Лекция 19. Калибровочное поле

А. А. Кецарис
(21 мая 2006 г.)

Калибровочное поле определяется через линейные преобразования пространства действия. Волновое уравнение для фундаментальных частиц в калибровочном поле выводится из уравнений структуры для пространства векторов действия, расширенного за счет линейных преобразований. Рассматривается частный случай предлагаемого уравнения – волновое уравнение для лептонов в электрослабом поле. В отличие от стандартной модели Салама–Вайнберга, система уравнений включает уравнение для правого нейтрино, которое взаимодействует только со слабым Z-полем.

I. ВВЕДЕНИЕ

Согласно существующей точке зрения взаимодействие между фундаментальными частицами осуществляется с помощью посредника. Эта концепция существует в двух разновидностях: в качестве такого посредника выступает либо *промежуточная частица*, либо *поле*. Поскольку оба вида описания взаимодействия относятся к одному явлению, они должны сводиться друг к другу. В Лекции 17 мы рассмотрели описание взаимодействия с помощью промежуточных частиц. В его основе лежит представление о действии промежуточной частицы $\mathsf{S}(\ )$ как о линейном операторе. Таким образом, описание взаимодействия с помощью поля должно корреспондироваться с указанным представлением.

Отправной точкой в идентификации группы электромагнитного взаимодействия для нас будет уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле. Отправной точкой в идентификации электрослабой группы для нас будет уравнение Салама-Вайнберга для лептонов в электрослабом поле.

И, наконец, сделаем замечание относительно используемой терминологии. Существующие типы полей удовлетворяют определенным соотношениям, которые называются *калибровочными преобразованиями**. Поэтому, говоря о поле без уточнения его типа, будем называть поле *калибровочным*.

*Далее мы рассмотрим эти преобразования.

II. КАЛИБРОВОЧНОЕ ПОЛЕ

1. Группа линейных преобразований

В Лекции 17 нами были введены линейные преобразования пространства действия фундаментальных частиц, которые представляются векторами S. Эти векторы имеют размерность действия и рассматриваются нами как векторы действия промежуточной частицы. Векторы действия S могут быть разложены по базисным векторам $\mathfrak{I}^I{}_M$

$$\mathsf{S} = \mathfrak{I}^I{}_M \cdot S^M{}_I \,.$$

Эти векторы подчиняются групповому закону композиции

$$\mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\,\mathsf{S}_1 \circ \mathsf{S}_2 \,, \tag{1}$$

где S_0 есть постоянная, имеющая размерность действия. Закон композиции для базисных векторов $\mathfrak{I}^I{}_M$ записывается следующим образом:

$$\mathfrak{I}^L{}_K \circ \mathfrak{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{I}^L{}_M \,. \tag{2}$$

По отношению к координатам векторов групповой закон композиции принимает вид

$$S^M{}_L = \frac{1}{S_0}\,(S_2)^M{}_I \cdot (S_1)^I{}_L \,.$$

Множество векторов S мы обозначили $\mathbb{S}_I$.

2. Калибровочная группа. Импульс калибровочного поля

В Лекции 17 также мы положили, что вектор действия промежуточной частицы является функцией координат обобщенного пространства-времени

$$\mathsf{S}(x) = \mathfrak{I}^I{}_K \cdot S^K{}_I(x) \,.$$

Производная от вектора действия по координате пространства-времени есть вектор импульса промежуточной частицы

$$\mathrm{p}_M = \frac{\partial \mathsf{S}}{\partial x^M} \,,$$

который может быть записан через координаты импульса

$$p^I{}_{LM} = \frac{\partial S^I{}_L}{\partial x^M}$$

следующим образом:

$$\mathrm{P}_M = \mathfrak{I}^L{}_I \cdot p^I{}_{LM}\,.$$

Отметим следующее важное обстоятельство. Если мы полагаем вектор действия промежуточной частицы зависящим от координат обобщенного пространства-времени, то мы должны считать, что групповой закон композиции также является функцией координат обобщенного пространства-времени. При этом условии группу линейных преобразований будем называть *калибровочной группой*. О калибровочной группе будем говорить как о группе, *ответственной за взаимодействие*. Закон композиции (1) для калибровочной группы перепишем в следующем, удобном для дальнейших выкладок, виде

$$\mathsf{S}(x) = \frac{1}{S_0}\,\mathsf{S}'(x)\circ\mathsf{S}''(x)\,. \tag{3}$$

При дифференцировании вектора $\mathsf{S}(x)$ по координатам пространства-времени необходимо учесть, что при этом изменяется как сам вектор так и групповой закон композиции. Для этого введем специальный дифференциал, который обозначим

$$D\mathsf{S}\,,$$

назовем *абсолютным* и положим равным

$$D\mathsf{S} = d\mathsf{S} + \delta\mathsf{S}\,,$$

где $d\mathsf{S}$ – обычный дифференциал вектора, а $\delta\mathsf{S}$ – инфинитезимальное приращение вектора, учитывающее изменение группового закона композиции с изменением координат пространства-времени.* Это приращение мы назовем *композиционным дифференциалом.*

Вышеуказанное выражение можно записать с использованием производных

$$\mathsf{S}_{|I} = \mathsf{S}_{,I} + \mathsf{S}_I\,.$$

Здесь введены следующие обозначения

$\mathsf{S}_{|I} = \dfrac{D\mathsf{S}}{\partial x^I}$ – ковариантная производная вектора S,

$\mathsf{S}_{,I} = \dfrac{\partial\mathsf{S}}{\partial x^I}$ – частная производная вектора S,

$\mathsf{S}_I = \dfrac{\delta\mathsf{S}}{\partial x^I}$ – *композиционная производная* вектора S.

*В Лекции 22 мы покажем, что введенный здесь абсолютный дифференциал совпадает с общеизвестным.

Композиционную производную

$$\mathsf{S}_I = \frac{\delta\mathsf{S}}{\partial x^I}$$

назовем *импульсом калибровочного поля.* Он может быть разложен по базисным векторам следующим образом

$$\mathsf{S}_I = \mathfrak{I}^L{}_K \cdot S^K{}_{LI}\,,$$

где

$$S^K{}_{LI} = \frac{\delta S^K{}_L}{\partial x^I}$$

– координаты импульса калибровочного поля.

Потребуем, чтобы закон композиции (3) сохранял ковариантную производную вблизи единицы группы. То есть

$$\frac{D\mathsf{S}'}{\partial x^I} = \frac{D\mathsf{S}}{\partial x^I}\,.$$

Или

$$\mathsf{S}'_{,I} + \mathsf{S}'_I = \mathsf{S}_{,I} + \mathsf{S}_I\,.$$

Подставим в это соотношение выражение (3). Получим

$$\mathsf{S}'_{,I} + \mathsf{S}'_I = \frac{1}{S_0}\,(\mathsf{S}'\circ\mathsf{S}'')_{,I} + \mathsf{S}_I\,.$$

Отсюда

$$\mathsf{S}'_{,I} + \mathsf{S}'_I = \frac{1}{S_0}\,\mathsf{S}'(x)_{,I}\circ\mathsf{S}''(x) + \frac{1}{S_0}\,\mathsf{S}'(x)\circ\mathsf{S}''(x)_{,I} + \mathsf{S}_I$$

Вблизи единицы группы выполняется

$$\mathsf{S}'' = \mathsf{S}' = S_0\,.$$

Поэтому имеем

$$\mathsf{S}'_I = \frac{\partial\mathsf{S}''}{\partial x^I} + \mathsf{S}_I\,. \tag{4}$$

Это соотношение называется *калибровочным преобразованием* импульса калибровочного поля. † По отношению к координатам импульса калибровочное преобразование имеет вид

$$S'^K{}_{LI} = \frac{\partial S''^K{}_L}{\partial x^I} + S^K{}_{LI}\,. \tag{5}$$

†Для вывода калибровочного преобразования не обязательно рассматривать условие инвариантности вблизи единицы группы. Однако при этом условие инвариантности необходимо отнести не к ковариантной производной, а к выражению

$$\frac{D\mathsf{S}}{\partial x^I}\circ\mathsf{S}^{-1}\,.$$

Из условия инвариантности этого выражения, то есть, из условия, что закон композиции (3) сохраняет это выраже-

3. Калибровочный заряд. Потенциал калибровочного поля

Рассмотрим параметрическое представление калибровочной группы. То есть, положим, что векторы $\mathsf{S} \in \mathbb{S}_I$ являются функциями *параметров* θ^α (а уже эти параметры являются функциями координат пространства-времени):

$$\mathsf{S}(\theta^\alpha) = \mathfrak{I}^I{}_M \cdot S^M{}_I(\theta^\alpha)\,.$$

Мы полагаем эти параметры безразмерными. На параметрах θ^α действует закон композиции

$$\theta^\alpha = \Phi({\theta_1}^\alpha, {\theta_2}^\alpha)$$

со свойствами группы, и имеют место соответствие закона композиции на $\{\theta^\alpha\}$ и закона умножения на $\mathbb{S}_I$:

$$\mathsf{S}(\theta^\alpha) = \frac{1}{S_0} \cdot \mathsf{S}({\theta_1}^\alpha) \circ \mathsf{S}({\theta_2}^\alpha)\,,$$

и соответствие единиц групп:

$$S^M{}_I(\theta^\alpha)\big|_{\theta^\alpha=0} = \delta^M{}_I\,.$$

Кроме того, введем параметры φ^α, которые свяжем с введенными выше параметрами θ^α соотношением

$$\theta^\alpha = \frac{g \cdot \varphi^\alpha}{S_0}\,. \tag{6}$$

Здесь коэффициенты g и S_0 являются постоянными, * причем мы полагаем, коэффициент S_0 имеет размерность действия, соответственно произведение

$$g \cdot \varphi^\alpha$$

также имеет размерность действия.

Параметры θ^α (или φ^α) выделяют в калибровочной группе $\mathbb{S}_I$ *подгруппу*. Каждому *типу* взаимодействия поставим в соответствие определенную подгруппу калибровочной группы. Будем считать, что подгруппа i-го вида взаимодействий обладает одним коэффициентом g_i, который будем называть *зарядом* этого типа взаимодействия. Говоря о поле без уточнения его типа, будем называть коэффициент g *калибровочным зарядом.*

Рассмотрим дифференциал $d\mathsf{S}$ вблизи единицы калибровочной подгруппы.

$$\begin{aligned} d\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^I{}_M \cdot \tfrac{\partial S^M{}_I(\theta^\alpha)}{\partial\theta^\alpha} \cdot \tfrac{\partial\theta^\alpha}{\partial\varphi^\alpha} \cdot \tfrac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^I} \cdot dx^I = \\ \mathfrak{I}^I{}_M \cdot \tfrac{\partial S^M{}_I(\theta^\alpha)}{\partial\theta^\alpha} \cdot \tfrac{1}{S_0} \cdot g \cdot \tfrac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^I} \cdot dx^I\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Введем обозначение

$$K^M{}_{I\alpha} = \frac{1}{S_0}\ \frac{\partial S^M{}_I(\theta^\alpha)}{\partial\theta^\alpha}\bigg|_{\theta^\alpha=0}\,.$$

Используя его, получим

$$d\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^I{}_M \cdot K^M{}_{I\alpha} \cdot g \cdot \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^I} \cdot dx^I\,. \tag{8}$$

И для координат вектора

$$dS^M{}_I = K^M{}_{I\alpha} \cdot g \cdot \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^I} \cdot dx^I\,. \tag{9}$$

Векторы

$$\mathfrak{I}_\alpha = \mathfrak{I}^I{}_M \cdot K^M{}_{I\alpha} \tag{10}$$

представляют собой базисные векторы в пространстве калибровочной подгруппы. С помощью них вектор действия записывается следующим образом

$$d\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}_\alpha \cdot g \cdot d\varphi^\alpha = \mathfrak{I}_\alpha \cdot dS^\alpha\,.$$

Здесь

$$S^\alpha = g \cdot \varphi^\alpha$$

имеет смысл вектора действия в калибровочной подгруппе.

