Лекция 4. Контравариантная алгебра действия и квантовые постулаты.

А. А. Кецарис
(4 июля 2003 г.)

В этой лекции мы завершаем объяснение квантовых явлений алгебраической структурой векторов действия.

I. ВВЕДЕНИЕ

Обогащенные опытом вывода матриц Дирака, вернемся к вычислению структурных матриц контравариантной алгебры действия. Обращение к матрицам Дирака научило нас следующему:

1. Компоненты векторов и матриц необходимо рассматривать в следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)$$

– для подалгебры $\mathbb{C}_3$ и

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)$$

– для алгебры $\mathbb{C}_4$.

2. Переход от действительного представления к комплексному и кватернионному осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц.

3. При переходе к частным случаям квантовой теории целесообразно пользоваться процедурой сжатия, или вырождения слагаемых компонент вектора.

Итак, в соответствии с нашим общим замыслом мы должны, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда $\mathbb{C}$, найти структурные матрицы этой алгебры. Затем подставить эти матрицы в уравнения структуры (Л1.19) и сравнить результат с квантовыми постулатами (Л1.3). В том случае, если соотношения (Л1.3) будут получены, мы подтвердим вывод Лекции 1 о том, что причина квантовых явлений заключается в алгебраической структуре векторов действия.

II. СТРУКТУРНЫЕ МАТРИЦЫ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА.

Далее рассмотрим структурные матрицы, которыми представляются базисные векторы алгебры Клиффорда $\mathbb{C}$:

$$\varepsilon_I \sim C^L{}_{KI}\,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который может быть представлен этой матрицей.

Напомним, что закон умножения базисных векторов в алгебре Клиффорда $\mathbb{C}$ был записан нами следующим образом

$$\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L \cdot C^L{}_{KI}\,. \tag{1}$$

Сравнивая закон умножения (1) с законом умножения базисных векторов для алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ (см. соотношение (Л3.4)), мы отмечаем два существенных различия этих законов между собой.

1. Они имеют разный порядок умножения базисных векторов. Для (1) базисный вектор с номером структурной матрицы занимает правое место в произведении, а для алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ базисный вектор с номером структурной матрицы занимает левое место в произведении базисных векторов.

2. Базисные векторы ε_K в матричном виде изображаются вектором-строкой, а базисные векторы $\mathcal{E}^K$ изображаются вектором-столбцом.

Вполне естественно ожидать, что указанные отличия приведут к существенным отличиям структурных матриц рассматриваемой алгебры от структурных матриц алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$. Вместе с тем, с одной стороны, нужно понимать, что указанные отличия законов умножения являются в определенном смысле взаимно дополнительными. Поэтому следует ожидать, что структурные матрицы алгебр $\mathbb{C}$ и $\widetilde{\mathbb{C}}$ также являются в некотором смысле взаимно дополнительными. С другой стороны, нужно помнить, что структурные матрицы алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}$ в частном случае представляют собой матрицы Дирака, ключевые для квантовой теории. Отсюда следует важный вывод: роль искомых нами структурных матриц для алгебры $\mathbb{C}$ должна быть столь же существенна как и матриц Дирака.

Итак приступим к вычислению структурных матриц алгебры $\mathbb{C}$.

1. Действительное представление контравариантной алгебры Клиффорда.

Из (1) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы (I) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы (K) проделать следующие вычисления. Базисный вектор ε_K, номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор ε_I, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор ε_L, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер (L) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы ${C^L}_{KI}$ по приведенному алгоритму для двух случаев

1. подалгебра $\mathbb{C}_3$ с тремя образующими базисными векторами ε_1, ε_2, ε_3;

2. алгебра $\mathbb{C}_4$ с четырьмя образующими базисными векторами ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

Для подалгебры $\mathbb{C}_3$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов:*

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора ψ в следующей последовательности

$$\psi = \varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0 + \varepsilon_1\,\psi^1 + \varepsilon_2\,\psi^2 + \varepsilon_3\,\psi^3 + \varepsilon_{123}\,\psi^{123}\,.$$

В результате получим действительные структурные матрицы 8×8 представления базисных векторов ε_K. (См. Раздел II 5).

Для алгебры $\mathbb{C}_4$ будем вычислять структурные матрицы для особого порядка индексов, обобщающего предыдущий порядок индексов,

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора ψ в следующей последовательности

$$\begin{aligned}\psi = {}&\varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0 + {}\\ &\varepsilon_{42}\,\psi^{42} + \varepsilon_{14}\,\psi^{14} + \varepsilon_{1324}\,\psi^{1324} + \varepsilon_{34}\,\psi^{34} + {}\\ &\varepsilon_1\,\psi^1 + \varepsilon_2\,\psi^2 + \varepsilon_3\,\psi^3 + \varepsilon_{123}\,\psi^{123} + {}\\ &\varepsilon_{134}\,\psi^{134} + \varepsilon_{234}\,\psi^{234} + \varepsilon_4\,\psi^4 + \varepsilon_{124}\,\psi^{124}\,.\end{aligned}$$

В результате получим действительные матрицы 16×16 представления базисных векторов ε_K. (См. Раздел II 5).

Помимо действительного представления будем использовать *комплексное*, *кватернионное* и *бикватернионное* представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

---

*Приведенный порядок индексов оправдан тем, что для него структурные матрицы контравариантной алгебры Клиффорда представлены матрицами Дирака (см. Лекцию 3).

2. Комплексное представление контравариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\mathbb{C}_3$.

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \varepsilon_{13}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{32} + \varepsilon_0\,\psi^{13}) + \varepsilon_0\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0) + \varepsilon_2\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^1 + \varepsilon_0\,\psi^2) + \varepsilon_{123}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^3 + \varepsilon_0\,\psi^{123})\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_3$ в виде произведения $\mathbb{C}_2\times\mathbb{C}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_{13}\,,\quad \varepsilon_0\,,\quad \varepsilon_2\,,\quad \varepsilon_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_{21}\,,\quad \varepsilon_0\,.$$

Пространство $\mathbb{C}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору ε_{21} алгебры $\mathbb{C}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу i, имея в виду, что $\operatorname{sign}\varepsilon_{21} = -1$, а базисному вектору ε_0 алгебры $\mathbb{C}_1$ поставим в соответствие действительную единицу†.

$$\varepsilon_{21}\sim i\,,\quad \varepsilon_0\sim 1\,.$$

В результате получим вектор алгебры $\mathbb{C}_3$ в комплексном представлении

$$\begin{aligned}\psi \;=\; &\varepsilon_{13}\circ(i\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0\circ(i\,\psi^{21} + \psi^0) + {}\\ &\varepsilon_2\circ(i\,\psi^1 + \psi^2) + \varepsilon_{123}\circ(i\,\psi^3 + \psi^{123})\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}^{13} &= i\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, &\quad \boldsymbol{\psi}^{0} &= i\,\psi^{21} + \psi^0\,,\\ \boldsymbol{\psi}^{2} &= i\,\psi^1 + \psi^2\,, &\quad \boldsymbol{\psi}^{123} &= i\,\psi^3 + \psi^{123}\,.\end{aligned} \tag{3}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \varepsilon_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \varepsilon_0\,\boldsymbol{\psi}^{0} + \varepsilon_2\,\boldsymbol{\psi}^{2} + \varepsilon_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123}\,. \tag{4}$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_{13}, ε_0, ε_2, ε_{123}.

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 (см. Раздел II 5).

---

†Этот выбор найдет обоснование в разделе IIIC.

2. алгебра $\mathbb{C}_4$.

