Лекция 2. Алгебра Клиффорда как кандидат на алгебру действия.

А. А. Кецарис

(27 мая 2003 г.)

В этой лекции мы наделяем искомую алгебру действия такими же правилами умножения векторов как те, которые присущи алгебре матриц Дирака.

I. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей лекции мы пришли к необходимости ввести в обиход алгебру действия $\mathbb{S}$. Однако вид этой алгебры остался не установленным. Поэтому следующий шаг состоит в том, чтобы выбрать конкретную алгебру в качестве алгебры действия. A'priori сделать такой выбор невозможно. Наводящие соображения следует искать в сегодняшней квантовой теории. Однако, следует иметь в виду, что такие соображения могут служить лишь пояснением, но не доказательством.

Прежде, чем двигаться в этом направлении, нам необходимо остановиться на двух темах:

- Регулярное представление базисных векторов в алгебре действия $\mathbb{S}$.
- Алгебра матриц Дирака.

В рамках первой темы мы покажем, что между умножением базисных векторов в алгебре действия $\mathbb{S}$ и умножением структурных матриц существует взаимосвязь. А в пределах второй темы будут рассмотрены правила умножения, которым подчиняются матрицы Дирака.

II. РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ В АЛГЕБРЕ ДЕЙСТВИЯ $\mathbb{S}$.

Обратимся к алгебре действия $\mathbb{S}$. Напомним, что закон умножения базисных векторов алгебры действия был записан в Лекции 1 в следующем виде[*]

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI}\,. \qquad (1)$$

[*]Здесь, как и ранее, мы используем правило Эйнштейна: по повторяющимся нижнему и верхнему индексам выполняется суммирование.

Будем полагать, что искомая алгебра $\mathbb{S}$ является ассоциативной. То есть, произведение нескольких векторов не зависит от порядка умножения сомножителей. Это условие может быть сведено к условию ассоциативности

$$(S_1 \circ S_2) \circ S_3 = S_1 \circ (S_2 \circ S_3)\,.$$

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$(\mathfrak{e}_N \circ \mathfrak{e}_K) \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_N \circ (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I)\,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов, получим

$$(\mathfrak{e}_L \circ \mathfrak{e}_I)\, C^L{}_{NK} = (\mathfrak{e}_N \circ \mathfrak{e}_L)\, C^L{}_{KI}\,.$$

Откуда

$$C^M{}_{LI} \cdot C^L{}_{NK} = C^M{}_{NL} \cdot C^L{}_{KI}\,. \qquad (2)$$

Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (1), заключаем, что базисным векторам $\mathfrak{e}_I$ можно поставить в соответствие структурные матрицы $C^M{}_{LI}$. При этом $\circ$ – умножению базисных векторов ставится в соответствие обычное умножение матриц в обратном порядке. Это соответствие называется *регулярным (присоединенным) представлением* алгебры $\mathbb{S}$ и обозначается:

$$\mathfrak{e}_I \sim C^L{}_{KI}\,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. В регулярном представлении произвольному вектору алгебры $S = \mathfrak{e}_I\, S^I$ соответствует матрица

$$S^L{}_K = C^L{}_{KI} \cdot S^I\,.$$

III. АЛГЕБРА МАТРИЦ ДИРАКА.

Для целей построения релятивистской квантовой теории электрона Дирак сконструировал шестнадцать матриц γ^I. Здесь индекс I пробегает значения[†] от 0 до 15. Приведем эти матрицы и укажем их свойства.

[†]Мы обозначаем индекс матриц также как обозначили индекс базисных векторов алгебры действия, так как в дальнейшем эти индексы будут отождествлены. Однако пока указанные индексы нужно считать несвязанными.