Частная производная от вектора $\mathsf{S}(x^I)$ по координате пространства-времени записывается так

$$\frac{\partial\mathsf{S}}{\partial x^I} = \mathfrak{I}_\alpha \cdot g \cdot \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^I}\,. \tag{11}$$

Запишем закон умножения базисных векторов, действующий в пространстве калибровочной подгруппы, следующим образом:

$$\mathfrak{I}_\beta \circ \mathfrak{I}_\alpha = \mathfrak{I}_\gamma \cdot C^\gamma{}_{\beta\alpha}\,. \tag{12}$$

Подставляя сюда (10) и учитывая (2), получим

ние, имеем

$$\frac{D\mathsf{S}'}{\partial x^I} \circ \mathsf{S}'^{-1} = \frac{D\mathsf{S}}{\partial x^I} \circ \mathsf{S}^{-1}\,.$$

Или

$$\mathsf{S}'_{,I} \circ \mathsf{S}'^{-1} + \mathsf{S}'_I \circ \mathsf{S}'^{-1} = \mathsf{S}_{,I} \circ \mathsf{S}^{-1} + \mathsf{S}_I \circ \mathsf{S}^{-1}\,.$$

Подставляя сюда (3), получим

$$\mathsf{S}'_{,I} \circ \mathsf{S}'^{-1} + \mathsf{S}'_I \circ \mathsf{S}'^{-1} = \frac{1}{S_0}\,(\mathsf{S}' \circ \mathsf{S}'')_{,I} \circ \mathsf{S}^{-1} + \mathsf{S}_I \circ \mathsf{S}^{-1}\,.$$

Или

$$\begin{aligned} &\mathsf{S}'_{,I} \circ \mathsf{S}'^{-1} + \mathsf{S}'_I \circ \mathsf{S}'^{-1} = \\ &\tfrac{1}{S_0}\,\mathsf{S}'_{,I} \circ \mathsf{S}'' \circ \mathsf{S}''^{-1} \circ \mathsf{S}'^{-1} + \tfrac{1}{S_0}\,\mathsf{S}' \circ \mathsf{S}''_{,I} \circ \mathsf{S}''^{-1} \circ \mathsf{S}'^{-1} + \mathsf{S}_I \circ \mathsf{S}^{-1}\,. \end{aligned}$$

Откуда

$$\mathsf{S}'_I \circ \mathsf{S}'^{-1} = \frac{1}{S_0}\,\mathsf{S}' \circ \mathsf{S}''_{,I} \circ \mathsf{S}''^{-1} \circ \mathsf{S}'^{-1} + \mathsf{S}_I \circ \mathsf{S}^{-1}\,.$$

*Иногда коэффициент g называют *коэффициент связи* в том смысле, что этот коэффициент, связывает параметры θ^α и φ^α.

$$K^M{}_{L\alpha} \cdot K^L{}_{I\beta} = K^M{}_{I\gamma} \cdot C^\gamma{}_{\beta\alpha}\,.$$

Сравнивая это соотношение с (12), заключаем, что базисным векторам $\mathfrak{I}_\alpha$ можно поставить в соответствие матрицы $K^M{}_{L\alpha}$. Это соответствие будем называть *параметрическим представлением* калибровочной подгруппы и записывать так

$$\mathfrak{I}_\alpha \sim K^L{}_{I\alpha}\,.$$

Матрицы $K^L{}_{I\alpha}$ представляют собой *генераторы* калибровочной подгруппы.

Рассмотрим теперь композиционный дифференциал $\delta\mathsf{S}$, являющийся инфинитезимальным приращением вектора действия при изменении группового закона композиции с изменением координат пространства-времени. Этот дифференциал также рассмотрим вблизи единицы калибровочной подгруппы.

$$\begin{gathered}\delta\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^I{}_M \cdot \frac{\delta S^M{}_I(\theta^\alpha)}{\delta\theta^\alpha} \cdot \frac{\delta\theta^\alpha}{\delta\varphi^\alpha} \cdot \frac{\delta\varphi^\alpha}{\partial x^I} \cdot dx^I = \\ \mathfrak{I}^I{}_M \cdot \frac{\delta S^M{}_I(\theta^\alpha)}{\delta\theta^\alpha} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot g \cdot \frac{\delta\varphi^\alpha}{\partial x^I} \cdot dx^I\,.\end{gathered} \tag{13}$$

Учтем, что

$$\frac{1}{S_0}\left.\frac{\delta S^M{}_I(\theta^\alpha)}{\delta\theta^\alpha}\right|_{\theta^\alpha=0} = K^M{}_{I\alpha}\,.$$

В результате получим

$$\delta\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^L{}_M \cdot K^M{}_{L\alpha} \cdot g \cdot \frac{\delta\varphi^\alpha}{\partial x^I} \cdot dx^I\,. \tag{14}$$

Функцию

$$A^\alpha{}_I(x) = \frac{\delta\varphi^\alpha}{\partial x^I}$$

назовем *потенциалом* калибровочного поля. Помимо этого потенциалом калибровочного поля будем называть функцию

$$A^M{}_{LI}(x) = K^M{}_{L\alpha} \cdot A^\alpha{}_I(x)\,.$$

С учетом введенных величин имеем

$$\begin{gathered}\delta\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^L{}_M \cdot K^M{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_I \cdot dx^I = \\ \mathfrak{I}_\alpha \cdot g \cdot A^\alpha{}_I \cdot dx^I = \mathfrak{I}^L{}_M \cdot g \cdot A^M{}_{LI} \cdot dx^I\,.\end{gathered}$$

И для координат этого вектора

$$\delta S^M{}_L = K^M{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_I \cdot dx^I\,. \tag{15}$$

Производная S_I записывается так

$$\frac{\delta\mathsf{S}}{\partial x^I} = \mathfrak{I}_\alpha \cdot g \cdot A^\alpha{}_I\,. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (4), получим соотношение

$$A'^\alpha{}_I = A^\alpha{}_I + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial S''^\alpha}{\partial x^I}\,.$$

которое называется *калибровочным преобразованием* потенциала. Калибровочное преобразование потенциала можно записать еще в следующих разновидностях

$$A'^\alpha{}_I = A^\alpha{}_I + \frac{\partial\varphi''^\alpha}{\partial x^I}\,,$$

$$A'^M{}_{LI} = A^M{}_{LI} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial S''^M{}_L}{\partial x^I}\,.$$

$$A'^M{}_{LI} = A^M{}_{LI} + \frac{\partial\varphi''^M{}_L}{\partial x^I}\,,$$

где использовано обозначение

$$\varphi''^M{}_L = K^M{}_{L\alpha}\,\varphi''^\alpha$$

В том случае, когда фундаментальная частица участвует во взаимодействиях нескольких типов, дифференциал

$$\delta S^M{}_L = \sum_i g_i \cdot K^M{}_{L\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}{}_I \cdot dx^I\,. \tag{17}$$

Здесь индекс i нумерует типы взаимодействий и, соответственно, подгруппы калибровочных преобразований; $A^{\alpha_i}{}_I$ есть потенциал калибровочного поля, соответствующего i-ой подгруппе; суммирование производится по всем взаимодействиям.

III. ГРУППА ПОВОРОТОВ КАК КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА

Линейное преобразование S вектора действия фундаментальной частицы $\boldsymbol{S}$ можно записать в виде произведения двух преобразований, одно из которых поворачивает вектор $\boldsymbol{S}$, не меняя его длины, а другое преобразование, напротив, сохраняет направление вектора $\boldsymbol{S}$, но изменяет его длину. Первое преобразование есть *поворот*, а второе преобразование есть *растяжение*. Далее рассмотрим случай, когда линейные преобразования S представляют собой повороты.

1. Скалярное произведение. Длина вектора

На пространстве действия фундаментальных частиц $\mathbb{S}_e$ определено скалярное произведение векторов. Для $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2 \in \mathbb{S}_e$ скалярное произведение равно

$$\langle \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2\rangle = \langle \mathfrak{e}_I, \mathfrak{e}_K\rangle\,(S_1)^I\,(S_2)^K = g_{IK} \cdot (S_1)^I\,(S_2)^K\,.$$

Величина

$$g_{IK} = \mathfrak{e}_0 \cdot C^0{}_{IK}$$

есть *метрический тензор* в пространстве действия фундаментальных частиц $\mathbb{S}_e$.

Скалярное произведение вектора $\boldsymbol{S}$ на себя есть квадрат его *длины*:

$$\langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S} \rangle = g_{IK} \cdot S^I \cdot S^K \equiv S^2 \,.$$

По определению дифференциал длины векторов действия фундаментальных частиц равен нулю. (Смотри Раздел V Лекции 8.)

2. Калибровочная группа поворотов

Условие сохранения длины вектора $\boldsymbol{S}$ линейным преобразованием S группы поворотов записывается так

$$\langle \mathsf{S}(\boldsymbol{S}), \mathsf{S}(\boldsymbol{S}) \rangle = \langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S} \rangle \,.$$

Отсюда

$$\langle \mathfrak{e}_L, \mathfrak{e}_M \rangle \cdot S^L{}_I \cdot S^M{}_K \cdot S^I \cdot S^K = \langle \mathfrak{e}_I, \mathfrak{e}_K \rangle \cdot S^I \cdot S^K \,.$$

Или

$$g_{LM} \cdot S^L{}_I \cdot S^M{}_K = g_{IK} \,.$$

Или

$$(g_{LM} \cdot S^M{}_K \cdot g^{KN}) \cdot S^L{}_I = \delta^N{}_I \,. \tag{18}$$

Если ввести *сопряженную* матрицу ${}^{+}S^N{}_L$ в соответствии с определением:

$${}^{+}S^N{}_L = g_{LM} \cdot S^M{}_K \cdot g^{KN} \,,$$

то условие принадлежности линейных преобразований к поворотам приобретает вид:

$${}^{+}S^N{}_L = (S^{-1})^N{}_L \,.$$

Повороты составляют группу. Произведение поворотов есть поворот. Действительно, если

$$(\mathsf{S}_1)^{-1} = {}^{+}\mathsf{S}_1 \,, \qquad (\mathsf{S}_2)^{-1} = {}^{+}\mathsf{S}_2 \,,$$

то для

$$\mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\, \mathsf{S}_1 \circ \mathsf{S}_2$$

имеет место

$$\mathsf{S}^{-1} = (\mathsf{S}_2)^{-1} \circ (\mathsf{S}_1)^{-1} = {}^{+}\mathsf{S}_2 \circ {}^{+}\mathsf{S}_1 = {}^{+}(\mathsf{S}_1 \circ \mathsf{S}_2) = {}^{+}\mathsf{S} \,.$$

Обратимся к параметрическому представлению группы поворотов. То есть, будем рассматривать векторы $\mathsf{S} \in \mathbb{S}_I$ в зависимости от безразмерных параметров θ^α. Для группы поворотов такие параметры называются *углы поворота*. Кроме параметров θ^α будем рассматривать параметры φ^α, связанные с θ^α соотношением (6).

Рассматривая однопараметрическое представление группы поворотов по аналогии с Разделом V.1 Лекции 18, получим повороты вокруг оси, задаваемой базисным вектором $\mathfrak{I}$. При этом возможны два случая, которым удовлетворяет квадрат базисного вектора $\mathfrak{I}$. Поворот $\mathsf{S}(\theta)$ принимает вид

$$\mathsf{S}(\theta) = S_0 \cdot (\mathfrak{e}_0 \cdot \cos\theta + \mathfrak{I} \cdot \sin\theta) \tag{19}$$

для

$$\mathfrak{I}^2 = -\mathfrak{e}_0$$

и

$$\mathsf{S}(\theta) = S_0 \cdot (\mathfrak{e}_0 \cdot \cosh\theta + \mathfrak{I} \cdot \sinh\theta) \tag{20}$$

для

$$\mathfrak{I}^2 = \mathfrak{e}_0 \,.$$

В частном случае, когда ось поворота определяется базисным вектором пространства действия $\mathbb{S}_e$, то есть

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{e}_\alpha \,,$$

соотношения (19) и (20) преобразуются в следующие

$$\mathsf{S}(\varphi^\alpha) = S_0 \cdot \Big(\mathfrak{e}_0 \, \cos\big(\tfrac{g \cdot \varphi^\alpha}{S_0}\big) + \mathfrak{e}_\alpha \, \sin\big(\tfrac{g \cdot \varphi^\alpha}{S_0}\big) \Big) \,, \quad \text{для } (\mathfrak{e}_\alpha)^2 = -1 \,; \tag{21}$$

$$\mathsf{S}(\varphi^\alpha) = S_0 \cdot \Big(\mathfrak{e}_0 \, \cosh\big(\tfrac{g \cdot \varphi^\alpha}{S_0}\big) + \mathfrak{e}_\alpha \, \sinh\big(\tfrac{g \cdot \varphi^\alpha}{S_0}\big) \Big) \,, \quad \text{для } (\mathfrak{e}_\alpha)^2 = 1 \,. \tag{22}$$

(Здесь по α нет суммирования.)

Пусть повороты осуществляются в подпространстве пространства действия $\mathbb{S}_e$, построенном на базисных векторах $\mathfrak{e}_\alpha$. Это подпространство обозначим $\mathbb{S}_{e_\alpha}$. Углы базисных поворотов обозначаются соответственно θ^α. Оси базисных поворотов определяются базисными векторами $\mathfrak{e}_\alpha$ пространства действия фундаментальных частиц. Подпространство $\mathbb{S}_{e_\alpha}$ является алгеброй, закон композиции которой запишем так

$$\mathfrak{e}_\beta \circ \mathfrak{e}_\alpha = \mathfrak{e}_\gamma \cdot C^\gamma{}_{\beta\alpha} \,. \tag{23}$$

Повороты S представляются векторами этой алгебры. Для этой алгебры из условия ассоциативности имеем

$$C^\kappa{}_{\lambda\alpha} \cdot C^\lambda{}_{\mu\beta} = C^\kappa{}_{\mu\gamma} \cdot C^\gamma{}_{\beta\alpha} \,. \tag{24}$$

Отсюда следует регулярное параметрическое представление алгебры $\mathbb{S}_{e_\alpha}$

$$\mathfrak{e}_\alpha \sim C^\gamma{}_{\beta\alpha} \,.$$

Матрицы поворота в алгебре $\mathbb{S}_{e_\alpha}$ имеют вид

$$S^{\gamma}{}_{\beta}(\varphi^{\alpha}) = S_0 \cdot \left(\delta^{\gamma}{}_{\beta} \cdot \cos\left(\tfrac{g\cdot\varphi^{\alpha}}{S_0}\right) + C^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \cdot \sin\left(\tfrac{g\cdot\varphi^{\alpha}}{S_0}\right)\right)\,, \quad \text{для } (\mathfrak{e}_{\alpha})^2 = -1\,; \tag{25}$$

$$S^{\gamma}{}_{\beta}(\varphi^{\alpha}) = S_0 \cdot \left(\delta^{\gamma}{}_{\beta} \cdot \cosh\left(\tfrac{g\cdot\varphi^{\alpha}}{S_0}\right) + C^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \cdot \sinh\left(\tfrac{g\cdot\varphi^{\alpha}}{S_0}\right)\right)\,, \quad \text{для } (\mathfrak{e}_{\alpha})^2 = 1\,, \tag{26}$$

Алгебра $\mathbb{S}_{e_\alpha}$ является пространством неприводимого представления группы поворотов. Матрицы $C^{\gamma}{}_{\beta\alpha}$ являются *генераторами* группы поворотов в пространстве неприводимого представления.