Комплексное представление в этом случае основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \varepsilon_{13}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{32} + \varepsilon_0\,\psi^{13}) + \varepsilon_0\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^{0}) + \\ \varepsilon_{14}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{42} + \varepsilon_0\,\psi^{14}) + \varepsilon_{34}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{1324} + \varepsilon_0\,\psi^{34}) + \\ \varepsilon_{2}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{1} + \varepsilon_0\,\psi^{2}) + \varepsilon_{123}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{3} + \varepsilon_0\,\psi^{123}) + \\ \varepsilon_{234}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{134} + \varepsilon_0\,\psi^{234}) + \varepsilon_{124}\circ(\varepsilon_{21}\,\psi^{4} + \varepsilon_0\,\psi^{124})\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4$ в виде произведения $\mathbb{C}_3\times\mathbb{C}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_3$ являются

$$\varepsilon_{13}\,, \varepsilon_0\,, \varepsilon_{14}\,, \varepsilon_{34}\,, \varepsilon_2\,, \varepsilon_{123}\,, \varepsilon_{234}\,, \varepsilon_{124}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_{21}\,,\quad \varepsilon_0\,.$$

Как и прежде поставим в соответствие базисному вектору ε_{21} алгебры $\mathbb{C}_1$ мнимую единицу i, а базисному вектору ε_0 действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4$ в комплексном представлении имеет вид

$$\psi = \varepsilon_{13}\circ(i\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0\circ(i\,\psi^{21} + \psi^{0}) + \\ \varepsilon_{14}\circ(i\,\psi^{42} + \psi^{14}) + \varepsilon_{34}\circ(i\,\psi^{1324} + \psi^{34}) + \\ \varepsilon_{2}\circ(i\,\psi^{1} + \psi^{2}) + \varepsilon_{123}\circ(i\,\psi^{3} + \psi^{123}) + \\ \varepsilon_{234}\circ(i\,\psi^{134} + \psi^{234}) + \varepsilon_{124}\circ(i\,\psi^{4} + \psi^{124})\,.$$

Таким образом, в комплексном представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными. Введем для них обозначение

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\psi}^{13} = i\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} = i\,\psi^{21} + \psi^{0}\,, \\ \boldsymbol{\psi}^{14} = i\,\psi^{42} + \psi^{14}\,, & \boldsymbol{\psi}^{34} = i\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,, \\ \boldsymbol{\psi}^{2} = i\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} = i\,\psi^{3} + \psi^{123}\,, \\ \boldsymbol{\psi}^{234} = i\,\psi^{134} + \psi^{234}\,, & \boldsymbol{\psi}^{124} = i\,\psi^{4} + \psi^{124}\,. \end{array} \tag{5}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \varepsilon_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \varepsilon_0\,\boldsymbol{\psi}^{0} + \varepsilon_{14}\,\boldsymbol{\psi}^{14} + \varepsilon_{34}\,\boldsymbol{\psi}^{34} + \\ \varepsilon_{2}\,\boldsymbol{\psi}^{2} + \varepsilon_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123} + \varepsilon_{234}\,\boldsymbol{\psi}^{234} + \varepsilon_{124}\,\boldsymbol{\psi}^{124}\,.$$

Отсюда видно, что в комплексном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_{13}, ε_0,ε_{14}, ε_{34}, ε_2, ε_{123}, ε_{234}, ε_{124}.

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8 (см. Раздел II 5).

Назовем базисный вектор ε_{21} *основным* в связи с тем положением, которое он занимает в комплексном представлении. С алгебраической точки зрения направления ε_{13} и ε_{32} эквивалентны направлению ε_{21} и также могут быть приняты за основное. Для того, чтобы отличить эти случаи от предыдущего, будем обозначать мнимую единицу через j, если за основное направление принят вектор ε_{13}, и обозначать мнимую единицу через k, если за основное направление принят вектор ε_{32}. Указанное выделение базисных векторов, участвующих в комплексном представлении, оказывается существенным для описания фундаментальных частиц разных поколений. (См. Лекцию 5.)

3. Кватернионное представление контравариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\mathbb{C}_3$.

Кватернионное представление подалгебры $\mathbb{C}_3$ основано на разложении вектора:

$$\psi = (\varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^{0})\circ\varepsilon_0 + \\ (\varepsilon_{32}\,\psi^{1} + \varepsilon_{13}\,\psi^{2} + \varepsilon_{21}\,\psi^{3} + \varepsilon_0\,\psi^{123})\circ\varepsilon_{123}\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_3$ в виде произведения $\mathbb{C}_1\times\mathbb{C}_2$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_0\,,\quad \varepsilon_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_{32}\,,\quad \varepsilon_{13}\,,\quad \varepsilon_{21}\,,\quad \varepsilon_0\,.$$

Последняя алгебра является алгеброй кватернионов, так как

$$\operatorname{sign}\varepsilon_{32} = \operatorname{sign}\varepsilon_{13} = \operatorname{sign}\varepsilon_{21} = -1\,,\quad \operatorname{sign}\varepsilon_0 = 1\,.$$

Для базисных кватернионов используем следующие обозначения*

$$a\cdot I\,,\quad b\cdot I\,,\quad i\cdot 1\,,\quad 1\,.$$

Заменим базисные векторы ε_{32}, ε_{13}, ε_{21}, ε_0 кватернионами в соответствии

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{32}\sim a\,I\,, \\ \varepsilon_{13}\sim b\,I\,, \\ \varepsilon_{21}\sim i\,\mathbb{1}\,, \\ \varepsilon_{0}\sim 1\,\mathbb{1}\,. \end{array}$$

Получим вектор алгебры $\mathbb{C}_3$ в кватернионном представлении

$$\psi = (a\cdot I\,\psi^{32} + b\cdot I\,\psi^{13} + i\cdot 1\,\psi^{21} + \psi^{0})\circ\varepsilon_0 + \\ (a\cdot I\,\psi^{1} + b\cdot I\,\psi^{2} + i\cdot 1\,\psi^{3} + \psi^{123})\circ\varepsilon_{123}\,.$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты(компоненты) вектора являются кватернионами. Введем для них обозначение

*Этот выбор найдет обоснование в разделе IIIB.

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= a\,I\,\psi^{32} + b\,I\,\psi^{13} + i\,\psi^{21} + \psi^0\,,\\ \Psi^{123} &= a\,I\,\psi^1 \;\; + b\,I\,\psi^2 \;\; + i\,\psi^3 \;\; + \psi^{123}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0\,\varepsilon_0 + \Psi^{123}\,\varepsilon_{123}\,.$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_0, ε_{123}.

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2 (см. Раздел II 5).

2. алгебра $\mathbb{C}_4$.

Кватернионное представление алгебры $\mathbb{C}_4$ основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned}\psi = {} & (\varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0) \circ \varepsilon_0 + \\ & (\varepsilon_{32}\,\psi^{42} + \varepsilon_{13}\,\psi^{14} + \varepsilon_{21}\,\psi^{1324} + \varepsilon_0\,\psi^{34}) \circ \varepsilon_{34} + \\ & (\varepsilon_{32}\,\psi^{1} + \varepsilon_{13}\,\psi^{2} + \varepsilon_{21}\,\psi^{3} + \varepsilon_0\,\psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} + \\ & (\varepsilon_{32}\,\psi^{134} + \varepsilon_{13}\,\psi^{234} + \varepsilon_{21}\,\psi^{4} + \varepsilon_0\,\psi^{124}) \circ \varepsilon_{124}\,.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4$ в виде произведения $\mathbb{C}_2\times\mathbb{C}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_0\,,\quad \varepsilon_{34}\,,\quad \varepsilon_{123}\,,\quad \varepsilon_{124}\,;$$

базисными векторами другой алгебры $\mathbb{C}_2$ являются

$$\varepsilon_{32}\,,\quad \varepsilon_{13}\,,\quad \varepsilon_{21}\,,\quad \varepsilon_0\,.$$