- Единичная матрица γ^0.

$$\gamma^0 = \begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}$$

- Четыре матрицы γ^k, где[*] индекс k принимает значения от 1 до 4.[†]

$$\gamma^1 = i\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline\end{array} = i\begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^1 \\ \hline \sigma^1 & \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^2 = i\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & i \\ & & -i & \\ \hline & -i & & \\ i & & & \\ \hline\end{array} = i\begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^2 \\ \hline \sigma^2 & \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^3 = i\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline\end{array} = i\begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^3 \\ \hline \sigma^3 & \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^4 = -i\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline\end{array} = -i\begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}$$

[‡] Для них имеют место соотношения

$$\gamma^1 \cdot \gamma^1 = \gamma^0\,, \qquad \gamma^2 \cdot \gamma^2 = \gamma^0\,,$$
$$\gamma^3 \cdot \gamma^3 = \gamma^0\,, \qquad \gamma^4 \cdot \gamma^4 = -\gamma^0\,. \tag{3}$$

С помощью матриц γ^k путем умножения их друг на друга образуются остальные одиннадцать матриц.

---

[*] Наша запись матриц γ^k отличается от обычно используемой записи наличием мнимой единицы i в качестве множителя (не путать ее с индексом i).

[†] Далее все индексы, обозначаемые малыми латинскими буквами, начиная с i, принимают значения от 1 до 4.

[‡] При преобразовании матриц использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma^1 = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma^2 = \begin{array}{|c|c|}\hline & -i \\ \hline i & \\ \hline\end{array}\,, \quad \sigma^3 = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,.$$

Матрицы σ^1, σ^2, σ^3 представляют собой *матрицы Паули* (с той разницей, что по соображениям симметрии в качестве σ^3 взята матрица с противоположным знаком).

- Матрицы

$$\gamma^{ik} = \gamma^k \cdot \gamma^i\,. \tag{4}$$

Здесь $i \neq k$. Число этих матриц равно шести.

$$\gamma^{21} = -i\begin{array}{|cc|cc|}\hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline\end{array} = -i\begin{array}{|c|c|}\hline \sigma^3 & \\ \hline & \sigma^3 \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^{13} = -i\begin{array}{|cc|cc|}\hline & -i & & \\ i & & & \\ \hline & & & -i \\ & & i & \\ \hline\end{array} = -i\begin{array}{|c|c|}\hline \sigma^2 & \\ \hline & \sigma^2 \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^{32} = -i\begin{array}{|cc|cc|}\hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline\end{array} = -i\begin{array}{|c|c|}\hline \sigma^1 & \\ \hline & \sigma^1 \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^{14} = \begin{array}{|cc|cc|}\hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \sigma^1 & \\ \hline & -\sigma^1 \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^{42} = \begin{array}{|cc|cc|}\hline & i & & \\ -i & & & \\ \hline & & & -i \\ & & i & \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline -\sigma^2 & \\ \hline & \sigma^2 \\ \hline\end{array}$$

$$\gamma^{34} = \begin{array}{|cc|cc|}\hline -1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \sigma^3 & \\ \hline & -\sigma^3 \\ \hline\end{array}$$

Для этих матриц выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей – условие антикоммутативности произведения матриц

$$\gamma^{ik} = -\gamma^{ki}\,. \tag{5}$$

Возведение в квадрат матриц γ^{ik} приводит к следующим соотношениям

$$\gamma^{21} \cdot \gamma^{21} = -\gamma^0\,, \qquad \gamma^{42} \cdot \gamma^{42} = \gamma^0\,,$$
$$\gamma^{32} \cdot \gamma^{32} = -\gamma^0\,, \qquad \gamma^{14} \cdot \gamma^{14} = \gamma^0\,,$$
$$\gamma^{13} \cdot \gamma^{13} = -\gamma^0\,, \qquad \gamma^{34} \cdot \gamma^{34} = \gamma^0\,. \tag{6}$$

- Матрицы

$$\gamma^{ikl} = \gamma^l \cdot \gamma^k \cdot \gamma^i\,. \tag{7}$$

Здесь

$$i \neq k\,, i \neq l\,, k \neq l\,.$$

Число этих матриц равно четырем.

$$\gamma^{123} = \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline -1 & \end{array}\right]$$

$$\gamma^{124} = \left[\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} & \sigma^3 \\ \hline \sigma^3 & \end{array}\right]$$

$$\gamma^{134} = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & i \\ & & -i & \\ \hline & i & & \\ -i & & & \end{array}\right] = (-1)\left[\begin{array}{c|c} & \sigma^2 \\ \hline \sigma^2 & \end{array}\right]$$

$$\gamma^{234} = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} & \sigma^1 \\ \hline \sigma^1 & \end{array}\right]$$