Если пространством представления группы поворотов является пространство действия фундаментальной частицы, то соотношение (24) принимает вид

$$C^{K}{}_{L\beta} \cdot C^{L}{}_{I\alpha} = C^{K}{}_{I\gamma} \cdot C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\,. \tag{27}$$

И в этом случае *параметрическое представление* алгебры поворотов записывать так

$$\mathfrak{e}_{\alpha} \sim C^{L}{}_{I\alpha}\,.$$

Матрицы поворота в пространстве действия таковы

$$S^{K}{}_{L}(\varphi^{\alpha}) = S_0 \cdot \left(\delta^{K}{}_{L} \cdot \cos\left(\tfrac{g\cdot\varphi^{\alpha}}{S_0}\right) + C^{K}{}_{L\alpha} \cdot \sin\left(\tfrac{g\cdot\varphi^{\alpha}}{S_0}\right)\right)\,, \quad \text{для } (\mathfrak{e}_{\alpha})^2 = -1\,; \tag{28}$$

$$S^{K}{}_{L}(\varphi^{\alpha}) = S_0 \cdot \left(\delta^{K}{}_{L} \cdot \cosh\left(\tfrac{g\cdot\varphi^{\alpha}}{S_0}\right) + C^{K}{}_{L\alpha} \cdot \sinh\left(\tfrac{g\cdot\varphi^{\alpha}}{S_0}\right)\right)\,, \quad \text{для } (\mathfrak{e}_{\alpha})^2 = 1\,, \tag{29}$$

Генераторами группы поворотов служат матрицы $C^{L}{}_{I\alpha}$.

Рассмотрим дифференциал $d\mathsf{S}$ вблизи единицы калибровочной подгруппы.

$$\begin{aligned} d\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^{I}{}_{K} \cdot \tfrac{\partial S^{K}{}_{I}(\theta^{\alpha})}{\partial\theta^{\alpha}} \cdot \tfrac{\partial\theta^{\alpha}}{\partial\varphi^{\alpha}} \cdot \tfrac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x^I} \cdot dx^I = \\ \mathfrak{I}^{I}{}_{K} \cdot \tfrac{\partial S^{K}{}_{I}(\theta^{\alpha})}{\partial\theta^{\alpha}} \cdot \tfrac{1}{S_0} \cdot g \cdot \tfrac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x^I} \cdot dx^I\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{S_0}\left.\frac{\partial S^{K}{}_{I}(\theta^{\alpha})}{\partial\theta^{\alpha}}\right|_{\theta^{\alpha}=0} = C^{K}{}_{I\alpha}\,,$$

получим

$$d\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^{I}{}_{K} \cdot C^{K}{}_{I\alpha} \cdot g \cdot \frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x^I} \cdot dx^I\,. \tag{31}$$

Базисные векторы осей поворотов

$$\mathfrak{I}^{I}{}_{K} \cdot C^{K}{}_{I\alpha} \tag{32}$$

представляют собой базисные векторы $\mathfrak{e}_{\alpha}$ в пространстве действия. С помощью них дифференциал вектора поворота записывается следующим образом

$$d\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{e}_{\alpha} \cdot g \cdot \frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x^I} \cdot dx^I\,.$$

Рассмотрим теперь композиционный дифференциал $\delta\mathsf{S}$ вблизи единицы калибровочной группы.

$$\begin{aligned} \delta\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^{I}{}_{K} \cdot \tfrac{\delta S^{K}{}_{I}(\theta^{\alpha})}{\delta\theta^{\alpha}} \cdot \tfrac{\delta\theta^{\alpha}}{\delta\varphi^{\alpha}} \cdot \tfrac{\delta\varphi^{\alpha}}{\partial x^I} \cdot dx^I = \\ \mathfrak{I}^{I}{}_{K} \cdot \tfrac{\delta S^{K}{}_{I}(\theta^{\alpha})}{\delta\theta^{\alpha}} \cdot \tfrac{1}{S_0} \cdot g \cdot \tfrac{\delta\varphi^{\alpha}}{\partial x^I} \cdot dx^I\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Учтем, что

$$\frac{1}{S_0}\left.\frac{\delta S^{K}{}_{I}(\theta^{\alpha})}{\delta\theta^{\alpha}}\right|_{\theta^{\alpha}=0} = C^{K}{}_{I\alpha}\,.$$

В результате получим

$$\delta\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^{L}{}_{K} \cdot C^{K}{}_{L\alpha} \cdot g \cdot \frac{\delta\varphi^{\alpha}}{\partial x^I} \cdot dx^I\,. \tag{34}$$

Функция

$$A^{\alpha}{}_{I}(x) = \frac{\delta\varphi^{\alpha}}{\partial x^I}$$

есть *потенциал* калибровочного поля. С учетом введенных величин имеем

$$\delta\mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^{L}{}_{K} \cdot C^{K}{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^{\alpha}{}_{I} \cdot dx^I = \mathfrak{e}_{\alpha} \cdot g \cdot A^{\alpha}{}_{I} \cdot dx^I\,.$$

И для координат этого вектора

$$\delta S^{K}{}_{L} = C^{K}{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^{\alpha}{}_{I} \cdot dx^I\,. \tag{35}$$

В том случае, когда фундаментальная частица участвует во взаимодействиях нескольких типов, определяемых несколькими группами поворотов, композиционный дифференциал записывается так

$$\delta S^{K}{}_{L} = \sum_i g_i \cdot C^{K}{}_{L\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}{}_{I} \cdot dx^I\,, \tag{36}$$

где индекс i нумерует типы взаимодействий и, соответственно, подгруппы калибровочных преобразований; $A^{\alpha_i}{}_{I}$ есть потенциал калибровочного поля, соответствующего i-ой группе; суммирование производится по всем взаимодействиям.

Поворот вокруг произвольной оси $\mathfrak{I}$ может быть разложен по базисным поворотам.

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{e}_{\alpha} \cdot C^{\alpha}\,. \tag{37}$$

Здесь C^{α} – "направляющие косинусы" базисного вектора оси поворота $\mathfrak{I}$

$$C^{\alpha} = \left.\frac{\partial\theta^{\alpha}}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}\,.$$

Из (37) вытекает условие, которому удовлетворяют "направляющие косинусы"

$$(\mathfrak{I})^2 = (\mathfrak{e}_\alpha)^2 \cdot (C^\alpha)^2 \,. \tag{38}$$

В этом случае композиционный дифференциал

$$\delta \mathsf{S}(x^I) = \mathfrak{I}^L{}_K \cdot C^K{}_{L\alpha} \cdot C^\alpha \cdot g \cdot A_I \cdot dx^I \,,$$

где потенциал калибровочного поля является однокомпонентным

$$A_I = \frac{\delta \varphi}{\partial x^I} \,.$$

И для координат этого вектора имеем

$$\delta S^K{}_L = C^K{}_{L\alpha} \cdot C^\alpha \cdot g \cdot A_I \cdot dx^I \,. \tag{39}$$

В том случае, когда фундаментальная частица участвует во взаимодействиях нескольких типов, определяемых несколькими осями поворотов, композиционный дифференциал записывается так

$$\delta S^K{}_L = \sum_i g_i \cdot C^K{}_{L\alpha_i} \cdot C^{\alpha_i} \cdot A^i{}_I \cdot dx^I \,, \tag{40}$$

где индекс i нумерует типы взаимодействий и, соответственно, оси поворотов; $A^i{}_I$ есть потенциал калибровочного поля, соответствующий i-ой оси поворота; суммирование производится по всем осям поворотов (всем взаимодействиям).

3. Повороты в пространстве действия лептонов (алгебре Клиффорда)

Перейдем от пространства действия $\mathbb{S}_\mathfrak{e}$ к пространству действия лептонов $\mathbb{C}_4$ и к группе поворотов в этом пространстве. Для этого необходимо положить

$$S_0 = \hbar \,, \quad \mathfrak{e} = \varepsilon \,,$$

а матрицы $C^K{}_{I\alpha}$ отождествить со структурными матрицами алгебры Клиффорда.

В результате представление поворотов в алгебре Клиффорда векторами этой алгебры записывается так:

$$\mathsf{S}(\varphi^\alpha) = \hbar \cdot \Big(\varepsilon_0 \cos\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big) + \varepsilon_\alpha \sin\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big)\Big) \,, \quad \text{для } (\varepsilon_\alpha)^2 = -1 \,; \tag{41}$$

$$\mathsf{S}(\varphi^\alpha) = \hbar \cdot \Big(\varepsilon_0 \cosh\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big) + \varepsilon_\alpha \sinh\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big)\Big) \,, \quad \text{для } (\varepsilon_\alpha)^2 = 1 \,. \tag{42}$$

Таким образом, для базисных векторов осей поворотов имеем

$$\mathfrak{I}^I{}_K \cdot C^K{}_{I\alpha} = \varepsilon_\alpha \,.$$

Матрицы поворота пространства алгебры Клиффорда вокруг оси, задаваемой вектором ε_α, записываются так

$$S^K{}_L(\varphi^\alpha) = \hbar \cdot \Big(\delta^K{}_L \cdot \cos\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big) + C^K{}_{L\alpha} \cdot \sin\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big)\Big) \,, \quad \text{для } (\varepsilon_\alpha)^2 = -1 \,; \tag{43}$$

$$S^K{}_L(\varphi^\alpha) = \hbar \cdot \Big(\delta^K{}_L \cdot \cosh\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big) + C^K{}_{L\alpha} \cdot \sinh\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big)\Big) \,, \quad \text{для } (\varepsilon_\alpha)^2 = 1 \,, \tag{44}$$

по индексу α нет суммирования.

Матрицы поворота пространства алгебры Клиффорда вокруг оси, задаваемой вектором $\mathfrak{I}$, записываются так

$$S^K{}_L(\varphi) = \hbar \cdot \big(\delta^K{}_L \cdot \cos\big(\tfrac{g\cdot\varphi}{\hbar}\big) + C^K{}_{L\alpha} \cdot C^\alpha \cdot \sin\big(\tfrac{g\cdot\varphi}{\hbar}\big)\big) \,, \quad \text{для } (\mathfrak{I})^2 = -1 \,; \tag{45}$$

$$S^K{}_L(\varphi) = \hbar \cdot \big(\delta^K{}_L \cdot \cosh\big(\tfrac{g\cdot\varphi}{\hbar}\big) + C^K{}_{L\alpha} \cdot C^\alpha \cdot \sinh\big(\tfrac{g\cdot\varphi}{\hbar}\big)\big) \,, \quad \text{для } (\mathfrak{I})^2 = 1 \,, \tag{46}$$

В дальнейшем нас будут интересовать две калибровочные группы.

1. Поворот в алгебре Клиффорда вокруг оси, задаваемой базисным вектором

$$\varepsilon_{21} \,.$$

В этом случае пространством неприводимого представления группы поворотов является алгебра Клиффорда $\mathbb{C}_1$, построенная на базисных векторах

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_{21} \,.$$

А эта алгебра изоморфна алгебре комплексных чисел и, следовательно, рассматриваемая группа поворотов изоморфна группе $U(1)$.

Генератором группы поворотов в пространстве действия лептонов является матрица (смотрите Лекцию 4 Раздел V.5, стр.7.)

$$
C^{K}{}_{L21} =
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \cline{2-17}
32 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{2-17}
42 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \cline{2-17}
1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ \cline{2-17}
134 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \cline{2-17}
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & 1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & 1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 0 \\
 & \mathbb{1} & & & 34 \\ \hline
 & & \mathbb{1} & & 123 \\
 & & & \mathbb{1} & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
C^{K}{}_{L4} =
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \cline{2-17}
32 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
13 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
21 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \cline{2-17}
42 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
14 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
34 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ \cline{2-17}
1 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\
123 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ \cline{2-17}
134 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
234 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
124 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{2-17}
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & & & 1 & & 13 \\
 & & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & -1 & & & & 14 \\
 & & & & & -1 & & & 34 \\ \hline
 & & -1 & & & & & & 2 \\
 & & & -1 & & & & & 123 \\
1 & & & & & & & & 234 \\
 & 1 & & & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & & \mathbb{1} & 0 \\
 & & -\mathbb{1} & & 34 \\ \hline
 & -\mathbb{1} & & & 123 \\
\mathbb{1} & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

2. Повороты в алгебре Клиффорда вокруг осей, задаваемых базисными векторами

$$\varepsilon_4, \quad \varepsilon_{123}, \quad \varepsilon_{1324}\,.$$

В этом случае пространством неприводимого представления группы поворотов является алгебра Клиффорда $\mathbb{C}_2$, построенная на базисных векторах

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_{123}, \quad \varepsilon_{1324}\,,$$

а группа поворотов изоморфна группе $SU(2)$.