Как и прежде заменяя базисные векторы ε_{32}, ε_{13},ε_{21}, ε_0 кватернионами, получим вектор алгебры $\mathbb{C}_4$ в кватернионном представлении

$$\begin{aligned}\psi = {} & (a\cdot I\,\psi^{32} + b\cdot I\,\psi^{13} + i\cdot 1\,\psi^{21} + \psi^0) \circ \varepsilon_0 + \\ & (a\cdot I\,\psi^{42} + b\cdot I\,\psi^{14} + i\cdot 1\,\psi^{1324} + \psi^{34}) \circ \varepsilon_{34} + \\ & (a\cdot I\,\psi^{1} + b\cdot I\,\psi^{2} + i\cdot 1\,\psi^{3} + \psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} + \\ & (a\cdot I\,\psi^{134} + b\cdot I\,\psi^{234} + i\cdot 1\,\psi^{4} + \psi^{124}) \circ \varepsilon_{124}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, в кватернионном представлении координаты (компоненты) вектора являются кватернионами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= a\,I\,\psi^{32} + b\,I\,\psi^{13} + i\,\psi^{21} + \psi^0\,,\\ \Psi^{34} &= a\,I\,\psi^{42} + b\,I\,\psi^{14} + i\,\psi^{1324} + \psi^{34}\,,\\ \Psi^{123} &= a\,I\,\psi^{1} + b\,I\,\psi^{2} + i\,\psi^{3} + \psi^{123}\,,\\ \Psi^{124} &= a\,I\,\psi^{134} + b\,I\,\psi^{234} + i\,\psi^{4} + \psi^{124}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0\,\varepsilon_0 + \Psi^{34}\,\varepsilon_{34} + \Psi^{123}\,\varepsilon_{123} + \Psi^{124}\,\varepsilon_{124}\,.$$

Отсюда видно, что в кватернионном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_0, ε_{34}, ε_{123}, ε_{124}.

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 4×4 (см. Раздел II 5).

4. Бикватернионное представление контравариантной алгебры Клиффорда.

1. подалгебра $\mathbb{C}_3$.

Назовем бикватернионами числа вида

$$\begin{aligned}b_0\cdot\alpha^0 + b_1\cdot\alpha^1 + b_2\cdot\alpha^2 + b_3\cdot\alpha^3 + \\ b_4\cdot\alpha^4 + b_5\cdot\alpha^5 + b_6\cdot\alpha^6 + b_7\cdot\alpha^7\,,\end{aligned}$$

где α^0, α^1, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6, α^7 –действительные числа, а b_0, b_1, b_2, b_3, b_0, b_1, b_2, b_3 – базисные бикватернионы, для которых выполняются следующие правила умножения

$$\begin{aligned}& b_i\circ b_i = b_0\,, && i = 0\,,4\,,5\,,6\,,\\ & b_k\circ b_k = -b_0\,, && k = 1\,,2\,,3\,,7\,,\\ & b_i\circ b_k = -b_k\circ b_i\,, && i\neq k\,,i\,,k\neq 0\,,\neq 7\,,\\ & b_i\circ b_k = b_k\circ b_i\,, && k = 0\,,7\,.\end{aligned}$$

Обратимся снова к вектору алгебры $\mathbb{C}_3$

$$\begin{aligned}\psi = \varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0 + \\ \varepsilon_1\,\psi^1 + \varepsilon_2\,\psi^2 + \varepsilon_3\,\psi^3 + \varepsilon_{123}\,\psi^{123}\,.\end{aligned}$$

Базисные векторы

$$\varepsilon_{32}\,,\varepsilon_{13}\,,\varepsilon_{21}\,,\varepsilon_0\,,\varepsilon_1\,,\varepsilon_2\,,\varepsilon_3\,,\varepsilon_{123}\,.$$

можно рассматривать как базисные бикватернионы. Для этого случая мы будем пользоваться переобозначением

$$\begin{aligned}\varepsilon_{32}\sim b_{32}\,,\;\; \varepsilon_{13}\sim b_{13}\,,\;\; \varepsilon_{21}\sim b_{21}\,,\quad \varepsilon_0\sim b_0\,,\\ \varepsilon_1\sim b_1\,,\quad \varepsilon_2\sim b_2\,,\quad \varepsilon_3\sim b_3\,,\quad \varepsilon_{123}\sim b_{123}\,.\end{aligned}$$

2. алгебра $\mathbb{C}_4$.

Биватернионное представление алгебры $\mathbb{C}_4$ основано на разложении вектора:

$$\begin{aligned}\psi = {} & (\varepsilon_{32}\,\psi^{32} + \varepsilon_{13}\,\psi^{13} + \varepsilon_{21}\,\psi^{21} + \varepsilon_0\,\psi^0 + \\ & \quad \varepsilon_1\,\psi^1 + \varepsilon_2\,\psi^2 + \varepsilon_3\,\psi^3 + \varepsilon_{123}\,\psi^{123}) \circ \varepsilon_0 + \\ & (\varepsilon_{32}\,\psi^{42} + \varepsilon_{13}\,\psi^{14} + \varepsilon_{21}\,\psi^{1324} + \varepsilon_0\,\psi^{34} + \\ & \quad \varepsilon_1\,\psi^{134} + \varepsilon_2\,\psi^{234} + \varepsilon_3\,\psi^4 + \varepsilon_{123}\,\psi^{124}) \circ \varepsilon_{34}\,.\end{aligned}$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{C}_4$ в виде произведения $\mathbb{C}_1\times\mathbb{C}_3$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_1$ являются

$$\varepsilon_0\,,\quad \varepsilon_{34}\,,$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{C}_3$ являются

$$\varepsilon_{32}\,,\varepsilon_{13}\,,\varepsilon_{21}\,,\varepsilon_0\,,\varepsilon_1\,,\varepsilon_2\,,\varepsilon_3\,,\varepsilon_{123}\,.$$

Заменяя эти базисные векторы базисными бикватернионами, получим вектор алгебры $\mathbb{C}_3$ в бикватернионном представлении

$$\begin{aligned}\psi = (&b_{32}\,\psi^{32} + b_{13}\,\psi^{13} + b_{21}\,\psi^{21} + b_0\,\psi^0 + \\ &\quad b_1\,\psi^1 + b_2\,\psi^2 + b_3\,\psi^3 + b_{123}\,\psi^{123}) \circ \varepsilon_0 + \\ (&b_{32}\,\psi^{42} + b_{13}\,\psi^{14} + b_{21}\,\psi^{1324} + b_0\,\psi^{34} + \\ &\quad b_1\,\psi^{134} + b_2\,\psi^{234} + b_3\,\psi^4 + b_{123}\,\psi^{124}) \circ \varepsilon_{34}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, в бикватернионном представлении координаты (компоненты) вектора являются бикватернионами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\Psi^0 &= b_{32}\,\psi^{32} + b_{13}\,\psi^{13} + b_{21}\,\psi^{21} + b_0\,\psi^0 \\ &\quad + b_1\,\psi^1 + b_2\,\psi^2 + b_3\,\psi^3 + b_{123}\,\psi^{123}\,, \\ \Psi^{34} &= b_{32}\,\psi^{42} + b_{13}\,\psi^{14} + b_{21}\,\psi^{1324} + b_0\,\psi^{34} \\ &\quad + b_1\,\psi^{134} + b_2\,\psi^{234} + b_3\,\psi^4 + b_{123}\,\psi^{124}\,.\end{aligned} \tag{8}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0\,\varepsilon_0 + \Psi^{34}\,\varepsilon_{34}\,.$$

Отсюда видно, что в бикватернионном представлении вектор ψ проецируется на направления ε_0, ε_{34}.

5. Структурные матрицы контравариантной алгебры Клиффорда.

