базисный вектор с номером структурной матрицы занимает левое место в произведении. Это умножение мы назовем *левым.*

Исходя из приведенных соображений, мы введем соответствующие переобозначения. Будем рассматривать алгебру действия лептонов как алгебру Клиффорда, в которой порядок умножения базисных векторов может быть выбран произвольно. Эту алгебру обозначим $\mathbb{L}$. Одну разновидность этой алгебры, в которой использовано левое умножение базисных векторов, обозначим $\mathbb{L}_{left}$. Таким образом,

$$\mathbb{L}_{left} \equiv^{+} \widetilde{\mathbb{C}}\,.$$

Другую разновидность этой алгебры, в которой использовано правое умножение базисных векторов, обозначим $\mathbb{L}_{right}$. Таким образом,

$$\mathbb{L}_{right} \equiv \mathbb{C}\,.$$

Эту точку зрения мы проиллюстрируем следующей диаграммой

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{L} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathbb{L}_{left} \equiv^{+} \widetilde{\mathbb{C}} & & \mathbb{L}_{right} \equiv \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Каждая из этих алгебр характеризуется своими базисными векторами, правилами умножения базисных векторов и структурными матрицами

$$\begin{array}{cc} \mathbb{L}_{left} & \mathbb{L}_{right} \\ \mathcal{E}_I & \varepsilon_I \\ {}^{+}C^{L}{}_{KI} & C^{L}{}_{KI} \end{array}$$

Также будем рассматривать алгебру действия антилептонов как алгебру Клиффорда, в которой порядок умножения базисных векторов может быть выбран произвольно. Эту алгебру обозначим ${}^{+}\mathbb{L}$. Одну разновидность этой алгебры, в которой использовано левое умножение базисных векторов, обозначим ${}^{+}\mathbb{L}_{left}$. Таким образом,

$${}^{+}\mathbb{L}_{left} \equiv \widetilde{\mathbb{C}}\,.$$

Другую разновидность этой алгебры, в которой использовано правое умножение базисных векторов, обозначим ${}^{+}\mathbb{L}_{right}$. Таким образом,

$${}^{+}\mathbb{L}_{right} \equiv {}^{+}\mathbb{C}\,.$$

Эту точку зрения мы проиллюстрируем следующей диаграммой

$$\begin{tikzcd} & {}^{+}\mathbb{L} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ {}^{+}\mathbb{L}_{left} \equiv \widetilde{\mathbb{C}} & & {}^{+}\mathbb{L}_{right} \equiv {}^{+}\mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Каждая из этих алгебр также характеризуется своими базисными векторами, правилами умножения базисных векторов и структурными матрицами

$$\begin{array}{cc} {}^{+}\mathbb{L}_{left} & {}^{+}\mathbb{L}_{right} \\ \mathcal{E}^I & \varepsilon^I \\ C^{IK}{}_{L} & {}^{+}C^{IK}{}_{L} \end{array}$$

Алгебра $\mathbb{L}$ является контравариантной, алгебра ${}^{+}\mathbb{L}$ является ковариантной и вместе с тем сопряженной к алгебре $\mathbb{L}$. Таким образом, понятия ковариантная алгебра и алгебра, сопряженная к контравариантной, являются эквивалентными.[*] В дальнейшем мы будем использовать выдвинутую здесь точку зрения и указанные обозначения.

Структурные матрицы ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$, $C^{L}{}_{KI}$, $C^{IK}{}_{L}$, ${}^{+}C^{IK}{}_{L}$ приведенных алгебр Клиффорда вычисляются на основании правил умножения базисных векторов в этих алгебрах для примененного ранее порядка индексов:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

Они также могут быть получены путем преобразований одного вида матриц в другой с помощью тензора преобразований, введенного в Разделе II Лекции 3. В качестве такого тензора преобразований выступает либо метрический тензор

$$g^{LP} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
13 & & -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
21 & && -1 &&&&&&&&&&&&& \\
0 & &&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 & &&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
14 & &&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
1324 & &&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
34 & &&&&&&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
1 & &&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
2 & &&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
3 & &&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
123 & &&&&&&&&&&& -1 &&&& \\ \hline
134 & &&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
234 & &&&&&&&&&&&&& 1 && \\
4 & &&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
124 & &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}$$

либо символ Кронеккера δ^{IK}. Указанные преобразования рассматриваются в Разделе VII следующей Лекции.

VI. ВЫВОДЫ.

1. Структурные матрицы ковариантной сопряженной алгебры Клиффорда ${}^{+}\mathbb{C}$ в комплексном представлении являются эрмитово сопряженными матрицами алгебры действия.

2. Ковариантную сопряженную алгебру Клиффорда ${}^{+}\mathbb{C}_4$ следует считать алгеброй действия антилептонов.

3. Переход от одной из четырех ранее введенных алгебр Клиффорда $\mathbb{C}$, $\widetilde{\mathbb{C}}$, ${}^{+}\mathbb{C}$, ${}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}$ к другой осуществляется с помощью метрического тензора и символа Кронеккера.

---

[*]Это заключение особенно интересно в свете поиска единства квантовой теории и общей теории относительности.

4. Четыре алгебры Клиффорда объединены в две взаимно сопряженные алгебры. Одна из них $\mathbb{L} \sim \{\mathbb{C},\, {}^{+}\widetilde{\mathbb{C}}\}$ отнесена к лептону, а другая ${}^{+}\mathbb{L} \sim \{{}^{+}\mathbb{C},\, \widetilde{\mathbb{C}}\}$ отнесена к антилептону.