Генераторами группы поворотов в пространстве действия лептонов являются матрицы (смотрите Лекцию 4 Раздел V.5, стр.7,8,9.)

$$
C^{K}{}_{L123} =
\begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \cline{2-17}
32 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
13 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
21 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
0 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\ \cline{2-17}
42 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
14 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
1324 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
34 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \cline{2-17}
1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
2 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
3 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
123 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \cline{2-17}
134 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
234 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
4 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
124 & & & & & & & & -1 & & & & & & & & \\ \cline{2-17}
\end{array}
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & & & -1 & & & & 13 \\
 & & & & & -1 & & & 0 \\
 & & & & & & 1 & & 14 \\
 & & & & & & & 1 & 34 \\ \hline
1 & & & & & & & & 2 \\
 & 1 & & & & & & & 123 \\
 & & -1 & & & & & & 234 \\
 & & & -1 & & & & & 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & & -\mathbb{1} & & 0 \\
 & & & \mathbb{1} & 34 \\ \hline
\mathbb{1} & & & & 123 \\
 & -\mathbb{1} & & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
C^K{}_{L1324} = \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i \begin{array}{|cccc|cccc|l}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & & 1 & & & & & & 13 \\
 & & & 1 & & & & & 0 \\
1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & & 1 & & 2 \\
 & & & & & & & 1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & 1 & & & 124 \\ \hline
\end{array}
\quad = i \begin{array}{|cc|cc|l}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & & & 0 \\
\mathbb{1} & & & & 34 \\ \hline
 & & & \mathbb{1} & 123 \\
 & & \mathbb{1} & & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

IV. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ С КАЛИБРОВОЧНЫМ ПОЛЕМ

1. Алгебра действия фундаментальной частицы и калибровочного поля

Мы считаем, что пространство действия фундаментальной частицы и калибровочного поля $\mathbb{S}$ представляет собой сумму двух векторных пространств: действия фундаментальной частицы $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ и действия калибровочного поля $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$. Иначе говоря, вектор действия в этом случае представлен суммой двух составляющих

$$\boldsymbol{S} + \mathsf{S}\,.$$

Здесь вектор $\boldsymbol{S} \in \mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$, а вектор $\mathsf{S} \in \mathbb{S}_{\mathfrak{J}}$.

Векторы $\boldsymbol{S}$ и S допускают разложение по базисным векторам

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{e}_K \cdot S^K\,, \qquad \mathsf{S} = \mathfrak{J}^L{}_K \cdot S^K{}_L\,.$$

Таким образом, вектор действия в $\mathbb{S}$ может быть разложен по базисным векторам следующим образом

$$\mathfrak{e}_K \cdot S^K + \mathfrak{J}^L{}_K \cdot S^K{}_L\,.$$

Закон умножения векторов действия в $\mathbb{S}$ мы запишем так:

$$\boldsymbol{S} + \mathsf{S} = \frac{1}{S_0}\,(\boldsymbol{S}_1 + \mathsf{S}_1) \circ (\boldsymbol{S}_2 + \mathsf{S}_2)\,. \tag{47}$$

где S_0 есть постоянная, имеющая размерность действия.

Это умножение определено, если определено умножение пар векторов каждого вида. А эти произведения, в свою очередь, определены, если определены произведения соответствующих базисных векторов. В Лекции 17 мы записали законы умножения базисных векторов $\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{J}$ следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_L \cdot C^L{}_{KI}\,, \\
\mathfrak{J}^L{}_K \circ \mathfrak{J}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{J}^L{}_M\,, \\
\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{J}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{e}_M\,, \\
\mathfrak{J}^I{}_M \circ \mathfrak{e}_K = 0\,.
\end{gathered} \tag{48}
$$

В результате множество векторов $\mathbb{S}$ становится алгеброй.

2. Уравнение структуры алгебры действия фундаментальной частицы в калибровочном поле

Как и для всякой алгебры, для алгебры действия $\mathbb{S}$ имеет место уравнение структуры

$$d_2 d_1(\boldsymbol{S} + \mathsf{S}) = \frac{1}{S_0} \cdot d_1(\boldsymbol{S} + \mathsf{S}) \circ d_2(\boldsymbol{S} + \mathsf{S})\,. \tag{49}$$

Для того, чтобы получить из этого уравнения уравнение структуры алгебры действия фундаментальной частицы в калибровочном поле, необходимо рассмотреть проекцию этого уравнения на пространство действия фундаментальной частицы $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$. В результате получим

$$d_2 d_1 \boldsymbol{S} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ d_2(\boldsymbol{S} + \mathsf{S})\,. \tag{50}$$

И далее необходимо учесть, что дифференциал действия калибровочного поля является композиционным, поэтому уравнение (50) нужно переписать так

$$d_2 d_1 \boldsymbol{S} = \frac{1}{S_0} \cdot d_1 \boldsymbol{S} \circ (d_2 \boldsymbol{S} + \delta_2 \mathsf{S})\,. \tag{51}$$

Подставим в (51) выражения дифференциалов через дифференциалы координат

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{e}_L \cdot d_2 d_1 S^L = {} & \tfrac{1}{S_0} \cdot (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{e}_I)\, d_1 S^K\, d_2 S^I + \\
& \tfrac{1}{S_0} \cdot (\mathfrak{e}_K \circ \mathfrak{J}^I{}_M)\, d_1 S^K\, \delta_2 S^M{}_I\,.
\end{aligned}
$$

Пользуясь законом умножения базисных векторов (48), получим уравнение структуры в координатной форме

$$d_2 d_1 S^L = \frac{1}{S_0} \cdot C^L{}_{KI} \cdot d_2 S^I \cdot d_1 S^K + \frac{1}{S_0} \cdot \delta_2 S^L{}_I \cdot d_1 S^I\,. \tag{52}$$

3. Квантовые постулаты механики фундаментальной частицы в калибровочном поле

Уравнения структуры, по существу, и есть квантовые постулаты, на которых строится квантовая механика фундаментальной частицы в калибровочном поле. Мы перейдем к более привычной записи квантовых постулатов, если введем переобозначения

$$d_1\boldsymbol{S} = \psi\,, \quad d_2 = d\,, \quad \delta_2 = \delta\,.$$

Тогда вместо (51) получим

$$d\psi = \frac{1}{S_0}\,\psi \circ (dS + \delta\mathsf{S})\,,$$

а вместо (52) получим

$$d\psi^L = \frac{1}{S_0}\,C^L{}_{KI} \cdot dS^I \cdot \psi^K + \frac{1}{S_0}\,\delta S^L{}_K \cdot \psi^K\,. \qquad (53)$$

Если учесть

$$d\boldsymbol{S} = p_M \cdot dx^M\,, \qquad \delta\mathsf{S} = \mathsf{S}_M \cdot dx^M$$

и

$$dS^I = p^I{}_M \cdot dx^M\,, \qquad \delta S^L{}_K = K^L{}_{K\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M\,,$$

то получим квантовые постулаты в векторном виде

$$d\psi = \frac{1}{S_0}\,\psi \circ (p_M + \mathsf{S}_M)\,dx^M\,.$$

и в координатном виде

$$\begin{aligned} d\psi^L = {}& \tfrac{1}{S_0}\,C^L{}_{KI} \cdot p^I{}_M \cdot dx^M \cdot \psi^K + \\ & \tfrac{1}{S_0}\,K^L{}_{K\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_M \cdot dx^M \cdot \psi^I\,. \end{aligned} \qquad (54)$$

Здесь ψ есть волновая функция фундаментальной частицы, которая представляет собой частный дифференциал вектора действия фундаментальной частицы. Отсюда

$$\partial_M\psi^I(x) - \frac{1}{S_0}\,K^I{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_M \cdot \psi^L = \frac{1}{S_0}\,C^I{}_{LR} \cdot p^R{}_M \cdot \psi^L\,. \qquad (55)$$

Эти уравнения есть *квантовые постулаты* для фундаментальной частицы в калибровочном поле.

Используя соотношение (17)

$$\delta S^I{}_L = \sum_i g_i \cdot K^I{}_{L\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}{}_M \cdot dx^M\,,$$

получим квантовые постулаты для случая, когда фундаментальная частица участвует во взаимодействиях нескольких типов

$$\begin{aligned} \partial_M\psi^I(x) - \tfrac{1}{S_0}\big(\textstyle\sum_i g_i \cdot K^I{}_{L\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}{}_M\big) \cdot \psi^L = {}& \\ \tfrac{1}{S_0}\,C^I{}_{LR} \cdot p^R{}_M \cdot \psi^L\,. & \end{aligned} \qquad (56)$$

4. Волновое уравнение для фундаментальной частицы в калибровочном поле

Для вывода волнового уравнения для фундаментальной частицы в калибровочном поле воспользуемся соотношениями (55) и (56). Умножим обе части уравнения (55) на структурные константы $C^{MK}{}_I$, выполнив соответствующие суммирования. Получим

$$\begin{aligned} C^{MK}{}_I\,\Big(\partial_M\psi^I(x) - \tfrac{1}{S_0}\,K^I{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_M \cdot \psi^L\Big) = {}& \\ \tfrac{1}{S_0}\,C^{MK}{}_I \cdot C^I{}_{LR} \cdot p^R{}_M \cdot \psi^L\,. & \end{aligned} \qquad (57)$$

(По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.)

Это уравнение есть *волновое уравнение для фундаментальной частицы в калибровочном поле.*

Из (56) получим волновое уравнение для фундаментальной частицы, участвующей во взаимодействиях нескольких типов:

$$\begin{aligned} C^{MK}{}_I\,\Big(\partial_M\psi^I(x) - \tfrac{1}{S_0}\big(\textstyle\sum_i g_i \cdot K^I{}_{L\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}{}_M\big) \cdot \psi^L\Big) = {}& \\ \tfrac{1}{S_0}\,C^{MK}{}_I \cdot C^I{}_{LR} \cdot p^R{}_M \cdot \psi^L\,. & \end{aligned} \qquad (58)$$

5. Волновое уравнение для лептонов в калибровочном поле

Обратимся к волновому уравнению для фундаментальной частицы в калибровочном поле (57).

Перейдем от пространства действия $\mathbb{S}_{\mathfrak{e}}$ к пространству действия лептонов $\mathbb{C}_4$ и к группе поворотов в этом пространстве (см. Раздел 4.3). Для этого необходимо положить

$$S_0 = \hbar\,,$$

а матрицы $K^I{}_{L\alpha}$ отождествить со структурными матрицами алгебры Клиффорда.

Далее мы будем рассматривать два случая.

1. Волновая функция $\psi(x)$ и потенциалы зависят только от координат пространства-времени СТО X.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & C^{mK}{}_I \cdot \big(\partial_m\psi^I(x) - \tfrac{1}{\hbar} \cdot C^I{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_m \cdot \psi^L\big) \\ & = \tfrac{1}{\hbar}\,C^{MK}{}_I \cdot C^I{}_{LR} \cdot p^R{}_M \cdot \psi^L\,, \qquad (m = 1,2,3,4)\,. \end{aligned} \qquad (59)$$

В этом уравнении $C^{mK}{}_I$ есть структурные матрицы пространства-времени X в пространстве лептонов $\mathbb{C}_4$.

2. Волновая функция $\psi(x)$ зависит только от координат пространства-времени СТО X, а потенциалы зависят от координат обобщенного пространства-времени $\mathbb{X}$.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & C^{mK}{}_I \cdot \partial_m\psi^I(x) - \tfrac{1}{\hbar} \cdot C^{MK}{}_I \cdot C^I{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_M \cdot \psi^L \\ & = \tfrac{1}{\hbar}\,C^{MK}{}_I \cdot C^I{}_{LR} \cdot p^R{}_M \cdot \psi^L\,, \qquad (m = 1,2,3,4)\,. \end{aligned} \qquad (60)$$

Эти уравнения и есть волновые уравнения для лептонов в калибровочном поле.