Приведем структурные матрицы алгебры Клиффорда, которые реализуют регулярное представление базисных векторов:

$$\varepsilon_I \sim C^L{}_{KI}\,.$$

При преобразовании матриц $C^L{}_{KI}$ от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad a = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad b = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

Алгебра системы чисел $\{\mathit{1}, a, b, i\}$ представлена законами умножения:

$$\begin{gathered} a^2 = b^2 = \mathit{1}\,, \qquad i^2 = -\mathit{1}\,, \qquad a\,b = -b\,a = i\,, \\ a\,i = -i\,a = b\,, \qquad i\,b = -b\,i = a\,. \end{gathered}$$

При преобразовании матриц $C^L{}_{KI}$ от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad I = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

1. Подалгебра $\mathbb{C}_3$

$$\varepsilon_0 \sim \begin{array}{r|rrrr|rrrr|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & 1 &&&&&&& \\ 13 && 1 &&&&&& \\ 21 &&& 1 &&&&& \\ 0 &&&& 1 &&&& \\ \hline 1 &&&&& 1 &&& \\ 2 &&&&&& 1 && \\ 3 &&&&&&& 1 & \\ 123 &&&&&&&& 1 \\ \hline \end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|rr|rr|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline 1 &&&& 13 \\ & 1 &&& 0 \\ \hline && 1 && 2 \\ &&& 1 & 123 \\ \hline \end{array} = \mathit{1} \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon_1 \sim \begin{array}{r|rrrr|rrrr|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&&&& -1 \\ 13 &&&&&&& -1 & \\ 21 &&&&&& 1 && \\ 0 &&&&& 1 &&& \\ \hline 1 &&&& 1 &&&& \\ 2 &&& 1 &&&&& \\ 3 && -1 &&&&&& \\ 123 & -1 &&&&&&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|rr|rr|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&& -1 & 13 \\ && 1 && 0 \\ \hline & 1 &&& 2 \\ -1 &&&& 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & -I & 0 \\ \hline I & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon_2 \sim \begin{array}{r|rrrr|rrrr|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&&& 1 & \\ 13 &&&&&&&& -1 \\ 21 &&&&& -1 &&& \\ 0 &&&&&& 1 && \\ \hline 1 &&& -1 &&&&& \\ 2 &&&& 1 &&&& \\ 3 & 1 &&&&&&& \\ 123 && -1 &&&&&& \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|rr|rr|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline &&& -1 & 13 \\ && 1 && 0 \\ \hline & 1 &&& 2 \\ -1 &&&& 123 \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & -I & 0 \\ \hline I & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon_3 \sim \begin{array}{r|rrrr|rrrr|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&& -1 && \\ 13 &&&&& 1 &&& \\ 21 &&&&&&&& -1 \\ 0 &&&&&&& 1 & \\ \hline 1 && 1 &&&&&& \\ 2 & -1 &&&&&&& \\ 3 &&&& 1 &&&& \\ 123 &&& -1 &&&&& \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|rr|rr|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline && -1 && 13 \\ &&& -1 & 0 \\ \hline 1 &&&& 2 \\ & 1 &&& 123 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline \mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon_{21} \sim \begin{array}{r|rrrr|rrrr|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 52 && 1 &&&&&& \\ 13 & -1 &&&&&&& \\ 21 &&&& 1 &&&& \\ 0 &&& -1 &&&&& \\ \hline 1 &&&&&& 1 && \\ 2 &&&&& -1 &&& \\ 3 &&&&&&&& 1 \\ 123 &&&&&&& -1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|rr|rr|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline 1 &&&& 13 \\ & 1 &&& 0 \\ \hline && 1 && 2 \\ &&& 1 & 123 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon_{13} \sim \begin{array}{r|rrrr|rrrr|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&& -1 &&&&& \\ 13 &&&& 1 &&&& \\ 21 & 1 &&&&&&& \\ 0 && -1 &&&&&& \\ \hline 1 &&&&&&& -1 & \\ 2 &&&&&&&& 1 \\ 3 &&&&& 1 &&& \\ 123 &&&&&& -1 && \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|rr|rr|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline & 1 &&& 13 \\ -1 &&&& 0 \\ \hline &&& 1 & 2 \\ && -1 && 123 \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline I & & 0 \\ \hline & I & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\varepsilon_{32} \sim \begin{array}{r|rrrr|rrrr|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&& 1 &&&& \\ 13 &&& 1 &&&&& \\ 21 && -1 &&&&&& \\ 0 & -1 &&&&&&& \\ \hline 1 &&&&&&&& 1 \\ 2 &&&&&&& 1 & \\ 3 &&&&&& -1 && \\ 123 &&&&& -1 &&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|rr|rr|l} 13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline & 1 &&& 13 \\ -1 &&&& 0 \\ \hline &&& 1 & 2 \\ && -1 && 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|l} 0 & 123 & \\ \hline I & & 0 \\ \hline & I & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$
\varepsilon_{123} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 &&&&&-1 \\
13 &&&&&&-1 \\
21 &&&&&&&-1 \\
0 &&&&&&&&-1 \\ \hline
1 &1 \\
2 &&1 \\
3 &&&1 \\
123 &&&&1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 13 & 0 & 2 & 123 \\ \hline
13 &&&-1 \\
0 &&&&-1 \\ \hline
2 &1 \\
123 &&1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{r|c|c|}
 & 0 & 123 \\ \hline
0 & & -\mathbb{1} \\ \hline
123 & \mathbb{1} & \\ \hline
\end{array}
$$

2. *Алгебра* $\mathbb{C}_4$

$$
\varepsilon_0 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &1 \\
13 &&1 \\
21 &&&1 \\
0 &&&&1 \\ \hline
42 &&&&&1 \\
14 &&&&&&1 \\
1324 &&&&&&&1 \\
34 &&&&&&&&1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&1 \\
2 &&&&&&&&&&1 \\
3 &&&&&&&&&&&1 \\
123 &&&&&&&&&&&&1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&&1 \\
234 &&&&&&&&&&&&&&1 \\
4 &&&&&&&&&&&&&&&1 \\
124 &&&&&&&&&&&&&&&&1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &1 \\
0 &&1 \\
14 &&&1 \\
34 &&&&1 \\ \hline
2 &&&&&1 \\
123 &&&&&&1 \\
234 &&&&&&&1 \\
124 &&&&&&&&1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & \mathbb{1} \\
34 && \mathbb{1} \\ \hline
123 &&& \mathbb{1} \\
124 &&&& \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_1 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&-1 \\
13 &&&&&&&&&&&-1 \\
21 &&&&&&&&&&1 \\
0 &&&&&&&&&1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&&&-1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&&&-1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&1 \\ \hline
1 &&&&1 \\
2 &&&1 \\
3 &&-1 \\
123 &-1 \\ \hline
134 &&&&&&&&1 \\
234 &&&&&&&1 \\
4 &&&&&&-1 \\
124 &&&&&-1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&-1 \\
0 &&&&&1 \\
14 &&&&&&&&-1 \\
34 &&&&&&&1 \\ \hline
2 &&1 \\
123 &-1 \\
234 &&&&1 \\
124 &&&-1 \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& -I \\
34 &&&& -I \\ \hline
123 & I \\
124 && I \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_2 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&1 \\
13 &&&&&&&&&&&&-1 \\
21 &&&&&&&&&-1 \\
0 &&&&&&&&&&1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&&1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&&&&-1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&-1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&1 \\ \hline
1 &&&-1 \\
2 &&&&1 \\
3 &1 \\
123 &&-1 \\ \hline
134 &&&&&&&-1 \\
234 &&&&&&&&1 \\
4 &&&&&1 \\
124 &&&&&&-1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&-1 \\
0 &&&&&1 \\
14 &&&&&&&&-1 \\
34 &&&&&&&1 \\ \hline
2 &&1 \\
123 &-1 \\
234 &&&&1 \\
124 &&&-1 \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& -I \\
34 &&&& -I \\ \hline
123 & I \\
124 && I \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_3 \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&-1 \\
13 &&&&&&&&&1 \\
21 &&&&&&&&&&&&-1 \\
0 &&&&&&&&&&&1 \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&&&1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&-1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&&&1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&&-1 \\ \hline
1 &&1 \\
2 &-1 \\
3 &&&&1 \\
123 &&&-1 \\ \hline
134 &&&&&&-1 \\
234 &&&&&1 \\
4 &&&&&&&&-1 \\
124 &&&&&&&1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&-1 \\
0 &&&&&&-1 \\
14 &&&&&&&1 \\
34 &&&&&&&&1 \\ \hline
2 &1 \\
123 &&1 \\
234 &&&-1 \\
124 &&&&-1 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& -\mathbb{1} \\
34 &&&& \mathbb{1} \\ \hline
123 & \mathbb{1} \\
124 && -\mathbb{1} \\ \hline
\end{array}
$$