Для этих матриц выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности,

$$\gamma^{ikl} = \gamma^{kli} = \gamma^{lik} = -\gamma^{kil} = -\gamma^{ilk} = -\gamma^{lki}\,. \quad (8)$$

Возведение в квадрат матриц γ^{ikl} приводит к следующим соотношениям

$$\gamma^{123}\cdot\gamma^{123} = -\gamma^0\,, \qquad \gamma^{124}\cdot\gamma^{124} = \gamma^0\,,$$
$$\gamma^{134}\cdot\gamma^{134} = \gamma^0\,, \qquad \gamma^{234}\cdot\gamma^{234} = \gamma^0\,. \quad (9)$$

- Матрица

$$\gamma^{1324} = \gamma^4\cdot\gamma^3\cdot\gamma^2\cdot\gamma^1\,. \quad (10)$$

$$\gamma^{1324} = i\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] = i\left[\begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline & 1 \end{array}\right]$$

Для этой матрицы выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, матриц-сомножителей, также вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности,

$$\gamma^{1324} = \gamma^{1243} = \gamma^{1432} = -\gamma^{1234} =$$
$$-\gamma^{1342} = -\gamma^{1423} = -\gamma^{3241} = -\gamma^{3412} =$$
$$-\gamma^{3124} = \gamma^{3421} = \gamma^{3214} = \gamma^{3142} =$$
$$\gamma^{2413} = \gamma^{2134} = \gamma^{2341} = -\gamma^{2143} =$$
$$-\gamma^{2431} = -\gamma^{2314} = \gamma^{4132} = -\gamma^{4321} =$$
$$-\gamma^{4213} = \gamma^{4312} = \gamma^{4123} = \gamma^{4231}\,. \quad (11)$$

Возведение в квадрат матрицы γ^{1324} дает

$$\gamma^{1324}\cdot\gamma^{1324} = -\gamma^0\,. \quad (12)$$

Соотношения (4) – (12) позволяют рассматривать матрицы γ^I как базисные векторы специальной алгебры, которая называется алгеброй Клиффорда.*

IV. НАША ПРОГРАММА.

Теперь, после того как мы освоили

- регулярное представление базисных векторов в алгебре действия $\mathbb{S}$ и
- алгебру матриц Дирака

вернемся к нашей задаче: найти соображения для установления алгебры действия.

Сделаем следующее предположение: пусть матрицы Дирака находятся в соответствии с матрицами регулярного представления базисных векторов алгебры действия. Тогда, во-первых, исчезает неопределенность в выборе вида алгебры действия – алгебра действия выступает как алгебра Клиффорда. И, во-вторых, исходя из правил умножения базисных векторов в алгебре Клиффорда можно установить вид структурных матриц $C^L{}_{KI}$ алгебры действия. Для этих матриц при каких-то условиях уравнения структуры (19) Лекции 1 должны совпасть с квантовыми постулатами (3) Лекции 1.

Отсюда наша программа такова.

- Отождествить алгебру действия с алгеброй Клиффорда.
- Установить правила умножения базисных векторов в рассматриваемой алгебре.
- Вычислить структурные матрицы для рассматриваемой алгебры.
- Установить связь между вычисленными структурными матрицами и матрицами Дирака.

В случае успеха мы, во-первых, найдем путь к *выводу* матриц Дирака и, во-вторых, убедимся в верности выбора алгебры Клиффорда в качестве алгебры действия, найдем теоретические основания для квантовых явлений.

V. АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

В соответствии с нашей программой будем рассматривать алгебру действия как алгебру Клиффорда. В этом случае алгебру действия будем обозначать $\mathbb{C}$ наряду с обозначением $\mathbb{S}$. Базисные векторы для алгебры Клиффорда будем обозначать ε_I, оставляя обозначение $\mathfrak{e}_I$ для общего случая.

---

*Ее определение будет дано в разделе V.