Далее в соответствии с Разделом II Лекции 9 положим, что обобщенный импульс $p^R{}_M$ имеет только две компоненты

$$p^0{}_0 = \partial_0 S^0 = -\frac{\mathrm{m}\,c}{2}\,, \qquad p^{34}{}_0 = \partial_0 S^{34} = -\frac{\mathrm{m}\,c}{2}\,.$$

Если мы подставим введенные величины в уравнение (59), то получим волновое уравнение для лептонов в калибровочном поле в окончательном виде:

$$\begin{gathered} C^{mK}{}_I \cdot (\partial_m \psi^I(x) - \tfrac{1}{\hbar} \cdot C^I{}_{L\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_m \cdot \psi^L) + \\ \tfrac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(\delta^K{}_L + C^K{}_{L34})\,\psi^L = 0\,. \end{gathered} \tag{61}$$

Из (60) получим волновое уравнение для лептонов, участвующих во взаимодействиях нескольких видов, например, в электромагнитном и слабом взаимодействиях,

$$\begin{gathered} C^{mK}{}_I \cdot (\partial_m \psi^I(x) - \tfrac{1}{\hbar}\,(\textstyle\sum_i g_i\, C^I{}_{L\alpha_i} \cdot A^{\alpha_i}{}_m) \cdot \psi^L) + \\ \tfrac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(\delta^K{}_L + C^K{}_{L34})\,\psi^L = 0\,. \end{gathered} \tag{62}$$

V. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕПТОНОВ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

1. Уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле

В этом Разделе основным для нас будет уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле. Мы полагаем, что взаимодействие электрона с электромагнитным полем связано с преобразованием действия электрона калибровочной группой специального вида. Мы будем полагать, что эта группа есть группа поворотов, и будем называть ее *электрической.*

Поставим следующую задачу: путем сравнения уравнения Дирака с уравнением (61) определить (идентифицировать) электрическую группу.

Приведем уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле. В принятых нами ранее обозначениях смотрите Лекцию 9 Раздел II оно запишется следующим образом

$$\begin{gathered} C^{mK_1}{}_{I_1} \cdot (\partial_m \psi^{I_1}(x) + \tfrac{1}{\hbar} \cdot C^{I_1}{}_{L_1} \cdot e \cdot A_m \cdot \psi^{L_1}) + \\ \tfrac{\mathrm{m}_e\,c}{2\,\hbar}\,(\delta^{K_1}{}_{L_1} + C^{K_1}{}_{L_1 34})\,\psi^{L_1} = 0\,. \end{gathered} \tag{63}$$

Здесь индексы с цифрой 1 внизу $(A_1, B_1, I_1, K_1, L_1)$ принимают значения*

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,;$$

*Иначе говоря, уравнение Дирака относится к первому сжатому представлению алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$

e – заряд электрона;

A_m – потенциал электромагнитного поля.

Входящие в уравнение Дирака матрицы приведем для кватернионного представления

$$C^{0A_1}{}_{B_1} \sim \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 123 \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}, \qquad C^{1A_1}{}_{B_1} \sim i \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 123 \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^1 \\ \hline \sigma^1 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array},$$

$$C^{2A_1}{}_{B_1} \sim i \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 123 \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^2 \\ \hline \sigma^2 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}, \qquad C^{3A_1}{}_{B_1} \sim i \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 123 \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^3 \\ \hline \sigma^3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array},$$

$$C^{4A_1}{}_{B_1} \sim -i \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 123 \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|}\hline & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}, \qquad C^{A_1}{}_{B_1} \sim i \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 123 \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}.$$

Опираясь на Раздел II Лекции 5, запишем уравнение Дирака в кватернионном представлении:

$$\begin{aligned} \Bigg(-i \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \; \bigg(\partial_4 + \tfrac{i \cdot e \cdot A_4}{\hbar} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \bigg) \\ + i \begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline \end{array} \; \bigg(\partial_a + \tfrac{i \cdot e \cdot A_a}{\hbar} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \bigg) \\ + \frac{\mathrm{m}_e\,c}{\hbar} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \Bigg) \begin{vmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^{123} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Прежде, чем выполнить сравнение уравнений, необходимо переписать уравнение (61) в первом сжатом представлении. Получим

$$\begin{gathered} C^{mK_1}{}_{I_1} \cdot (\partial_m \psi^{I_1}(x) - \tfrac{1}{\hbar} \cdot C^{I_1}{}_{L_1\alpha} \cdot g \cdot A^\alpha{}_m \cdot \psi^{L_1}) + \\ \tfrac{\mathrm{m}_e\,c}{2\,\hbar}\,(\delta^{K_1}{}_{L_1} + C^{K_1}{}_{L_1 34})\,\psi^{L_1} = 0\,. \end{gathered}$$

Сравнение этого уравнения и (63) показывает, что знаки вторых слагаемых совпадут, если положить

$$g = -e\,.$$

После этого наша задача сводится к тому, чтобы среди матриц алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$ найти матрицу $C^{I_1}{}_{L_1}$, которая в первом сжатом кватернионном представлении имеет вид

$$C^{A_1}{}_{B_1} \sim i \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 0 & 123 \end{array} & \\ \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbb{1} & \\ \hline & \mathbb{1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 123 \end{array} \end{array}$$

Из результатов Лекции 4 Раздел III.1 следует, что такая матрица существует и это матрица

$$C^{A_1}{}_{B_1 21}\,,$$

то есть $\alpha = 21$. Таким образом, электрическая группа – это группа поворотов в пространстве действия электрона относительно оси ε_{21}. Она имеет вид

$$\mathsf{S}(\theta) = \hbar \cdot (\varepsilon_0 \cdot \cos\theta - \varepsilon_{21} \cdot \sin\theta)$$

Эта группа изоморфна группе $U(1)$.

В заключении этого Раздела запишем уравнение Дирака через правые и левые компоненты волновой функции электрона. Такая запись сделает наши дальнейшие выкладки менее громоздкими. Уравнение Дирака (63) можно записать так

$$
\begin{aligned}
&i\,(\partial_4 + \tfrac{i\cdot e\cdot A_4}{\hbar})\Psi^{123} + i\,\sigma^a\,(\partial_a + \tfrac{i\cdot e\cdot A_a}{\hbar})\Psi^{123} = \frac{\mathrm{m}_e\,c}{\hbar}\,\Psi^0\,,\\
&i\,(\partial_4 + \tfrac{i\cdot e\cdot A_4}{\hbar})\Psi^{0} \quad - i\,\sigma^a\,(\partial_a + \tfrac{i\cdot e\cdot A_a}{\hbar})\Psi^{0} \quad = \frac{\mathrm{m}_e\,c}{\hbar}\,\Psi^{123}\,.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Теперь введем обозначения

$\Psi^{123} = e_{\mathrm{R}}$ – правая компонента волновой функции электрона,

$\Psi^{0} = e_{\mathrm{L}}$ – левая компонента волновой функции электрона.

Кроме того, матрицы $(1, \sigma^a)$ обозначим γ_1^m, а матрицы $(1, -\sigma^a)$ обозначим γ_2^m. То есть,

$$
\gamma_1^m = \{\gamma_1^4\,,\gamma_1^a\} = \{1\,,\sigma^a\}\,,\quad \gamma_2^m = \{\gamma_2^4\,,\gamma_2^a\} = \{1\,,-\sigma^a\}\,.
$$

Тогда уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле можно записать так

$$
\begin{aligned}
i\,\gamma_1^m\left(\partial_m + \frac{i\,e\,A_m}{\hbar}\right) e_{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{m}_e\,c}{\hbar}\,e_{\mathrm{L}}\,,\\
i\,\gamma_2^m\left(\partial_m + \frac{i\,e\,A_m}{\hbar}\right) e_{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{m}_e\,c}{\hbar}\,e_{\mathrm{R}}\,,
\end{aligned}
$$

2. Волновое уравнение для лептонов в электромагнитном поле

В предыдущем Разделе мы на основании уравнения Дирака определили электрическую группу – группу, ответственную за электромагнитное взаимодействие лептонов. Однако, в Разделе V Лекции 5 и Разделе I Лекции 9 мы выяснили, что уравнение Дирака (63) записано в первом сжатом представлении и его следует считать приближенным. Поэтому заключение предыдущего Раздела относительно электрической группы следует считать приближенным. Здесь мы рассмотрим электрическую группу в общем случае. В общем случае волновым уравнением для лептонов, взаимодействующих с электромагнитным полем, является уравнение (61).

В соответствии с результатами Раздела IV Лекции 9, уравнение (61) относится к двум лептонам одного поколения, например к электрону и его нейтрино. Поэтому в итоге система уравнений должна разделиться на две, одна из которых относится к электрону, а другая к нейтрино. Причем потенциал электромагнитного поля должен входить только в первую систему уравнений. Из этого условия и будем определять электрическую группу. К успеху приводят следующие соображения.

Выделим в пространстве $\mathbb{C}_4$ плоскость, построенную на базисных векторах ε_{21} и ε_{1324}, и выберем в этой плоскости ось поворота $\mathfrak{I}$, равноудаленную от осей ε_{21} и ε_{1324}. Группу поворотов относительно оси $\mathfrak{I}$ будем считать электрической группой в общем случае. Таким образом, электрическая группа определена функцией

$$
\mathsf{S}(\theta) = \hbar\cdot(\varepsilon_0\cdot\cos\theta - \mathfrak{I}\cdot\sin\theta)
$$

или

$$
\mathsf{S}(\varphi) = \hbar\cdot\left(\varepsilon_0\cdot\cos\Big(\frac{g\cdot\varphi}{\hbar}\Big) - \mathfrak{I}\,\sin\Big(\frac{g\cdot\varphi}{\hbar}\Big)\right)\,. \tag{65}
$$

Поворот вокруг оси $\mathfrak{I}$ может быть разложен на повороты вокруг базисных осей на основании формулы

$$
\mathfrak{I} = \varepsilon_{21}\cdot C^{21} + \varepsilon_{1324}\cdot C^{1324}\,.
$$

Здесь C^{21} и C^{1324} соответствующие "направляющие косинусы". По условию

$$
C^{21} = C^{1324} = C\,.
$$

Таким образом,

$$
\mathfrak{I} = (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{1324})\cdot C\,.
$$

Введенная группа поворотов изоморфна группе $U(1)$, так как

$$
\mathfrak{I}^2 = ((\varepsilon_{21})^2 + (\varepsilon_{1324})^2)\cdot C^2 = -\varepsilon_0\,,
$$

при этом нужно учесть, что

$$
(\varepsilon_{21})^2 = -\varepsilon_0\,,\quad (\varepsilon_{1324})^2 = -\varepsilon_0\,,\quad C^2 = \frac{1}{2}\,.
$$

Координаты преобразования электрической группы в пространстве $\mathbb{C}_4$ приобретают вид

$$
\begin{aligned}
S^K{}_L(\varphi^\alpha) = \hbar\cdot\big(&\delta^K{}_L\cdot\cos\big(\tfrac{g\cdot\varphi}{\hbar}\big) - \\
&(C^K{}_{L21} + C^K{}_{L1324})\cdot C\cdot\sin\big(\tfrac{g\cdot\varphi^\alpha}{\hbar}\big)\big)\,.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Отсюда для координат композиционного дифференциала имеем

$$
\delta S^K{}_L = -(C^K{}_{L21} + C^K{}_{L1324})\cdot C\cdot g\cdot\frac{\delta\varphi}{\partial x^m}\cdot dx^m\,.
$$

Положим, что

$$
A_m = \frac{\delta\varphi}{\partial x^m}
$$

– потенциал электромагнитного поля, а

$$
2\cdot C\cdot g = e
$$

– электрический заряд электрона, тогда для композиционной производной получим

$$\frac{\delta S^K{}_L}{\partial x^m} = -\frac{e \cdot A_m}{2} \cdot (C^K{}_{L21} + C^K{}_{L1324})\,,$$

а волновое уравнение (61) примет вид

$$C^{mK}{}_I \left(\partial_m \psi^I + \frac{e\,A_m}{2\,\hbar}\,(C^I{}_{L21} + C^I{}_{L1324})\,\psi^L \right) + \\ \frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\,(\delta^K{}_L + C^K{}_{L34})\,\psi^L = 0\,.$$

Перейдем к кватернионному представлению структурных матриц и волновых функций (смотрите Лекцию 4 Раздел II.5), в котором

$$C^I{}_{L21} = i \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right|, \qquad C^I{}_{L1324} = i \left|\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \end{array}\right|.$$

$$\delta^K{}_L = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right|, \qquad C^I{}_{L34} = \left|\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \end{array}\right|.$$

Таким образом, имеем:

$$||C^{mK}{}_I|| \left(\partial_m + \frac{i\,e\,A_m}{2\,\hbar} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array}\right| \right) \cdot \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| \\ + \frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array}\right| \cdot \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| = 0$$

Или

$$||C^{mK}{}_I|| \left(\partial_m \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \frac{i\,e\,A_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{matrix} \right\| \right) \\ + \frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{matrix} \right\| = 0$$

Здесь матрицы $C^{mK}{}_I = \{C^{4K}{}_I\,, C^{aK}{}_I\}$ $(a = 1, 2, 3)$ в кватернионном представлении имеют вид: (смотрите Лекцию 3 Раздел V.4)

$$C^{4K}{}_I = -i \left|\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right|, \qquad C^{aK}{}_I = i \left|\begin{array}{cc|cc} & & \text{-}\sigma^a & \\ & & & \text{-}\sigma^a \\ \hline \sigma^a & & & \\ & \sigma^a & & \end{array}\right|.$$

Для того, чтобы перейти к уравнениям относительно правых и левых компонент электрона и его нейтрино, преобразуем эти уравнения так же, как это было сделано в Разделе III.2 Лекции 9. Сначала сложим первое уравнение со вторым и третье с четвертым. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$i \left\| \begin{matrix} \gamma_1^m \\ \gamma_2^m \\ \gamma_1^m \\ \gamma_2^m \end{matrix} \right\| \left(\partial_m \left\| \begin{matrix} \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 - \Psi^{34} \\ \Psi^{123} - \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \frac{i\,e\,A_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} 2\,(\Psi^{123} + \Psi^{124}) \\ 2\,(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \right) \\ = \frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} 2\,(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ 2\,(\Psi^{123} + \Psi^{124}) \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

Учитывая, что

$$\begin{array}{ll} \Psi^0 + \Psi^{34} = e_{\mathrm{L}} & \text{– левая компонента электрона,} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} = e_{\mathrm{R}} & \text{– правая компонента электрона,} \\ \Psi^{123} - \Psi^{124} = \nu_{e\mathrm{L}} & \text{– левая компонента } e\text{-нейтрино,} \\ \Psi^0 - \Psi^{34} = \nu_{e\mathrm{R}} & \text{– правая компонента } e\text{-нейтрино,} \end{array}$$

получим волновое уравнение для лептонов первого поколения в электромагнитном поле

$$\begin{aligned} i\,\gamma_1^m \left(\partial_m + \frac{i\,e\,A_m}{\hbar} \right) e_{\mathrm{R}} &= \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\, e_{\mathrm{L}}\,, \\ i\,\gamma_2^m \left(\partial_m + \frac{i\,e\,A_m}{\hbar} \right) e_{\mathrm{L}} &= \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\, e_{\mathrm{R}}\,, \\ i\,\gamma_1^m\,\partial_m\,\nu_{e\mathrm{R}} &= 0\,, \\ i\,\gamma_2^m\,\partial_m\,\nu_{e\mathrm{L}} &= 0\,. \end{aligned}$$

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений.