$$\varepsilon_4 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
13 & &&& & &&& & &&& & -1&&& \\
21 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\
0 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\ \hline
42 & &&& & &&& & &-1&& & &&& \\
14 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\
1324 & &&& & &&& & &&&-1 & &&& \\
34 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &-1&& & &&& & &&& \\
2 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\
3 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\
123 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\ \hline
134 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
234 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\
4 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
124 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \ i \ \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & &&& & &&1& \\
0 & &&& & &&&1 \\
14 & &&& & -1&&& \\
34 & &&& & &-1&& \\ \hline
2 & &&-1& & &&& \\
123 & &&&-1 & &&& \\
234 & 1&&& & &&& \\
124 & &1&& & &&& \\ \hline
\end{array} \ = \ i \ \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & & & \mathbb{1} \\
34 & & & -\mathbb{1} & \\ \hline
123 & & -\mathbb{1} & & \\
124 & \mathbb{1} & & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\
13 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
21 & 1&&& & &&& & &&& & &&& \\
0 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &&1& & &&& & &&& \\
14 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\
1324 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\
34 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&& & &&-1& & &&& \\
2 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\
3 & &&& & &&& & 1&&& & &&& \\
123 & &&& & &&& & &-1&& & &&& \\ \hline
134 & &&& & &&& & &&& & &&1& \\
234 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
4 & &&& & &&& & &&& & -1&&& \\
124 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \ b \ \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & &1&& & &&& \\
0 & -1&&& & &&& \\
14 & &&&-1 & &&& \\
34 & &&1& & &&& \\ \hline
2 & &&& & &1&& \\
123 & &&& & -1&&& \\
234 & &&& & &&&-1 \\
124 & &&& & &&1& \\ \hline
\end{array} \ = \ b \ \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & I & & & \\
34 & & -I & & \\ \hline
123 & & & I & \\
124 & & & & -I \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &1&& & &&& & &&& & &&& \\
13 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\
21 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
0 & &&-1& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
14 & &&& & -1&&& & &&& & &&& \\
1324 & &&& & &&&1 & &&& & &&& \\
34 & &&& & &&-1& & &&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&& & &1&& & &&& \\
2 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\
3 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\
123 & &&& & &&& & &&-1& & &&& \\ \hline
134 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
234 & &&& & &&& & &&& & -1&&& \\
4 & &&& & &&& & &&& & &&&1 \\
124 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \ i \ \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & 1&&& & &&& \\
0 & &1&& & &&& \\
14 & &&1& & &&& \\
34 & &&&1 & &&& \\ \hline
2 & &&& & 1&&& \\
123 & &&& & &1&& \\
234 & &&& & &&1& \\
124 & &&& & &&&1 \\ \hline
\end{array} \ = \ i \ \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & \mathbb{1} & & & \\
34 & & \mathbb{1} & & \\ \hline
123 & & & \mathbb{1} & \\
124 & & & & \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&&1 & &&& & &&& & &&& \\
13 & &&1& & &&& & &&& & &&& \\
21 & &-1&& & &&& & &&& & &&& \\
0 & -1&&& & &&& & &&& & &&& \\ \hline
42 & &&& & &&&-1 & &&& & &&& \\
14 & &&& & &&-1& & &&& & &&& \\
1324 & &&& & &1&& & &&& & &&& \\
34 & &&& & 1&&& & &&& & &&& \\ \hline
1 & &&& & &&& & &&&1 & &&& \\
2 & &&& & &&& & &&1& & &&& \\
3 & &&& & &&& & &-1&& & &&& \\
123 & &&& & &&& & -1&&& & &&& \\ \hline
134 & &&& & &&& & &&& & &&&-1 \\
234 & &&& & &&& & &&& & &&-1& \\
4 & &&& & &&& & &&& & &1&& \\
124 & &&& & &&& & &&& & 1&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= \ a \ \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & &1&& & &&& \\
0 & -1&&& & &&& \\
14 & &&&-1 & &&& \\
34 & &&1& & &&& \\ \hline
2 & &&& & &1&& \\
123 & &&& & -1&&& \\
234 & &&& & &&&-1 \\
124 & &&& & &&1& \\ \hline
\end{array} \ = \ a \ \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & I & & & \\
34 & & -I & & \\ \hline
123 & & & I & \\
124 & & & & -I \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{14} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
13 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
21 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
0 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\
14 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
1324 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
34 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
2 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
3 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
123 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\ \hline
134 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\
234 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
4 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
124 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= b \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& -1 &&&&& 13 \\
&& 1 &&&&&& 0 \\
& 1 &&&&&&& 14 \\
-1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& -1 & 2 \\
&&&&&& 1 && 123 \\
&&&&& 1 &&& 234 \\
&&&& -1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -I & & & 0 \\
I & & & & 34 \\ \hline
 & & & -I & 123 \\
 & & I & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{34} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
13 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
0 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
42 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
14 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
34 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
2 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
3 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
123 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
134 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
234 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
124 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&& 1 &&&&&& 13 \\
&&& 1 &&&&& 0 \\
1 &&&&&&&& 14 \\
& 1 &&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&& 1 && 2 \\
&&&&&&& 1 & 123 \\
&&&& 1 &&&& 234 \\
&&&&& 1 &&& 124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & & & 0 \\
\mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline
 & & & \mathbb{1} & 123 \\
 & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{42} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\
13 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
21 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
0 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
14 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
1324 && -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
34 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\
3 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
123 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
234 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
4 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
124 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= a \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& -1 &&&&& 13 \\
&& 1 &&&&&& 0 \\
& 1 &&&&&&& 14 \\
-1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& -1 & 2 \\
&&&&&& 1 && 123 \\
&&&&& 1 &&& 234 \\
&&&& -1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & -I & & & 0 \\
I & & & & 34 \\ \hline
 & & & -I & 123 \\
 & & I & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{123} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
13 &&&&&&&&&& -1 &&&&&& \\
21 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\
0 &&&&&&&&&&&& -1 &&&& \\ \hline
42 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
14 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
34 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
1 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
2 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
3 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
123 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
134 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
234 &&&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
4 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\
124 &&&&&&&& -1 &&&&&&&& \\ \hline
\end{array}$$

$$= 1 \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&&& -1 &&&& 13 \\
&&&&& -1 &&& 0 \\
&&&&&& 1 && 14 \\
&&&&&&& 1 & 34 \\ \hline
1 &&&&&&&& 2 \\
& 1 &&&&&&& 123 \\
&& -1 &&&&&& 234 \\
&&& -1 &&&&& 124 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & -\mathbb{1} & & 0 \\
 & & & \mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 123 \\
 & -\mathbb{1} & & & 124 \\ \hline
\end{array}$$