Закон умножения для базисных векторов ε_K алгебры Клиффорда $\mathbb{C}$ перепишем следующим образом:

$$\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L \cdot C^L{}_{KI}\,. \tag{13}$$

Здесь $C^L{}_{KI}$ есть структурные постоянные или структурные матрицы алгебры $\mathbb{C}$.

Приведем свойства, определяющие алгебру Клиффорда.

- Она ассоциативна.
- Существует элемент ε_0, изоморфный действительной единице,[*] для которого

$$\varepsilon_0 \circ S = S \circ \varepsilon_0 = S\,.$$

И, в частности,[†]

$$\varepsilon_0 \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0\,.$$

- Алгебра включает в себя базисные векторы

$$\varepsilon_1\,, \varepsilon_2\,, \ldots\,, \varepsilon_n\,,$$

называемые *образующими*. [‡] Произведения образующих векторов подчиняются условиям:

  ◇ произведение одинаковых образующих векторов

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_i = \operatorname{sign} \varepsilon_i\,.$$

Здесь выражение $\operatorname{sign} \varepsilon_i$ равно либо $+\varepsilon_0$ либо $-\varepsilon_0$. Оно называется *сигнатурой* базисного вектора ε_i. [§]

  ◇ произведение разных образующих векторов удовлетворяет условию антикоммутативности

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_k = -\varepsilon_k \circ \varepsilon_i\,.$$

Остальные базисные векторы получаются путем умножения образующих векторов(по два, по три и так далее вектора). Отсюда следует, что алгебра Клиффорда определяется числом образующих векторов и их сигнатурой.

Условие антикоммутативности позволяет переставлять(менять местами) соседние базисные векторы в произвольном произведении образующих векторов

$$\varepsilon_m \circ \ldots \circ (\varepsilon_i \circ \varepsilon_k) \circ \ldots \circ \varepsilon_n = -\varepsilon_m \circ \ldots \circ (\varepsilon_k \circ \varepsilon_i) \circ \ldots \circ \varepsilon_n\,,$$

Это условие в сочетании с условием ассоциативности приводит к тому, что число независимых базисных векторов, получаемых путем умножения p образующих векторов, равно числу сочетаний из n элементов по p

$$C_n^p\,.$$

Таким образом, общее число базисных векторов, получаемое путем всевозможных произведений образующих базисных векторов, равно

$$C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n\,.$$

Если к этому числу прибавить число образующих элементов, записав его в виде

$$C_n^1\,,$$

и единицу, соответствующую одному выделенному базисному вектору ε_0, записав ее в виде

$$C_n^0\,,$$

получим общее число базисных векторов алгебры Клиффорда

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n\,.$$

Рассматривая это число как бином Ньютона от выражения

$$(1+1)^2\,,$$

получим общее число базисных векторов

$$N + 1 = 2^n\,.$$

[**]

---

[*] Подчеркнем, что необходимость в таком элементе для искомой алгебры уже была установлена в Лекции 1 и с этой точки зрения алгебра Клиффорда подходит для нашего исследования.

[†] Отсюда следует, что $\circ$-умножение вектора S на вектор, пропорциональный ε_0, эквивалентно умножению вектора S на число.

[‡] При этом имеется в виду, что остальные базисные векторы образуются из них путем умножения.

[§] Заметим, что алгебра Клиффорда, представленная матрицами Дирака имеет четыре образующих базисных матрицы

$$\gamma^1\,, \gamma^2\,, \gamma^3\,, \gamma^4$$

с сигнатурами соответственно

$$(+\,,\quad +\,,\quad +\,,\quad -)\,.$$

(Здесь в перечислении сигнатур действительная единица ε_0 опущена)

[**] Для алгебры Клиффорда, представленной матрицами Дирака, имеем

$$N + 1 = 2^4 = 16\,.$$

VI. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА.

В соответствии с принятой нами программой алгебра действия есть алгебра Клиффорда, образующие базисные векторы которой находятся в соответствии с образующими матрицами алгебры Дирака

$$\varepsilon_1 \sim \gamma^1 , \varepsilon_2 \sim \gamma^2 , \varepsilon_3 \sim \gamma^3 , \varepsilon_4 \sim \gamma^4$$

с сигнатурами соответственно *

$$(+, \quad +, \quad +, \quad -) .$$

Общее число базисных векторов ε_I равно шестнадцати. Здесь индекс I принимает значения от 0 до 15. Укажем эти векторы и правила умножения, которым они подчиняются.