Как и следовало ожидать, правый и левый электроны взаимодействуют с электромагнитным полем с одинаковой константой связи, а нейтрино не взаимодействуют с электромагнитным полем.

VI. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕПТОНОВ С ЭЛЕКТРОСЛАБЫМ ПОЛЕМ

В этом Разделе мы хотим отождествить эдектрослабую группу Салама-Вайнберга с некоторой подгруппой группы поворотов в пространстве действия $\mathbb{S}_e$. Для этого мы, делая предположения относительно указанной подгруппы и пользуясь уравнениями (62), строим волновое уравнение для лептонов в электрослабом поле. Мы стремимся к тому, чтобы наше уравнение максимально совпадало с уравнением Салама-Вайнберга. В начале своих рассуждений приведем уравнение Салама-Вайнберга.

1. Уравнения Салама–Вайнберга

В соответствии с теорией Салама–Вайнберга лагранжиан взаимодействия лептонов первого поколения с электрослабым полем имеет вид*

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = i\,\tilde{e}_{\rm R}\,\gamma_1^m\,\partial_m e_{\rm R} + i\,\tilde{e}_{\rm L}\,\gamma_2^m\,\partial_m e_{\rm L} + i\,\tilde{\nu}_{\rm L}\,\gamma_2^m\,\partial_m \nu_{e\rm L} - g\,\sin\theta_{\rm W}\,\tilde{e}_{\rm R}\,\gamma_1^m\,e_{\rm R}\,A_m - g\,\sin\theta_{\rm W}\,\tilde{e}_{\rm L}\,\gamma_2^m\,e_{\rm L}\,A_m \\ + \frac{g}{\cos\theta_{\rm W}}\,\sin^2\theta_{\rm W}\,\tilde{e}_{\rm R}\,\gamma_1^m\,e_{\rm R}\,Z_m - \frac{g}{2\,\cos\theta_{\rm W}}\,\cos 2\theta_{\rm W}\,\tilde{e}_{\rm L}\,\gamma_2^m\,e_{\rm L}\,Z_m + \frac{g}{2\,\cos\theta_{\rm W}}\,\tilde{\nu}_{\rm L}\,\gamma_2^m\,\nu_{e\rm L}\,Z_m \\ + \frac{g}{2}\,\tilde{\nu}_{\rm L}\,\gamma_2^m\,e_{\rm L}\,(W_m^1 + i\,W_m^2) + \frac{g}{2}\,\tilde{e}_{\rm L}\,\gamma_2^m\,\nu_{e\rm L}\,(W_m^1 - i\,W_m^2) - m\,\tilde{e}_{\rm R}\,e_{\rm L} - m\,\tilde{e}_{\rm L}\,e_{\rm R}\,,\end{aligned}$$

Группируя слагаемые с одинаковыми сопряженными векторами, получим квантовые уравнения для лептонов первого поколения в электрослабом поле в соответствии с теорией Салама–Вайнберга.

$$\begin{aligned}& i\,\gamma_1^m\left(\partial_m + \frac{i\,g\,\sin\theta_{\rm W}\,A_m}{\hbar} - \frac{i\,g\,Z_m}{\hbar}\left[\frac{\sin^2\theta_{\rm W}}{\cos\theta_{\rm W}}\right]\right)e_{\rm R} = \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,e_{\rm L}\,, \\ & i\,\gamma_2^m\left(\partial_m e_{\rm L} + \frac{i\,g\,\sin\theta_{\rm W}\,A_m}{\hbar}\,e_{\rm L} + \frac{i\,g\,Z_m}{2\,\hbar}\left[\cos\theta_{\rm W} - \frac{\sin^2\theta_{\rm W}}{\cos\theta_{\rm W}}\right]e_{\rm L} - \frac{i\,g\,(W_m^1 - i\,W_m^2)}{2\,\hbar}\,\nu_{e\rm L}\right) = \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,e_{\rm R}\,, \\ & i\,\gamma_2^m\left(\partial_m\nu_{e\rm L} - \frac{i\,g\,Z_m}{2\,\hbar}\left[\cos\theta_{\rm W} + \frac{\sin^2\theta_{\rm W}}{\cos\theta_{\rm W}}\right]\nu_{e\rm L} - \frac{i\,g\,(W_m^1 + i\,W_m^2)}{2\,\hbar}\,e_{\rm L}\right) = 0\,.\end{aligned}$$

Здесь θ_w – угол Салама-Вайнберга, Z_m, W_m^1, W_m^2 – потенциалы слабого поля. В теории Салама-Вайнберга полагается, что волновая функция нейтрино содержит только левые компоненты, то есть $\nu_{e\rm R} = 0$.

2. Волновое уравнение для лептонов в электрослабом поле. Первое приближение

В качестве группы, ответственной за слабое взаимодействие лептонов, примем прямое произведение групп поворотов пространства лептонов $\mathbb{C}_4$, рассмотренных в Разделе III.3:

1. группы поворотов относительно оси ε_{21}

$$\mathsf{S}(\varphi^{21}) = \hbar\cdot\left(\varepsilon_0\,\cos\!\left(\tfrac{g_{21}\cdot\varphi^{21}}{\hbar}\right) - \varepsilon_{21}\,\sin\!\left(\tfrac{g_{21}\cdot\varphi^{21}}{\hbar}\right)\right)\;;$$

эта группа изоморфна группе $U(1)$;

2. группы поворотов относительно осей ε_{1324}, ε_{123}, ε_4

$$\begin{aligned}\mathsf{S}(\varphi^{1324}) &= \hbar\cdot\left(\varepsilon_0\,\cos\!\left(\tfrac{g_{1324}\cdot\varphi_{1324}}{\hbar}\right) - \varepsilon_{1324}\,\sin\!\left(\tfrac{g_{1324}\cdot\varphi^{1324}}{\hbar}\right)\right)\,, \\ \mathsf{S}(\varphi^{4}) &= \hbar\cdot\left(\varepsilon_0\,\cos\!\left(\tfrac{g_{4}\cdot\varphi^{4}}{\hbar}\right) - \varepsilon_{4}\,\sin\!\left(\tfrac{g_{4}\cdot\varphi^{4}}{\hbar}\right)\right)\,, \\ \mathsf{S}(\varphi^{123}) &= \hbar\cdot\left(\varepsilon_0\,\cos\!\left(\tfrac{g_{123}\cdot\varphi^{123}}{\hbar}\right) - \varepsilon_{123}\,\sin\!\left(\tfrac{g_{123}\cdot\varphi^{123}}{\hbar}\right)\right)\,.\end{aligned}$$

Эта группа изоморфна группе $SU(2)$. Таким образом, электрослабая группа изоморфна прямому произведению $U(1)\times SU(2)$.

---

*см., например, Л.Райдер. Квантовая теория поля, М., "Мир", 1987г., с.358.

Отсюда следует, что композиционный дифференциал преобразования электрослабой группы имеет вид

$$\delta\mathsf{S} = -\varepsilon_{21}\, g_{21}\, \delta\varphi^{21} - \varepsilon_{1324}\, g_{1324}\, \delta\varphi^{1324} - \varepsilon_4\, g_4\, \delta\varphi_4 - \varepsilon_{123}\, g_{123}\, \delta\varphi^{123} + \varepsilon_{34}\, g_{34}\, \delta\varphi^{34} + \varepsilon_{124}\, g_{124}\, \delta\varphi^{124} - \varepsilon_3\, g_3\, \delta\varphi^3\,.$$

Здесь учтено, что

$$\varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{1324} = -\varepsilon_{34}\,, \quad \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_4 = -\varepsilon_{124}\,, \quad \varepsilon_{21} \circ \varepsilon_{123} = \varepsilon_3\,.$$

Калибровочный заряд электрослабой группы представлен компонентами

$$g_\alpha = \{g_{21}\,, \quad g_{1234}\,, \quad g_4\,, \quad g_{123}\,, \quad g_{34}\,, \quad g_{124}\,, \quad g_3\}\,,$$

а потенциал электрослабого поля имеет компоненты:

$$A^{\alpha_i}{}_M = \frac{\delta\varphi^{\alpha_i}}{\delta x^M} = \{A^{21}{}_M,\, A^{1324}{}_M,\, A^4{}_M,\, A^{123}{}_M,\, A^{34}{}_M,\, A^{124}{}_M,\, A^3{}_M\}\,.$$

Будем полагать, что параметры φ^{21}, φ^{1324}, φ^4, φ^{123} зависят от координат пространства-времени СТО, а параметры φ^{34}, φ^{124}, φ^3 зависят от координат обобщенного пространства-времени x^{234}, x^{134}, x^{124}, x^{123}, которые запишем в виде x^{m1324}. Таким образом, потенциал электрослабого поля имеет компоненты:

$$A^{\alpha_i}{}_M = \frac{\delta\varphi^{\alpha_i}}{\delta x^M} = \{A^{21}{}_m,\, A^{1324}{}_m,\, A^4{}_m,\, A^{123}{}_m,\, A^{34}{}_{m1324},\, A^{124}{}_{m1324},\, A^3{}_{m1324}\}\,.$$

В Разделе V.2, рассматривая взаимодействие лептонов с электромагнитным полем, мы положили

$$g_{21}\, A^{21}{}_m \equiv \frac{e}{2}\, A_m\,, \qquad g_{1324}\, A^{1324}{}_m \equiv \frac{e}{2}\, A_m\,,$$

где A_m потенциалы электромагнитного поля. Здесь мы обобщим эти соотношения, полагая, что группа вращений пространства лептонов $\mathbb{C}_4$ относительно оси ε_{1324}

$$\mathsf{S}(\varphi^{1324}) = \hbar \cdot \left(\varepsilon_0\, \cos\Big(\frac{g_{1324}\cdot\varphi^{1324}}{\hbar}\Big) - \varepsilon_{1324}\, \sin\Big(\frac{g_{1324}\cdot\varphi^{1324}}{\hbar}\Big)\right)\,,$$

ответственна не только за электромагнитное, но и за слабое взаимодействие. При этом будем полагать

$$g_{21}\, A^{21}{}_m \equiv \frac{e}{2}\, A_m\,, \qquad g_{1324}\, A^{1324}{}_m \equiv \frac{e}{2}\, A_m + \frac{g_z}{2}\, Z_m\,,$$

где Z_m есть потенциал слабого поля. Коэффициент связи g_z мы назовем $Z-$ компонентой слабого заряда. Относительно остальных компонент калибровочного заряда и потенциала электрослабого взаимодействия постулируем следующие соответствия

$$g_{34} \equiv \frac{g_z}{2}\,, \qquad g_4 = g_{124} \equiv \frac{g_{\rm w}}{2}\,, \qquad g_{123} = g_3 \equiv \frac{g_{\rm w}}{2}\,,$$

$$A^{34}{}_{m1324} \equiv Z_m\,, \qquad A^4{}_m = A^{124}{}_{m1324} \equiv W^1_m\,, \qquad A^{123}{}_m = A^3{}_{m1324} \equiv W^2_m\,,$$

где Z_m, W^1_m, W^2_m есть потенциалы слабого поля. Коэффициент связи g_w мы назовем $W-$ компонентой слабого заряда.