$$
\varepsilon_{124} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\
13 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
21 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
0 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\ \hline
42 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
14 &&&& &&&& && -1 &&&& && \\
1324 &&&& &&&& &&& -1 &&&& & \\
34 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\ \hline
1 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\
2 &&&& && -1 &&&& &&&& && \\
3 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
123 &&&& &&&& -1 &&&& &&&& \\ \hline
134 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
234 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
4 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\
124 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&& &&& 1 & \\
0 &&&& &&&& 1 \\
14 &&&& & -1 &&& \\
34 &&&& && -1 && \\ \hline
2 &&& -1 & &&&& \\
123 &&&& -1 &&&& \\
234 & 1 &&& &&&& \\
124 && 1 && &&&& \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& \mathbb{1} \\
34 &&& -\mathbb{1} & \\ \hline
123 && -\mathbb{1} && \\
124 & \mathbb{1} &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_{234} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& &&& 1 & \\
13 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
21 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
0 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\ \hline
42 &&&& &&&& &&& 1 &&&& & \\
14 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
1324 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
34 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\ \hline
1 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\
2 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
3 &&&& & 1 &&&& &&&& &&& \\
123 &&&& && -1 &&&& &&&& && \\ \hline
134 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\
234 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
4 & 1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
124 && -1 &&&& &&&& &&&& && \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= b
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&& &&&& -1 \\
0 &&&& &&& 1 & \\
14 &&&& && -1 && \\
34 &&&& & 1 &&& \\ \hline
2 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 & &&&& \\
234 && 1 && &&&& \\
124 & -1 &&& &&&& \\ \hline
\end{array}
= b
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& -I \\
34 &&& -I & \\ \hline
123 && I && \\
124 & I &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_{134} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& &&&& &&&& &&&& -1 \\
13 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\
21 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
0 &&&& &&&& &&&& & 1 &&& \\ \hline
42 &&&& &&&& &&&& -1 &&&& \\
14 &&&& &&&& &&& -1 &&&& & \\
1324 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\
34 &&&& &&&& & 1 &&&& &&& \\ \hline
1 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
2 &&&& &&& 1 &&&& &&&& & \\
3 &&&& && -1 &&&& &&&& && \\
123 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\ \hline
134 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
234 &&& 1 &&&& &&&& &&&& & \\
4 && -1 &&&& &&&& &&&& && \\
124 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= a
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&& &&&& -1 \\
0 &&&& &&& 1 & \\
14 &&&& && -1 && \\
34 &&&& & 1 &&& \\ \hline
2 &&&& 1 &&&& \\
123 &&& -1 & &&&& \\
234 && 1 && &&&& \\
124 & -1 &&& &&&& \\ \hline
\end{array}
= a
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& -I \\
34 &&& -I & \\ \hline
123 && I && \\
124 & I &&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\varepsilon_{1324} \sim
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&& && 1 &&&& &&&& && \\
13 &&&& & -1 &&&& &&&& &&& \\
21 &&&& &&&& 1 &&&& &&&& \\
0 &&&& &&& -1 &&&& &&&& & \\ \hline
42 && 1 &&&& &&&& &&&& && \\
14 & -1 &&&& &&&& &&&& &&& \\
1324 &&&& 1 &&&& &&&& &&&& \\
34 &&& -1 &&&& &&&& &&&& & \\ \hline
1 &&&& &&&& &&&& && 1 && \\
2 &&&& &&&& &&&& & -1 &&& \\
3 &&&& &&&& &&&& &&&& 1 \\
123 &&&& &&&& &&&& &&& -1 & \\ \hline
134 &&&& &&&& && 1 &&&& && \\
234 &&&& &&&& & -1 &&&& &&& \\
4 &&&& &&&& &&&& 1 &&&& \\
124 &&&& &&&& &&& -1 &&&& & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&& 1 & &&&& \\
0 &&&& 1 &&&& \\
14 & 1 &&& &&&& \\
34 && 1 && &&&& \\ \hline
2 &&&& &&& 1 & \\
123 &&&& &&&& 1 \\
234 &&&& & 1 &&& \\
124 &&&& && 1 && \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 && \mathbb{1} && \\
34 & \mathbb{1} &&& \\ \hline
123 &&&& \mathbb{1} \\
124 &&& \mathbb{1} & \\ \hline
\end{array}
$$

Мы получили структурные матрицы алгебры Клиффорда $\mathbb{C}$ по такому же алгоритму, по которому в Лекции 3 были выведены матрицы Дирака. Но эти матрицы существенно отличаются от матриц Дирака. В дальнейшем мы дадим физическое толкование полученным матрицам. Пока лишь заметим, что с проекциями вектора действия на направления базисных векторов ε_I связан ряд свойств элементарных частиц, и обратим внимание только на матрицу, представляющую базисный вектор ε_{21}. В комплексном представлении эта матрица имеет вид

$$C^L{}_{K(21)} = i \cdot \delta^L{}_K \,.$$

Необходимость в получении такой матрицы была всегда. Дело в том, что в теории Дирака матрица такого вида вводится волевым путем (то есть без обоснования) для описания поведения электрона в электромагнитном поле. В этой Лекции мы используем матрицу $C^L{}_{K(21)}$ для получения квантовых постулатов в теории Шредингера.

III. СЖАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

В этом разделе рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-k}$, где $k < n$. Для примера рассмотрим сжатое представление базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-1}$. Разобьем базисные векторы ε_I алгебры $\mathbb{C}_n$ на две группы ε_{I_1} и ε_{I_2} с одинаковым числом векторов так, чтобы векторы ε_{I_1} образовывали алгебру $\mathbb{C}_{n-1}$. В силу симметрий алгебры Клиффорда соотношения (1) имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{K_1} \circ \varepsilon_{I_1} &= \varepsilon_{L_1} \cdot C^{L_1}{}_{K_1 I_1} \,, & (9)\\
\varepsilon_{K_1} \circ \varepsilon_{I_2} &= \varepsilon_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_1 I_2} \,, & (10)\\
\varepsilon_{K_2} \circ \varepsilon_{I_1} &= \varepsilon_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_2 I_1} \,, &\\
\varepsilon_{K_2} \circ \varepsilon_{I_2} &= \varepsilon_{L_1} \cdot C^{L_1}{}_{K_2 I_2} \,. &
\end{aligned}$$

Будем полагать, что приближенно при вычислении матриц представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n$ в алгебре $\mathbb{C}_{n-1}$ базисные векторы ε_{L_2} в правой части уравнения (10) можно заменить на базисные векторы ε_{L_1} с помощью соотношения

$$\varepsilon_{L_2} = \varepsilon_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2} \,, \tag{11}$$

где $P^{L_1}{}_{L_2}$ есть матрица соответствий. Тогда соотношение (10) принимает вид:

$$\varepsilon_{K_1} \circ \varepsilon_{I_2} = \varepsilon_{L_1} \cdot P^{L_1}{}_{L_2} \cdot C^{L_2}{}_{K_1 I_2} \,. \tag{12}$$

Соотношения (9) и (12) позволяют получить матрицы представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-1}$, причем базисные векторы подалгебры $\mathbb{C}_{n-1}$ представляются точно, а остальные базисные векторы – приближенно.

Аналогичным образом можно рассмотреть сжатое представление базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_n$ в ее подалгебре $\mathbb{C}_{n-k}$, где $k < n$.

1. Первое сжатое представление.

Рассмотрим первое сжатое представление

$$R_1 : \mathbb{C}_4 \to \mathbb{C}_3 \,\{\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{123}\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (12) соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами

$$42, 14, 1324, 34, 134, 234, 4, 124$$

заменяются на базисные векторы с индексами

$$32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123$$

соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ понижается вдвое и равна 8×8 в действительном представлении, 4×4 в комплексном представлении и $2{\times}2$ в кватернионном представлении.

В результате получим следующие структурные матрицы, соответствующие первому сжатому представлению базисных векторов алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$ в алгебре $\mathbb{C}_3$