- ε_0. Для него имеет место правило умножения

$$\varepsilon_0 \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0 .$$

- Образующие векторы ε_i, где индекс i пробегает значения от 1 до 4. То есть, число таких векторов равно четырем. Для них имеют место правила умножения

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \circ \varepsilon_i = \varepsilon_i .$$

$$\varepsilon_i \circ \varepsilon_i = \operatorname{sign} \varepsilon_i ,$$

где

$$\operatorname{sign} \varepsilon_1 = \operatorname{sign} \varepsilon_2 = \operatorname{sign} \varepsilon_3 = - \operatorname{sign} \varepsilon_4 = \varepsilon_0 .$$

- Векторы

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_k \circ \varepsilon_i .$$

Здесь $i \neq k$. Число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по два

$$C_4^2 = 6 .$$

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие антикоммутативности

$$\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki} .$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$\varepsilon_{ik} \circ \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_i \circ (\varepsilon_k \circ \varepsilon_k) \circ \varepsilon_i = - \operatorname{sign} \varepsilon_i \circ \operatorname{sign} \varepsilon_k .$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{21} &= -\varepsilon_0 , & \varepsilon_{42} \circ \varepsilon_{42} &= \varepsilon_0 , \\ \varepsilon_{32} \circ \varepsilon_{32} &= -\varepsilon_0 , & \varepsilon_{14} \circ \varepsilon_{14} &= \varepsilon_0 , \\ \varepsilon_{13} \circ \varepsilon_{13} &= -\varepsilon_0 , & \varepsilon_{34} \circ \varepsilon_{34} &= \varepsilon_0 . \end{aligned}$$

- Векторы

$$\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_l \circ \varepsilon_k \circ \varepsilon_i .$$

Здесь

$$i \neq k , i \neq l , k \neq l .$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по три

$$C_4^3 = 4 .$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности,

$$\varepsilon_{ikl} = \varepsilon_{kli} = \varepsilon_{lik} = -\varepsilon_{kil} = -\varepsilon_{ilk} = -\varepsilon_{lki} .$$

Из указанных законов также следует

$$\varepsilon_{ikl} \circ \varepsilon_{ikl} = -\varepsilon_i \circ (\varepsilon_k \circ (\varepsilon_l \circ \varepsilon_l) \circ \varepsilon_k) \circ \varepsilon_i = - \operatorname{sign} \varepsilon_i \circ \operatorname{sign} \varepsilon_k \circ \operatorname{sign} \varepsilon_l .$$

Откуда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} \circ \varepsilon_{123} &= -\varepsilon_0 , & \varepsilon_{124} \circ \varepsilon_{124} &= \varepsilon_0 , \\ \varepsilon_{134} \circ \varepsilon_{134} &= \varepsilon_0 , & \varepsilon_{234} \circ \varepsilon_{234} &= \varepsilon_0 . \end{aligned}$$

- Вектор

$$\varepsilon_{iklm} = \varepsilon_m \circ \varepsilon_l \circ \varepsilon_k \circ \varepsilon_i .$$

Здесь

$$i \neq k , i \neq l , i \neq m , k \neq l , k \neq m , l \neq m .$$

Таким образом, число этих векторов равно числу сочетаний из четырех элементов по четыре, то есть единице

$$C_4^4 = 1 .$$

*Здесь в перечислении сигнатур действительная единица ε_0 опущена.

Для этих векторов выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{iklm} = \varepsilon_{ilmk} = \varepsilon_{imkl} = -\varepsilon_{ilkm} = \\ -\varepsilon_{ikml} = -\varepsilon_{imlk} = -\varepsilon_{klmi} = -\varepsilon_{kmil} = \\ -\varepsilon_{kilm} = \varepsilon_{kmli} = \varepsilon_{klim} = \varepsilon_{kiml} = \\ \varepsilon_{lmik} = \varepsilon_{likm} = \varepsilon_{lkmi} = -\varepsilon_{limk} = \\ -\varepsilon_{lmki} = -\varepsilon_{lkim} = -\varepsilon_{mikl} = -\varepsilon_{mkli} = \\ -\varepsilon_{mlik} = \varepsilon_{mkil} = \varepsilon_{milk} = \varepsilon_{mlki}\,.\end{aligned}$$