Подставляя введенные величины в уравнение (62), получим волновое уравнение для лептонов в электрослабом поле:

$$\begin{aligned}
&C^{mK}{}_I\, \partial_m\psi^I + C^{mK}{}_I\, \frac{e\, A_m}{2\,\hbar}\, \Big(C^I{}_{L21} + C^I{}_{L1324}\Big)\, \psi^L + \\
&C^{mK}{}_I\, \Big(\frac{g_z}{2\,\hbar}\, Z_m\, C^I{}_{L1324} + \frac{g_w}{2\,\hbar}\, W^1_m\, C^I{}_{L4} + \frac{g_w}{2\,\hbar}\, W^2_m\, C^I{}_{L123}\Big)\, \psi^L + \\
&C^{m1324K}{}_P\, \Big(-\frac{g_z}{2\,\hbar}\, Z_m\, C^P{}_{L34} - \frac{g_w}{2\,\hbar}\, W^1_m\, C^P{}_{L124} + \frac{g_w}{2\,\hbar}\, W^2_m\, C^P{}_{L3}\Big)\, \psi^L \\
&+\frac{\mathrm{m}\, c}{2\,\hbar}\, \Big(\delta^K{}_L + C^K{}_{L34}\Big)\, \psi^L = 0\,.
\end{aligned} \tag{67}$$

Далее в этих уравнениях представим матрицу $C^{m1324K}{}_{I}$ в виде произведения

$$C^{m1324K}{}_{P} = C^{mK}{}_{I}\, C^{1324I}{}_{P}\,, \tag{68}$$

где (смотрите Лекцию 3 Раздел V.4)

$$C^{1324I}{}_{P} = i \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & -1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline \end{array}\;.$$

Кроме того учтем, что в кватернионном представлении (смотрите Лекцию 4 Раздел V.5)

$$C^{I}{}_{L1234} = i \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline \end{array}\;, \quad C^{I}{}_{L4} = i \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & -1 & & \\ 1 & & & \\ \hline \end{array}\;, \quad C^{I}{}_{L123} = \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline \end{array}\; = i \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & i & \\ & & & -i \\ \hline -i & & & \\ & i & & \\ \hline \end{array}$$

и

$$C^{I}{}_{L34} = \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline \end{array}\;, \quad C^{I}{}_{L124} = \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & -1 & & \\ 1 & & & \\ \hline \end{array}\;, \quad C^{I}{}_{L3} = i \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline \end{array}\;.$$

Отсюда следует

$$C^{I}{}_{L34} = -i\, C^{I}{}_{L1324}\,, \qquad C^{I}{}_{L124} = -i\, C^{I}{}_{L4}\,, \qquad C^{I}{}_{L3} = i\, C^{I}{}_{L123}\,. \tag{69}$$

Преобразуя уравнение (67) с помощью соотношений (68) и (69), получим волновое уравнение для лептонов в электрослабом поле:

$$\begin{aligned} & C^{mK}{}_{I}\left(\partial_m \psi^I + \frac{e\, A_m}{2\,\hbar}\left(C^{I}{}_{L21} + C^{I}{}_{L1234}\right)\psi^L \right. \\ & \left. + \left(\delta^{I}{}_{P} - i\, C^{1324I}{}_{P}\right)\left(\frac{g_z}{2\,\hbar}\, Z_m\, C^{P}{}_{L1324} + \frac{g_w}{2\,\hbar}\, W^1_m\, C^{P}{}_{L4} + \frac{g_w}{2\,\hbar}\, W^2_m\, C^{P}{}_{L123}\right)\psi^L\right) \\ & + \frac{\mathrm{m}\, c}{2\,\hbar}\left(\delta^{K}{}_{L} + C^{K}{}_{L34}\right)\psi^L = 0\,. \end{aligned} \tag{70}$$

Запишем это уравнение по отношению к кватернионным компонентам. Имеем

$$\begin{aligned} & ||C^{mK}{}_{I}|| \left(\partial_m \begin{Vmatrix}\Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124}\end{Vmatrix} + \frac{i\, e\, A_m}{2\,\hbar} \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ \hline \end{array}\; \cdot \begin{Vmatrix}\Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124}\end{Vmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \left(\frac{i\, g_z\, Z_m}{2\,\hbar} \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline \end{array}\; + \frac{i\, g_w\, W^1_m}{2\,\hbar} \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & -1 & & \\ 1 & & & \\ \hline \end{array}\; + \frac{i\, g_w\, W^2_m}{2\,\hbar} \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline & & i & \\ & & & -i \\ \hline -i & & & \\ & i & & \\ \hline \end{array}\;\right) \begin{Vmatrix}\Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124}\end{Vmatrix}\right) \\ & + \frac{\mathrm{m}\, c}{2\,\hbar} \;\begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ \hline \end{array}\; \cdot \begin{Vmatrix}\Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124}\end{Vmatrix} = 0\,. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} & ||C^{mK}{}_{I}|| \left(\partial_m \begin{Vmatrix}\Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124}\end{Vmatrix} + \frac{i\, e\, A_m}{2\,\hbar} \begin{Vmatrix}\Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124}\end{Vmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{array}{|cc|cc|}\hline 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \left(\frac{i\, g_z\, Z_m}{2\,\hbar} \begin{Vmatrix}\Psi^{34} \\ \Psi^0 \\ \Psi^{124} \\ \Psi^{123}\end{Vmatrix} + \frac{i\, g_w\, W^1_m}{2\,\hbar} \begin{Vmatrix}\Psi^{124} \\ -\Psi^{123} \\ -\Psi^{34} \\ \Psi^0\end{Vmatrix} + \frac{i\, g_w\, W^2_m}{2\,\hbar} \begin{Vmatrix}i\,\Psi^{123} \\ -i\,\Psi^{124} \\ -i\,\Psi^0 \\ i\,\Psi^{34}\end{Vmatrix}\right)\right) + \frac{\mathrm{m}\, c}{2\,\hbar} \begin{Vmatrix}\Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124}\end{Vmatrix} = 0\,. \end{aligned}$$

Или

$$
||C^{mK}{}_I|| \left(\partial_m \left\| \begin{array}{l} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{array} \right\| + \frac{i\,e\,A_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} \Psi^0+\Psi^{34} \\ \Psi^0+\Psi^{34} \\ \Psi^{123}+\Psi^{124} \\ \Psi^{123}+\Psi^{124} \end{array} \right\| + \right.
$$

$$
\left. \frac{i\,g_z\,Z_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} \Psi^0+\Psi^{34} \\ \Psi^0+\Psi^{34} \\ \Psi^{124}-\Psi^{123} \\ \Psi^{123}-\Psi^{124} \end{array} \right\| + \frac{i\,g_w\,W^1_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} \Psi^{124}-\Psi^{123} \\ \Psi^{124}-\Psi^{123} \\ -\Psi^{34}-\Psi^0 \\ \Psi^{34}+\Psi^0 \end{array} \right\| + \frac{i\,g_w\,W^2_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} i\,(\Psi^{123}-\Psi^{124}) \\ i\,(\Psi^{123}-\Psi^{124}) \\ -i\,(\Psi^0+\Psi^{34}) \\ i\,(\Psi^0+\Psi^{34}) \end{array} \right\| \right) + \frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} \Psi^0+\Psi^{34} \\ \Psi^0+\Psi^{34} \\ \Psi^{123}+\Psi^{124} \\ \Psi^{123}+\Psi^{124} \end{array} \right\| = 0\,.
$$

Здесь матрицы $C^{mK}{}_I = \{C^{4K}{}_I\,, C^{aK}{}_I\}$ $(a = 1, 2, 3)$ имеют вид (смотрите Лекцию 3 Раздел V.4):

$$
C^{4K}{}_I = -i \left| \begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array} \right|, \qquad C^{aK}{}_I = i \left| \begin{array}{cc|cc} & & -\sigma^a & \\ & & & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & & & \\ & \sigma^a & & \end{array} \right|.
$$

Для того, чтобы перейти к уравнениям относительно правых и левых компонент электрона и его нейтрино, преобразуем эти уравнения следующим образом (смотрите Лекцию 9 Раздел III.2). Сначала сложим первое уравнение со вторым и третье с четвертым. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$
i \left\| \begin{array}{l} \gamma^m_1 \\ \gamma^m_2 \\ \gamma^m_1 \\ \gamma^m_2 \end{array} \right\| \left(\partial_m \left\| \begin{array}{l} \Psi^{123}+\Psi^{124} \\ \Psi^0+\Psi^{34} \\ \Psi^0-\Psi^{34} \\ \Psi^{123}-\Psi^{124} \end{array} \right\| + \frac{i\,e\,A_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} 2\,(\Psi^{123}+\Psi^{124}) \\ 2\,(\Psi^0+\Psi^{34}) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| + \right.
$$

$$
\left. \frac{i\,g_z\,Z_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} 0 \\ 2\,(\Psi^{34}+\Psi^0) \\ 0 \\ 2\,(\Psi^{123}-\Psi^{124}) \end{array} \right\| + \frac{i\,g_w\,W^1_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} 0 \\ -2\,(\Psi^{123}-\Psi^{124}) \\ 0 \\ 2\,(\Psi^{34}+\Psi^0) \end{array} \right\| + \frac{i\,g_w\,W^2_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} 0 \\ 2\,i\,(\Psi^{123}-\Psi^{124}) \\ 0 \\ 2\,i\,(\Psi^0+\Psi^{34}) \end{array} \right\| \right) = \frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar} \left\| \begin{array}{l} 2\,(\Psi^0+\Psi^{34}) \\ 2\,(\Psi^{123}+\Psi^{124}) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| .
$$

Учитывая, что

$$
\begin{array}{ll}
\Psi^0+\Psi^{34} = e_{\mathrm{L}} & \text{– левая компонента электрона,} \\
\Psi^{123}+\Psi^{124} = e_{\mathrm{R}} & \text{– правая компонента электрона,} \\
\Psi^{123}-\Psi^{124} = \nu_{e\mathrm{L}} & \text{– левая компонента } e\text{-нейтрино,} \\
\Psi^0-\Psi^{34} = \nu_{e\mathrm{R}} & \text{– правая компонента } e\text{-нейтрино,}
\end{array}
$$

запишем волновое уравнение для лептонов первого поколения в электрослабом поле.

$$
\begin{aligned}
& i\,\gamma^m_1 \left(\partial_m + \frac{i\,e\,A_m}{\hbar} \right) e_{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\, e_{\mathrm{L}} \\
& i\,\gamma^m_2 \left(\partial_m\, e_{\mathrm{L}} + \frac{i\,e\,A_m}{\hbar}\, e_{\mathrm{L}} + \frac{i\,g_z\,Z_m}{\hbar}\, e_{\mathrm{L}} - \frac{i\,g_w\,(W^1_m - i\,W^2_m)}{\hbar}\, \nu_{e\mathrm{L}} \right) = \frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\, e_{\mathrm{R}} \\
& i\,\gamma^m_1\, \partial_m\, \nu_{e\mathrm{R}} = 0 \\
& i\,\gamma^m_2 \left(\partial_m\, \nu_{e\mathrm{L}} - \frac{i\,g_z\,Z_m}{\hbar}\, \nu_{e\mathrm{L}} - \frac{i\,g_w\,(W^1_m + i\,W^2_m)}{\hbar}\, e_{\mathrm{L}} \right) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Правый и левый электроны взаимодействуют с электромагнитным полем с одинаковой константой связи, левый электрон и левое нейтрино взаимодействуют со слабым полем. В рассматриваемом приближении правый электрон, в отличие от левого, не взаимодействует со слабым полем, правое нейтрино не взаимодействует с электрослабым полем. Поэтому на основании рассматриваемого приближения правое нейтрино не может быть обнаружено в электрослабом взаимодействии.

3. Волновое уравнение для лептонов в электрослабом поле. Второе приближение

В предыдущем Разделе был рассмотрен вариант теории взаимодействия лептонов с электрослабым полем, в соответствии с которым только левые частицы взаимодействуют со слабым полем. Для того, чтобы, вслед за теорией электрослабого взаимодействия лептонов Глэшоу-Салама-Вайнберга, учесть взаимодействие правых частиц со слабым Z-полем, будем считать, что, помимо группа поворотов пространства лептонов $\mathbb{C}_4$ относительно оси ε_{1324}, группа поворотов пространства лептонов $\mathbb{C}_4$ относительно оси ε_{21}

$$\mathsf{S}(\varphi^{21}) = \hbar \cdot \left(\varepsilon_0 \, \cos\bigl(\frac{g_{21}\cdot \varphi_{21}}{\hbar}\bigr) - \varepsilon_{21} \, \sin\bigl(\frac{g_{21}\cdot \varphi^{21}}{\hbar}\bigr) \right) ,$$

также ответственна как за электромагнитное, так и за слабое взаимодействие. Будем полагать

$$g_{21} \, A^{21}{}_m \equiv \frac{e}{2} \, A_m - \frac{g_1}{2} \, Z_m \, ,$$

где Z_m есть потенциал слабого поля. Коэффициент связи g_1 мы также назовем $Z-$ компонентой слабого заряда. Подставляя введенные величины в уравнение (62), получим волновое уравнение для лептонов в электрослабом поле:

$$\begin{aligned} & C^{mK}{}_I \, \Bigl(\partial_m \psi^I + \frac{e \, A_m}{2\,\hbar} \Bigl(C^I{}_{L21} + C^I{}_{L1234} \Bigr) \psi^L - \frac{g_1 \, Z_m}{2\,\hbar} \, C^I{}_{L21} \, \psi^L \\ & + \Bigl(\delta^I{}_P - i \, C^{1324 I}{}_P \Bigr) \Bigl(\frac{g_z}{2\,\hbar} \, Z_m \, C^P{}_{L1324} + \frac{g_w}{2\,\hbar} \, W^1_m \, C^P{}_{L4} + \frac{g_w}{2\,\hbar} \, W^2_m \, C^P{}_{L123} \Bigr) \psi^L \Bigr) \\ & + \frac{\mathrm{m}\, c}{2\,\hbar} \Bigl(\delta^K{}_L + C^K{}_{L34} \Bigr) \psi^L = 0 \, . \end{aligned} \tag{72}$$