$$\varepsilon_0 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
\mathit{42} & 32 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{14} & 13 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{124} & 123 & & & & & & & & 1\\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\; \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13\\
 & 1 & & & 0\\ \hline
 & & 1 & & 2\\
 & & & 1 & 123\\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}\; \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0\\ \hline
 & \mathbb{1} & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_1 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & & & -1\\
\mathit{14} & 13 & & & & & & & -1 & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & 1 & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & 1 & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & -1 & & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= a\; \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -1 & 13\\
 & & 1 & & 0\\ \hline
 & 1 & & & 2\\
-1 & & & & 123\\ \hline
\end{array}
= a\; \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0\\ \hline
I & & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_2 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & & 1 & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & & & & -1\\
\mathit{1324} & 21 & & & & & -1 & & & \\
\mathit{34} & 0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & & -1 & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{4} & 3 & 1 & & & & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
= b\; \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -i & 13\\
 & & i & & 0\\ \hline
 & i & & & 2\\
-i & & & & 123\\ \hline
\end{array}
= b\; \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0\\ \hline
I & & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_3 \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
\mathit{42} & 32 & & & & & & -1 & & \\
\mathit{14} & 13 & & & & & 1 & & & \\
\mathit{1324} & 21 & & & & & & & & -1\\
\mathit{34} & 0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
\mathit{134} & 1 & & 1 & & & & & & \\
\mathit{234} & 2 & -1 & & & & & & & \\
\mathit{4} & 3 & & & & 1 & & & & \\
\mathit{124} & 123 & & & -1 & & & & & \\ \hline
\end{array}
= i\; \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & -1 & & 13\\
 & & & -1 & 0\\ \hline
1 & & & & 2\\
 & 1 & & & 123\\ \hline
\end{array}
= i\; \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0\\ \hline
I & & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{4} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&&&&-1&& \\
\mathit{14} & 13 & &&&&1&&& \\
\mathit{1324} & 21 & &&&&&&&-1 \\
\mathit{34} & 0 & &&&&&&1& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &1&&&&&& \\
\mathit{234} & 2 & -1&&&&&&& \\
\mathit{4} & 3 & &&&1&&&& \\
\mathit{124} & 123 & &&-1&&&&& \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&-1&& & 13 \\
&&-1& & 0 \\ \hline
1&&& & 2 \\
&1&& & 123 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{21} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &1&&&&&& \\
\mathit{14} & 13 & -1&&&&&&& \\
\mathit{1324} & 21 & &&&1&&&& \\
\mathit{34} & 0 & &&-1&&&&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&&&&1&& \\
\mathit{234} & 2 & &&&&-1&&& \\
\mathit{4} & 3 & &&&&&&&1 \\
\mathit{124} & 123 & &&&&&&-1& \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1&&& & 13 \\
&1&& & 0 \\ \hline
&&1& & 2 \\
&&&1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{13} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&-1&&&&& \\
\mathit{14} & 13 & &&&1&&&& \\
\mathit{1324} & 21 & 1&&&&&&& \\
\mathit{34} & 0 & &-1&&&&&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&&&&&-1& \\
\mathit{234} & 2 & &&&&&&&1 \\
\mathit{4} & 3 & &&&&1&&& \\
\mathit{124} & 123 & &&&&&-1&& \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&i&& & 13 \\
-i&&& & 0 \\ \hline
&&&i & 2 \\
&&-i& & 123 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{32} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&&1&&&& \\
\mathit{14} & 13 & &&1&&&&& \\
\mathit{1324} & 21 & &-1&&&&&& \\
\mathit{34} & 0 & -1&&&&&&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&&&&&&1 \\
\mathit{234} & 2 & &&&&&&1& \\
\mathit{4} & 3 & &&&&&-1&& \\
\mathit{124} & 123 & &&&&-1&&& \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&1&& & 13 \\
-1&&& & 0 \\ \hline
&&&1 & 2 \\
&&-1& & 123 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{14} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&-1&&&&& \\
\mathit{14} & 13 & &&&1&&&& \\
\mathit{1324} & 21 & 1&&&&&&& \\
\mathit{34} & 0 & &-1&&&&&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&&&&&-1& \\
\mathit{234} & 2 & &&&&&&&1 \\
\mathit{4} & 3 & &&&&1&&& \\
\mathit{124} & 123 & &&&&&-1&& \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&1&& & 13 \\
-1&&& & 0 \\ \hline
&&&1 & 2 \\
&&-1& & 123 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{42} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&&1&&&& \\
\mathit{14} & 13 & &&1&&&&& \\
\mathit{1324} & 21 & &-1&&&&&& \\
\mathit{34} & 0 & -1&&&&&&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&&&&&&1 \\
\mathit{234} & 2 & &&&&&&1& \\
\mathit{4} & 3 & &&&&&-1&& \\
\mathit{124} & 123 & &&&&-1&&& \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&i&& & 13 \\
-i&&& & 0 \\ \hline
&&&i & 2 \\
&&-i& & 123 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{34} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & 1&&&&&&& \\
\mathit{14} & 13 & &1&&&&&& \\
\mathit{1324} & 21 & &&1&&&&& \\
\mathit{34} & 0 & &&&1&&&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&&&1&&& \\
\mathit{234} & 2 & &&&&&1&& \\
\mathit{4} & 3 & &&&&&&1& \\
\mathit{124} & 123 & &&&&&&&1 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1&&& & 13 \\
&1&& & 0 \\ \hline
&&1& & 2 \\
&&&1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{123} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&&&-1&&& \\
\mathit{14} & 13 & &&&&&-1&& \\
\mathit{1324} & 21 & &&&&&&-1& \\
\mathit{34} & 0 & &&&&&&&-1 \\ \hline
\mathit{134} & 1 & 1&&&&&&& \\
\mathit{234} & 2 & &1&&&&&& \\
\mathit{4} & 3 & &&1&&&&& \\
\mathit{124} & 123 & &&&1&&&& \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&&-1& & 13 \\
&&&-1 & 0 \\ \hline
1&&& & 2 \\
&1&& & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{124} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&&&-1&&& \\
\mathit{14} & 13 & &&&&&-1&& \\
\mathit{1324} & 21 & &&&&&&-1& \\
\mathit{34} & 0 & &&&&&&&-1 \\ \hline
\mathit{134} & 1 & 1&&&&&&& \\
\mathit{234} & 2 & &1&&&&&& \\
\mathit{4} & 3 & &&1&&&&& \\
\mathit{124} & 123 & &&&1&&&& \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&&-1& & 13 \\
&&&-1 & 0 \\ \hline
1&&& & 2 \\
&1&& & 123 \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1} \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{134} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&&&&&&-1 \\
\mathit{14} & 13 & &&&&&&-1& \\
\mathit{1324} & 21 & &&&&&1&& \\
\mathit{34} & 0 & &&&&1&&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&&1&&&& \\
\mathit{234} & 2 & &&1&&&&& \\
\mathit{4} & 3 & &-1&&&&&& \\
\mathit{124} & 123 & -1&&&&&&& \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&&&-i & 13 \\
&&i& & 0 \\ \hline
&i&& & 2 \\
-i&&& & 123 \\ \hline
\end{array}
= a \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{234} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &&&&&&1& \\
\mathit{14} & 13 & &&&&&&&-1 \\
\mathit{1324} & 21 & &&&&-1&&& \\
\mathit{34} & 0 & &&&&&1&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&-1&&&&& \\
\mathit{234} & 2 & &&&1&&&& \\
\mathit{4} & 3 & 1&&&&&&& \\
\mathit{124} & 123 & &-1&&&&&& \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&&&-1 & 13 \\
&&1& & 0 \\ \hline
&1&& & 2 \\
-1&&& & 123 \\ \hline
\end{array}
= b \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\varepsilon_{1324} \sim \begin{array}{cc|cccc|cccc|}
 & & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
\mathit{42} & 32 & &1&&&&&& \\
\mathit{14} & 13 & -1&&&&&&& \\
\mathit{1324} & 21 & &&&1&&&& \\
\mathit{34} & 0 & &&-1&&&&& \\ \hline
\mathit{134} & 1 & &&&&&1&& \\
\mathit{234} & 2 & &&&&-1&&& \\
\mathit{4} & 3 & &&&&&&&1 \\
\mathit{124} & 123 & &&&&&&-1& \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1&&& & 13 \\
&1&& & 0 \\ \hline
&&1& & 2 \\
&&&1 & 123 \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

Сделаем замечание, которое в Лекции 9 будет использовано при построении уравнения, обобщающего уравнение Дирака. В первом сжатом представлении восемь структурных матриц алгебры $\mathbb{C}$, соответствующих базисным векторам

$$\varepsilon_{34}, \quad \varepsilon_{134}, \quad \varepsilon_{234}, \quad \varepsilon_{4}, \quad \varepsilon_{1324}, \quad \varepsilon_{14}, \quad \varepsilon_{42}, \quad \varepsilon_{124},$$

отождествляются с матрицами, соответствующими базисным векторам

$$\varepsilon_{0}, \quad \varepsilon_{1}, \quad \varepsilon_{2}, \quad \varepsilon_{3}, \quad \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{32}, \quad \varepsilon_{123}.$$

Представление первых восьми матриц является неточным вплоть до того, что сигнатура базисных векторов

$$\varepsilon_4, \quad \varepsilon_{14}, \quad \varepsilon_{42}, \quad \varepsilon_{124}\,,$$

меняет знак. Для нас в дальнейшем окажется особенно важным то, что в первом сжатом представлении матрица ${C^L}_{K34}$ отождествляется с матрицей ${C^L}_{K0} = {\delta^L}_K$.