Из указанных законов также следует

$$\begin{aligned}\varepsilon_{iklm} \circ \varepsilon_{iklm} = \\ \varepsilon_i \circ (\varepsilon_k \circ (\varepsilon_l \circ (\varepsilon_m \circ \varepsilon_m) \circ \varepsilon_l) \circ \varepsilon_k) \circ \varepsilon_i = \\ \operatorname{sign}\varepsilon_i \circ \operatorname{sign}\varepsilon_k \circ \operatorname{sign}\varepsilon_l \circ \operatorname{sign}\varepsilon_m\,.\end{aligned}$$

Откуда

$$\varepsilon_{1324} \circ \varepsilon_{1324} = -\varepsilon_0\,.$$

В том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, мы будем использовать обозначение $\mathbb{C}_4$ вместо обозначения $\mathbb{C}$. Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру с тремя образующими базисными векторами (например, ε_1, ε_2, ε_3), удобно обозначать $\mathbb{C}_3$.

В соответствии с нашим общим замыслом мы должны для указанных базисных векторов, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда, найти из (13) структурные матрицы . Затем подставить эти матрицы в уравнения структуры (19) Лекции 1 и сравнить результат с квантовыми постулатами (3) Лекции 1. В том случае, если соотношения (3) Лекции 1 будут получены, мы докажем вывод Лекции 1 о том, что причина квантовых явлений заключается в алгебраической структуре векторов действия.

Однако прежде, чем продвигаться в этом направлении, попытаемся решить другую, тесно связанную с нашим замыслом, задачу - попытаемся вывести матрицы Дирака.

VII. ВЫВОДЫ

- Можно предположить, что матрицы Дирака находятся в соответствии со структурными матрицами искомой алгебры действия.
- Тогда алгебра действия есть алгебра Клиффорда с четырьмя образующими базисными векторами с сигнатурами

$$(+,\quad +,\quad +,\quad -)\,.$$

- Матрицы Дирака необходимо получить как результат вычисления структурных матриц для алгебры Клиффорда.

ПРИЛОЖЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ И УМНОЖЕНИЕ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ*.

Необходимость умножать матрицы регулярного представления в обратном порядке делает запись регулярного представления несколько не эстетичной. Это связано с принятой формой записи матриц.

Для матриц принято следующее обозначение

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Отсюда следует, что первый индекс (i) нумерует строки, а второй - (k) нумерует столбцы. В частности, столбец имеет вид

$$a_{i.} = \begin{vmatrix} a_{1.} \\ a_{2.} \\ \vdots \\ a_{n.} \end{vmatrix}\,.$$

А строка

$$a_{.k} = \begin{vmatrix} a_{.1} & a_{.2} & \dots & a_{.n} \end{vmatrix}\,.$$

Принято для вектора-столбца использовать верхний индекс

$$a^i{}_{.} = \begin{vmatrix} a^1{}_{.} \\ a^2{}_{.} \\ \vdots \\ a^n{}_{.} \end{vmatrix}\,,$$

а для вектора-строки использовать нижний индекс

$$a^{.}{}_k = \begin{vmatrix} a^{.}{}_1 & a^{.}{}_2 & \dots & a^{.}{}_n \end{vmatrix}\,.$$

Таким образом, матрицу надо обозначать так

$$a^i{}_k\,.$$

Здесь верхний левый индекс нумерует строки, а нижний правый индекс нумерует столбцы. Умножение матриц имеет вид

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}\,.$$

*Этот раздел посвящен техническому вопросу и может быть опущен при первом чтении.