Запишем волновое уравнение по отношению к кватернионным компонентам. Имеем

$$\begin{aligned} & ||C^{mK}{}_I|| \left(\partial_m \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \frac{i\, e \, A_m}{2\,\hbar} \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array} \right| \cdot \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| - \frac{i\, g_1 \, Z_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \right. \\ & \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{array} \right| \left(\frac{i\, g_z \, Z_m}{2\,\hbar} \left| \begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \end{array} \right| + \frac{i\, g_w \, W^1_m}{2\,\hbar} \left| \begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & -1 & & \\ 1 & & & \end{array} \right| + \frac{i\, g_w \, W^2_m}{2\,\hbar} \left| \begin{array}{cc|cc} & & i & \\ & & & -i \\ \hline -i & & & \\ & i & & \end{array} \right| \right) \left. \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| \right) \\ & + \frac{\mathrm{m}\, c}{2\,\hbar} \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array} \right| \cdot \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| = 0 \, . \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} & ||C^{mK}{}_I|| \left(\partial_m \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \frac{i\, e \, A_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{matrix} \right\| - \frac{i\, g_1 \, Z_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \right. \\ & \left. \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{array} \right| \left(\frac{i\, g_z \, Z_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^{34} \\ \Psi^0 \\ \Psi^{124} \\ \Psi^{123} \end{matrix} \right\| + \frac{i\, g_w \, W^1_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^{124} \\ -\Psi^{123} \\ -\Psi^{34} \\ \Psi^0 \end{matrix} \right\| + \frac{i\, g_w \, W^2_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} i\,\Psi^{123} \\ -i\,\Psi^{124} \\ -i\,\Psi^0 \\ i\,\Psi^{34} \end{matrix} \right\| \right) \right) + \frac{\mathrm{m}\, c}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{matrix} \right\| = 0 \, . \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} & ||C^{mK}{}_I|| \left(\partial_m \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \frac{i\, e \, A_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{matrix} \right\| - \frac{i\, g_1 \, Z_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 \\ \Psi^{34} \\ \Psi^{123} \\ \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \right. \\ & \left. \frac{i\, g_z \, Z_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ \Psi^{123} - \Psi^{124} \end{matrix} \right\| + \frac{i\, g_w \, W^1_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ \Psi^{124} - \Psi^{123} \\ -\Psi^{34} - \Psi^0 \\ \Psi^{34} + \Psi^0 \end{matrix} \right\| + \frac{i\, g_w \, W^2_m}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} i\,(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ i\,(\Psi^{123} - \Psi^{124}) \\ -i\,(\Psi^0 + \Psi^{34}) \\ i\,(\Psi^0 + \Psi^{34}) \end{matrix} \right\| \right) + \frac{\mathrm{m}\, c}{2\,\hbar} \left\| \begin{matrix} \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^0 + \Psi^{34} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \\ \Psi^{123} + \Psi^{124} \end{matrix} \right\| = 0 \, . \end{aligned}$$

Здесь матрицы $C^{mK}{}_I = \{C^{4K}{}_I \, , C^{aK}{}_I\}$ $(a = 1, 2, 3)$ имеют вид (смотрите Лекцию 3 Раздел V.4):

$$C^{4K}{}_I = -i \left| \begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array} \right| , \qquad C^{aK}{}_I = i \left| \begin{array}{cc|cc} & & \text{-}\sigma^a & \\ & & & \text{-}\sigma^a \\ \hline \sigma^a & & & \\ & \sigma^a & & \end{array} \right| .$$

Для того, чтобы перейти к уравнениям относительно правых и левых компонент электрона и его нейтрино, преобразуем эти уравнения следующим образом (смотрите Лекцию 9 Раздел III.2). Сначала сложим первое уравнение со вторым и третье с четвертым. Затем вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим

$$i\begin{Vmatrix}\gamma_1^m\\ \gamma_2^m\\ \gamma_1^m\\ \gamma_2^m\end{Vmatrix}\left(\partial_m\begin{Vmatrix}\Psi^{123}+\Psi^{124}\\ \Psi^0+\Psi^{34}\\ \Psi^0-\Psi^{34}\\ \Psi^{123}-\Psi^{124}\end{Vmatrix}+\frac{i\,e\,A_m}{2\,\hbar}\begin{Vmatrix}2\,(\Psi^{123}+\Psi^{124})\\ 2\,(\Psi^0+\Psi^{34})\\ 0\\ 0\end{Vmatrix}-\frac{i\,g_1\,Z_m}{2\,\hbar}\begin{Vmatrix}\Psi^{123}+\Psi^{124}\\ \Psi^0+\Psi^{34}\\ \Psi^0-\Psi^{34}\\ \Psi^{123}-\Psi^{124}\end{Vmatrix}+\right.$$
$$\left.\frac{i\,g_z\,Z_m}{2\,\hbar}\begin{Vmatrix}0\\ 2\,(\Psi^{34}+\Psi^0)\\ 0\\ 2\,(\Psi^{123}-\Psi^{124})\end{Vmatrix}+\frac{i\,g_w\,W_m^1}{2\,\hbar}\begin{Vmatrix}0\\ -2\,(\Psi^{123}-\Psi^{124})\\ 0\\ 2\,(\Psi^{34}+\Psi^0)\end{Vmatrix}+\frac{i\,g_w\,W_m^2}{2\,\hbar}\begin{Vmatrix}0\\ 2\,i\,(\Psi^{123}-\Psi^{124})\\ 0\\ 2\,i\,(\Psi^0+\Psi^{34})\end{Vmatrix}\right)=\frac{\mathrm{m}\,c}{2\,\hbar}\begin{Vmatrix}2\,(\Psi^0+\Psi^{34})\\ 2\,(\Psi^{123}+\Psi^{124})\\ 0\\ 0\end{Vmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\Psi^0+\Psi^{34}=e_{\mathrm{L}} && \text{– левая компонента электрона,}\\
&\Psi^{123}+\Psi^{124}=e_{\mathrm{R}} && \text{– правая компонента электрона,}\\
&\Psi^{123}-\Psi^{124}=\nu_{e\mathrm{L}} && \text{– левая компонента } e\text{-нейтрино,}\\
&\Psi^0-\Psi^{34}=\nu_{e\mathrm{R}} && \text{– правая компонента } e\text{-нейтрино,}
\end{aligned}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&i\,\gamma_1^m\left(\partial_m+\frac{i\,e\,A_m}{\hbar}-\frac{i\,g_1\,Z_m}{\hbar}\right)e_{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,e_{\mathrm{L}}\\
&i\,\gamma_2^m\left(\partial_m\,e_{\mathrm{L}}+\frac{i\,e\,A_m}{\hbar}\,e_{\mathrm{L}}+\frac{i\,(g_z-g_1)\,Z_m}{\hbar}\,e_{\mathrm{L}}-\frac{i\,g_w\,(W_m^1-i\,W_m^2)}{\hbar}\,\nu_{e\mathrm{L}}\right)=\frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,e_{\mathrm{R}}\\
&i\,\gamma_1^m\left(\partial_m-\frac{i\,g_1\,Z_m}{\hbar}\right)\nu_{e\mathrm{R}}=0\\
&i\,\gamma_2^m\left(\partial_m\,\nu_{e\mathrm{L}}-\frac{i\,(g_z+g_1)\,Z_m}{\hbar}\,\nu_{e\mathrm{L}}-\frac{i\,g_w\,(W_m^1+i\,W_m^2)}{\hbar}\,e_{\mathrm{L}}\right)=0\,.
\end{aligned}\tag{73}$$

Правый и левый электроны взаимодействуют с электромагнитным полем с одинаковой константой связи, левый электрон и левое нейтрино взаимодействуют со слабым полем, правый электрон и правое нейтрино взаимодействует со слабым Z-полем с одинаковым коэффициентом связи.

4. Сравнение с теорией электрослабого взаимодействия лептонов Салама–Вайнберга

В уравнениях (73) положим

$$e=g\,\sin\theta_{\mathrm{W}}\,,\quad g_z=\frac{g\,\cos\theta_{\mathrm{W}}}{2}\,,\quad g_1=\frac{g\,\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{2\,\cos\theta_{\mathrm{W}}}\,,\quad g_w=\frac{g}{2}\,.$$

Получим

$$\begin{aligned}
&i\,\gamma_1^m\left(\partial_m+\frac{i\,g\,\sin\theta_{\mathrm{W}}\,A_m}{\hbar}-\frac{i\,g\,Z_m}{2\,\hbar}\left[\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{\cos\theta_{\mathrm{W}}}\right]\right)e_{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,e_{\mathrm{L}}\\
&i\,\gamma_2^m\left(\partial_m\,e_{\mathrm{L}}+\frac{i\,g\,\sin\theta_{\mathrm{W}}\,A_m}{\hbar}\,e_{\mathrm{L}}+\frac{i\,g\,Z_m}{2\,\hbar}\left[\cos\theta_{\mathrm{W}}-\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{\cos\theta_{\mathrm{W}}}\right]e_{\mathrm{L}}-\frac{i\,g\,(W_m^1-i\,W_m^2)}{2\,\hbar}\,\nu_{e\mathrm{L}}\right)=\frac{\mathrm{m}\,c}{\hbar}\,e_{\mathrm{R}}\\
&i\,\gamma_1^m\left(\partial_m-\frac{i\,g\,Z_m}{2\,\hbar}\left[\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{\cos\theta_{\mathrm{W}}}\right]\right)\nu_{e\mathrm{R}}=0\\
&i\,\gamma_2^m\left(\partial_m\,\nu_{e\mathrm{L}}-\frac{i\,g\,Z_m}{2\,\hbar}\left[\cos\theta_{\mathrm{W}}+\frac{\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{\cos\theta_{\mathrm{W}}}\right]\nu_{e\mathrm{L}}-\frac{i\,g\,(W_m^1+i\,W_m^2)}{2\,\hbar}\,e_{\mathrm{L}}\right)=0\,.
\end{aligned}\tag{74}$$

Сравнение этой системы уравнений с уравнениями Салама–Вайнберга (смотрите Раздел VI.1) показывает следующие отличия нашей теории от теории электрослабого взаимодействия лептонов Салама–Вайнберга:

1. Система уравнений дополняется уравнением, относящимся к правому нейтрино.

2. Если считать, что коэффициент связи g_1 соответствует коэффициенту связи $\frac{g \sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{2\cos\theta_{\mathrm{W}}}$ в теории Салама–Вайнберга, то в предлагаемой теории коэффициент связи, с которым правый электрон взаимодействует со слабым Z-полем, в два раза меньше, чем соответствующий коэффициент в теории Салама–Вайнберга.

3. Правое нейтрино взаимодействует только со слабым Z-полем, с тем же коэффициентом связи, что и правый электрон.

В Разделе VI Лекции 5 нами было показано, что такое замечательное явление как e-μ-τ- универсальность обязано своим происхождением алгебраической эквивалентности базисных векторов ε_{21}, ε_{13}, ε_{32} пространства лептонов $\mathbb{C}_4$. Напомним, что эти базисные векторы служат для описания трех поколений лептонов. В силу e-μ-τ-универсальности уравнения взаимодействия мюона и τ-лептона с электрослабым полем совершенно аналогичны уравнениям приведенным выше. И в этом отношении наша теория совпадает с теорией Салама–Вайнберга, с той лишь разницей, что мы даем толкование e-μ-τ- универсальности.

VII. ВЫВОДЫ

1. Калибровочное поле определяется через линейные преобразования пространства действия.

2. Калибровочному заряду, в частности электрическому, придается смысл коэффициента связи между параметрами (углами поворотов) подгруппы линейных преобразований (поворотов) и координатами вектора действия.

3. Подгруппы группы поворотов в пространстве действия ставятся в соответствие группам внутренних симметрий, ответственным за взаимодействие.

4. За электромагнитное взаимодействие заряженных лептонов в дираковском приближении ответственна группа поворотов пространства алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$ относительно оси ε_{21}.

5. За электрослабое взаимодействие лептонов ответственна группа, представляющая собой прямое произведение поворотов относительно оси ε_{21} и поворотов относительно осей ε_{1324}, ε_4, ε_{123} пространства алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$.

6. Волновое уравнение для фундаментальных частиц в калибровочном поле выводится из уравнений структуры для пространства векторов действия, расширенного за счет линейных преобразований. Подчеркнем, что такой вывод не нуждается в калибровочном принципе, применяемом обычно при пролонгации уравнений для свободных частиц на калибровочные взаимодействия.

7. Рассматривается частный случай предлагаемого волнового уравнения для фундаментальных частиц в калибровочном поле – волновое уравнение для лептонов в электрослабом поле. В отличие от стандартной модели Салама–Вайнберга, система уравнений включает уравнение для правого нейтрино, которое взаимодействует только со слабым Z-полем.

8. С введением линейных преобразований координаты пространства действия и координаты внутреннего пространства объединяются в координаты одного вектора. Это объединение позволяет рассматривать частицы в калибровочных полях с общих позиций и рассчитывать на то, что развитие предлагаемой теории приведет к построению единой теории взаимодействий.