2. Второе сжатое представление.

Рассмотрим второе сжатое представление

$$R_2 : \mathbb{C}_4 \to \mathbb{C}_2 \,\{\varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_0\}.$$

Для этого положим, что при вычислении структурных матриц по формуле (12) соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14, 1324, 34)$, $(134, 234, 4, 124)$ и $(1, 2, 3, 123)$ заменяются на базисные векторы с индексами $(32, 13, 21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц представления базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ понижается вдвое в сравнении с первым сжатым представлением и равна 4×4 в действительном представлении, 2×2 в комплексном представлении и 1×1 в кватернионном представлении.

Ограничимся тем, что приведем матрицы регулярного представления образующих базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ в алгебре $\mathbb{C}_2$. Имеем

$$\varepsilon_1 \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 32 \\ 2 & 13 \\ 3 & 21 \\ 123 & 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & -1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right] \end{array} = a \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} = a\, I$$

$$\varepsilon_2 \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 32 \\ 2 & 13 \\ 3 & 21 \\ 123 & 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & -1 & & \end{array}\right] \end{array} = b \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} = b\, I$$

$$\varepsilon_3 \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & 32 \\ 2 & 13 \\ 3 & 21 \\ 123 & 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \end{array}\right] \end{array} = i \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = i\, \mathbb{1}$$

$$\varepsilon_4 \sim \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 32 & 13 & 21 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 134 & 32 \\ 234 & 13 \\ 4 & 21 \\ 124 & 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \end{array}\right] \end{array} = i \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = i\, \mathbb{1}$$

В результате для базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ получим

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_{32} \sim a\, I\,, & \varepsilon_{42} \sim a\, I\,, \\ \varepsilon_{13} \sim b\, I\,, & \varepsilon_{14} \sim b\, I\,, \\ \varepsilon_{21} \sim i\, \mathbb{1}\,, & \varepsilon_{1324} \sim i\, \mathbb{1}\,, \\ \varepsilon_0 \sim 1\, \mathbb{1}\,, & \varepsilon_{34} \sim 1\, \mathbb{1}\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 \sim a\, I\,, & \varepsilon_{134} \sim a\, I\,, \\ \varepsilon_2 \sim b\, I\,, & \varepsilon_{234} \sim b\, I\,, \\ \varepsilon_3 \sim i\, \mathbb{1}\,, & \varepsilon_4 \sim i\, \mathbb{1}\,, \\ \varepsilon_{123} \sim 1\, \mathbb{1}\,, & \varepsilon_{124} \sim 1\, \mathbb{1}\,. \end{array}$$

В рассматриваемом представлении только базисные векторы ε_{32}, ε_{13}, ε_{21}, ε_0 представлены точно. Соотношения

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{32} \sim a\, I\,, \\ \varepsilon_{13} \sim b\, I\,, \\ \varepsilon_{21} \sim i\, \mathbb{1}\,, \\ \varepsilon_0 \sim 1\, \mathbb{1} \end{array}$$

можно рассматривать как соответствие между указанными базисными векторами и кватернионами. Именно такое соответствие было постулировано в разделе IIC.

3. Третье сжатое представление

Рассмотрим третье сжатое представление

$$R_3 : \mathbb{C}_4 \to \mathbb{C}_1 \,\{\varepsilon_{21}, \varepsilon_0\}\,.$$

Для этого положим, что соотношение (11) определяется тем, что базисные векторы с индексами $(42, 14)$, $(1324, 34)$, $(134, 234)$, $(4, 124)$, $(1, 2)$, $(3, 123)$, $(32, 13)$ заменяются на векторы с индексами $(21, 0)$ соответственно. Тогда размерность матриц базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ понижается вдвое в сравнении с вторым сжатым представлением и равна 2×2 в действительном представлении, 1×1 в комплексном представлении. В результате для базисных векторов алгебры $\mathbb{C}_4$ получим

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_{32} \sim a\,, & \varepsilon_1 \sim a\,, & \varepsilon_{42} \sim a\,, & \varepsilon_{134} \sim a\,, \\ \varepsilon_{13} \sim b\,, & \varepsilon_2 \sim b\,, & \varepsilon_{14} \sim b\,, & \varepsilon_{234} \sim b\,, \\ \varepsilon_{21} \sim i\,, & \varepsilon_3 \sim i\,, & \varepsilon_{1324} \sim i\,, & \varepsilon_4 \sim i\,, \\ \varepsilon_0 \sim 1\,, & \varepsilon_{123} \sim 1\,, & \varepsilon_{34} \sim 1\,, & \varepsilon_{124} \sim 1 \end{array}$$

В рассматриваемом представлении вектор ε_{21} и только он представляется точно мнимой единицей. Именно такое соответствие было постулировано в разделе IIB.

IV. КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ И КВАНТОВЫЕ ПОСТУЛАТЫ

Мы вычислили структурные матрицы контравариантной алгебры действия и теперь вернемся к уравнениям структуры этой алгебры, которые в Лекции 1 были записаны следующим образом

$$\partial_m \psi^L = \frac{1}{\hbar}\, {C^L}_{IK} \cdot {p^K}_m \cdot \psi^I\,. \tag{13}$$

Наша задача состоит в том, чтобы попытаться привести эти уравнения к задаче на собственные значения, с которой мы имеем дело в квантовой механике

$$\frac{\hbar}{i}\, \frac{\partial \psi}{\partial x^m} = p_m\, \psi\,. \tag{14}$$

Анализируя полученные структурные матрицы, мы выделили матрицу

$$C^L{}_{I(21)}\,.$$

В комплексном представлении эта матрица равна

$$C^L{}_{I(21)} = i\,\delta^L{}_I\,.$$

Таким образом, имеется единственная возможность привести уравнения структуры (13) к квантовым постулатам (14): необходимо в уравнениях (13) положить индекс $K = 21$. Отсюда получаем следующий вывод: квантовые постулаты в теории Шредингера следуют из уравнений структуры контравариантной алгебры действия. При этом контравариантную алгебру действия необходимо рассматривать как алгебру Клиффорда и ключевую роль отвести компоненте вектора действия S^{21}.

В общем плане построение квантовой теории должно сводиться к установлению алгебр, которым подчиняется вектор действия, а также изучению уравнения структуры вида (13). Именно в таком ключе квантовая теория будет рассматриваться в наших Лекциях.

V. ВЫВОДЫ.

- Алгебра Клиффорда $\mathbb{C}$ представлена структурными матрицами, которые составляют новую алгебру матриц, дополнительную к алгебре матриц Дирака.

- В число структурных матриц алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}$ входит матрица $i\,\delta^I{}_K$, которая в теории Дирака вводится дополнительно к матрицам Дирака для описания взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Поэтому следует считать, что новая алгебра матриц не менее существенна для квантовой механики, чем алгебра матриц Дирака.

- В отличие от алгебры Клиффорда $\widetilde{\mathbb{C}}_4$ алгебра Клиффорда $\mathbb{C}_4$ в первом сжатом представлении представлена двумя алгебрами, изоморфными алгебре $\mathbb{C}_3$. И, в частности, структурная матрица $C^L{}_{K(34)}$ отождествляется с матрицей $C^L{}_{K(0)} = \delta^L{}_K$.

- Из алгебраической структуры векторов действия следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений. Использование матрицы $i\,\delta^I{}_K$ в уравнениях структуры позволяет получить квантовые постулаты Шредингера.