Поэтому оно должно быть записано так [†]

$$c^i_{\ j} = a^i_{\ k} \cdot b^k_{\ j} \,.$$

Также

$$c_{i.} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{k.}$$

записывается так

$$c^i = a^i_{\ k} \cdot b^k \,.$$

Отсюда надо писать

$$x = \mathfrak{e}_k \cdot x^k \,.$$

Таким образом, закон умножения базисных векторов надо записывать так

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L_{\ KI} \,.$$

Здесь базисный вектор с номером матрицы умножается справа на базисный вектор с номером столбца. Этому умножению соответствует ранее выведенное умножение структурных матриц

$$C^M_{\ LI} \cdot C^L_{\ NK} = C^M_{\ NL} \cdot C^L_{\ KI} \,.$$

Причем соответствующие матрицы умножаются в обратном порядке.

Если считать изменение порядка умножения соответствующих матриц не эстетичным и стремиться к соответствию порядка умножения матриц порядку умножения базисных векторов, то тогда необходимо переопределить матрицу. Действительно, переобозначим матрицу следующим образом

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

То есть, будем считать, что первый индекс (i) нумерует столбцы, а второй - (k) нумерует строки. В частности, столбец имеет вид

$$a_{.k} = \begin{vmatrix} a_{.1} \\ a_{.2} \\ \vdots \\ a_{.n} \end{vmatrix} .$$

А строка

$$a_{i.} = \begin{vmatrix} a_{1.} & a_{2.} & \dots & a_{n.} \end{vmatrix} .$$

По прежнему для вектора-столбца будем использовать верхний индекс

$$a_{\cdot}^{\ i} = \begin{vmatrix} a_{\cdot}^{\ 1} \\ a_{\cdot}^{\ 2} \\ \vdots \\ a_{\cdot}^{\ n} \end{vmatrix} ,$$

а для вектора-строки будем использовать нижний индекс

$$a_k^{\ \cdot} = \begin{vmatrix} a_1^{\ \cdot} & a_2^{\ \cdot} & \dots & a_n^{\ \cdot} \end{vmatrix} .$$

Таким образом, матрицу надо обозначать так

$$a_i^{\ k} ,$$

где нижний левый индекс нумерует столбцы, а правый верхний индекс нумерует строки. Умножение матриц также переопределим

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj} \,.$$

Оно запишется следующим образом [*]

$$c_i^{\ j} = a_i^{\ k} \cdot b_k^{\ j} \,.$$

Также

$$c_{i.} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{k.}$$

записывается так

$$c_i = a_i^{\ k} \cdot b_k \,.$$

Отсюда надо писать

$$x = x^k \cdot \mathfrak{e}_k \,.$$

Таким образом, закон умножения базисных векторов надо записывать так

$$\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = C_{IK}^{\ \ L} \cdot \mathfrak{e}_L \,. \qquad \text{(A1)}$$

Здесь как и прежде базисный вектор с номером матрицы умножается справа на базисный вектор с номером столбца. Этому умножению соответствует умножение структурных матриц, выводимое следующим образом. Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов

$$(\mathfrak{e}_N \circ \mathfrak{e}_K) \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_N \circ (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I) \,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов, получим

[†]Это умножение удобно обозначить как /-умножение.

[*]Это умножение удобно обозначить как \-умножение.

$$C_{KN}{}^{L} \cdot (\mathfrak{e}_L \circ \mathfrak{e}_I) = C_{IK}{}^{L} \cdot (\mathfrak{e}_N \circ \mathfrak{e}_L)\,.$$

Откуда

$$C_{KN}{}^{L} \cdot C_{IL}{}^{M} = C_{IK}{}^{L} \cdot C_{LN}{}^{M}\,. \qquad \text{(A2)}$$

Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (A1), заключаем, что базисным векторам $\mathfrak{e}_I$ можно поставить в соответствие структурные матрицы $C_{IK}{}^{L}$. При этом $\circ$ – умножению базисных векторов ставится в соответствие переопределенное умножение матриц, причем порядок умножения матриц *совпадает* с порядком умножения базисных векторов. Таким образом, для эстетики регулярного представления необходимо переопределить запись и умножение матриц. Но поскольку это не в наших силах будем пользоваться принятым умножением матриц, но не эстетичным соответствием умножения матриц и умножения базисных векторов.

$$C^{M}{}_{LI} \cdot C^{L}{}_{NK} = C^{M}{}_{NL} \cdot C^{L}{}_{KI}\,.$$

Причем соответствующие матрицы умножаются в обратном порядке.