Лекция 18. Кинематическая алгебра

А. А. Кецарис
(27 марта 2006 г.)

В этой Лекции рассматривается алгебра линейных преобразований, действующих на алгебре пространства-времени фундаментальных частиц. Обе алгебры образуют *кинематическую алгебру*, ответственную за движение пространства-времени фундаментальной частицы как единого целого. Кинематическая алгебра и ей сопряженная алгебра объединяются в *общую кинематическую алгебру*, которая является обобщением классической группы инвариантных преобразований – группы Пуанкаре.

I. ВВЕДЕНИЕ

В классической физике ключевую роль играют преобразования, которые не влияют на физические явления. Такие преобразования составляют группу Пуанкаре. И в этом смысле мы будем называть преобразования группы Пуанкаре *инвариантными преобразованиями.* К преобразованиям группы Пуанкаре относятся сдвиги (трансляции) и повороты в пространстве-времени СТО – сдвиги геометрических точек и времени, повороты в геометрических плоскостях и движения с постоянной скоростью. В теории, которую мы излагаем, для каждой фундаментальной частицы вводится пространство-время $\mathbb{X}$, обобщающее пространство-время СТО. Отсюда возникает необходимость обобщения группы Пуанкаре как группы инвариантных преобразований. В частности, сдвиги геометрических точек и сдвиги времени, входящие в группу Пуанкаре, необходимо дополнить сдвигами отрезков линий, площадей, сдвигами скорости, угловой скорости и телесной угловой скорости. В отличие от сдвигов в пространстве-времени СТО сдвиги в пространстве-времени $\mathbb{X}$ образуют алгебру. Кроме того, повороты в геометрических плоскостях и движения с постоянной скоростью, входящие в группу Пуанкаре, необходимо обобщить до поворотов относительно всех базисных векторов в пространстве-времени $\mathbb{X}$.

Взаимодействие частиц приводит к преобразованию пространства действия этих частиц. Помимо этого взаимодействие приводит к преобразованию пространства-времени частиц. Результатом взаимодействия является образование новых частиц со своим пространством действия и со своим пространством-временем. Так как каждой фундаментальной частице соответствует свой тип пространстве-времени $\mathbb{X}$, то наряду с инвариантными преобразованиями, не выводящими за рамки типа пространстве-времени необходимо ввести инвариантные преобразования, изменяющие тип пространстве-времени. Такие преобразования сопутствуют взаимодействию элементарных частиц.

Так как фундаментальной частице соответствует фундаментальная античастица, которой сопутствует сопряженное пространство-время ${}^{+}\mathbb{X}$, то в инвариантные преобразования необходимо включить сопряженные преобразования пространства-времени ${}^{+}\mathbb{X}$. Вышеуказанные преобразования объединяются в *общую кинематическую алгебру*, которая является обобщением классической группы инвариантных преобразований – группы Пуанкаре.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ СТО

Введем оператор, который ставит в соответствие вектору $x \in X$ вектор $x' \in X$. Обозначим такой оператор $l(\ )$ и назовем его *преобразованием*.

Обозначим множество преобразований L^1_1: $X \to X$. Введем на множестве преобразований L^1_1: $X \to X$ операции сложения $\oplus$

$$l_1(\ ) \oplus l_2(\ ) = l(\ ) \subset I^1_1$$

и умножения на число $\odot$

$$\alpha \odot l_1(\ ) = l(\ ) \subset I^1_1\,.$$

Пусть эти операции также удовлетворяют закону дистрибутивности

$$\alpha \odot [l_1(\ ) \oplus l_2(\ )] = \alpha \odot l_1(\ ) \oplus \alpha \odot l_2(\ )\,.$$

В результате множество преобразований L^1_1 становится векторным пространством.

Будем считать, что преобразования $l(\ )$ линейны относительно сложения векторов и умножения вектора на число. То есть,

$$l(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2) = \alpha_1 \odot l(x_1) \oplus \alpha_2 \odot l(x_2).$$

Эти соотношения являются условиями согласования сложений $\oplus$ и $+$ и умножений $\odot$ и $\cdot$. Эти условия состоят в том, что после действия оператора

$$\alpha_1 \odot l_1(\ ) \oplus \alpha_2 \odot l_2(\ )$$

на вектор x получим

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2\,,$$

то есть $\oplus$-сложение становится $+$-сложением, а $\odot$-умножение становится $\cdot$-умножением.

Введем *базисные преобразования* $I^i{}_m(\ )$, чтобы имело место

$$l(\ ) = I^i{}_m(\ ) \cdot l^m{}_i\,,$$

где $l^m{}_i$ – *координаты преобразования* $l(\ )$. Линейное преобразование вектора $x = \mathfrak{e}_i \cdot x^i$ должно иметь вид:

$$l(x) = l(\mathfrak{e}_i \cdot x^i) = \mathfrak{e}_m \cdot l^m{}_i \cdot x^i\,.$$

Из этого условия найдем правило преобразования базисных векторов $\mathfrak{e}_l$ пространства X с помощью базисных преобразований $I^i{}_k(\ )$:

$$I^i{}_m(\mathfrak{e}_k) = \mathfrak{e}_m \cdot \delta^i{}_k\,.$$

Для него выполняется требуемое соотношение

$$l(x) = l^m{}_i \cdot I^i{}_m(x) = l^m{}_i \cdot x^k \cdot I^i{}_m(\mathfrak{e}_k) = \mathfrak{e}_m \cdot l^m{}_i \cdot x^i\,.$$

III. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

Далее будем рассматривать линейные преобразования обобщенного пространства-времени $\mathbb{X}$. Введем оператор, который ставит в соответствие вектору $x \in \mathbb{X}$ вектор $x' \in \mathbb{X}$. Обозначим такой оператор $l(\ )$ и назовем его *преобразованием.* Указанное соответствие будем записывать так

$$x' = l(x)\,.$$

Потребуем, чтобы преобразование $l(\ )\colon \mathbb{X}\to\mathbb{X}$ было *линейным.* То есть, выполнялось соотношение

$$l(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2) = \alpha_1 \cdot l(x_1) + \alpha_2 \cdot l(x_2).$$

Вектор обобщенного пространства-времени $\mathbb{X}$ может быть разложен по базисным векторам $\mathfrak{E}_I$:

$$x = \mathfrak{E}_0\, x^0 + \mathfrak{E}_i\, x^i + \mathfrak{E}_{ij}\, x^{ij} + \mathfrak{E}_{ijk}\, x^{ijk} + \mathfrak{E}_{1324}\, x^{1324}\,.$$

Как принято мы записываем это соотношение, используя собирательные индексы

$$I, J, K, L, \sim (0, i, ij, ijk, 1324)\,,$$

$$x = \mathfrak{E}_I \cdot x^I\,.$$

Поэтому вектор $x' = l(x)$ в силу линейности преобразования может быть записан в виде:

$$x' = l(\mathfrak{E}_I) \cdot x^I\,.$$

Введем разложение векторов $l(\mathfrak{E}_I)$ по базисным векторам $\mathfrak{E}_K$

$$l(\mathfrak{E}_I) = \mathfrak{E}_M \cdot l^M{}_I\,.$$

Здесь $l^M{}_I$–коэффициенты разложения. Используя это соотношение, получим

$$x' = \mathfrak{E}_M \cdot l^M{}_I \cdot x^I\,. \tag{1}$$

1. Векторное пространство линейных преобразований

Обозначим множество линейных преобразований $\mathbb{L}$. На нем определим операции сложения $\oplus$

$$l_1(\ ) \oplus l_2(\ ) \in \mathbb{L}$$

и умножения на число $\odot$

$$\alpha \odot h(\ ) \in \mathbb{L}\,.$$

Пусть эти операции удовлетворяют закону дистрибутивности.

$$\alpha \odot [l_1(\ ) \oplus l_2(\ )] = \alpha \odot l_1(\ ) \oplus \alpha \odot l_2(\ )\,. \tag{2}$$

В результате множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ становится векторным пространством. Соответствие закона дистрибутивности в $\mathbb{L}$ закону дистрибутивности в $\mathbb{X}$:

$$\alpha \cdot (x_1 + x_2) = \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2$$

можно рассматривать как условия согласования сложений "$\oplus$" и "$+$" и умножений "$\odot$" и "$\cdot$". Эти условия сводятся к тому, что $\oplus$-сложение становится $+$-сложением, а $\odot$-умножение становится $\cdot$-умножением после действия оператора (2) на вектор x.

На векторном пространстве $\mathbb{L}$ введем *базисные преобразования* $I^I{}_K(\ )$, чтобы

$$l(\ ) = l^M{}_I \cdot I^I{}_M(\ )\,,$$

где $l^M{}_I$ есть *координаты* преобразования $l(\ )$, представляющие собой ранее введенные коэффициенты разложения векторов $l(\mathfrak{E}_I)$ по базисным векторам $\mathfrak{E}_M$. Линейное преобразование вектора $x = \mathfrak{E}_K \cdot x^K$ должно иметь вид (1). Таким образом, должно выполняться

$$l^M{}_I \cdot I^I{}_M(\mathfrak{E}_K) \cdot x^K = \mathfrak{E}_M \cdot l^M{}_I \cdot x^I\,.$$

Из этого условия найдем правило преобразования базисных векторов $\mathfrak{E}_K$ пространства $\mathbb{X}$ с помощью базисных преобразований $I^I{}_M(\ )$:

$$I^I{}_M(\mathfrak{E}_K) = \mathfrak{E}_M \cdot \delta^I{}_K\,, \tag{3}$$

где $\delta^I{}_K$ есть символ Кронекера.

2. Группа линейных преобразований. Алгебра линейных преобразований

На множестве линейных преобразований $\mathbb{L}$ введем *закон композиции.* То есть двум преобразованиям $l_1(x)$ и $l_2(x)$ ставится в соответствие преобразование $l(x)$, называемое композицией или произведением преобразований $l_1(x)$ и $l_2(x)$:

$$l(x) = l_2(l_1(x))\,, \qquad \text{где} \quad l(\ ), l_1(\ ), l_2(\ ) \in \mathbb{L}\,, \tag{4}$$

Потребуем, чтобы композиция преобразований была *групповым* законом. То есть, чтобы на множестве линейных преобразований $\mathbb{L}$ было определено

1. *единичное* преобразование $\delta(\ )$, для которого выполняются соотношения:
$$\delta(l(x)) = l(x)\,, \qquad l(\delta(x)) = l(x)\,.$$
2. *обратное* преобразование $l^{-1}(\ )$, для которого выполняются соотношения:
$$l(l^{-1}(x)) = \delta(x)\,, \qquad l^{-1}(l(x)) = \delta(x)\,.$$

Указанные определения делают множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ *группой*.

Найдем связь между координатами преобразования-композиции и координатами преобразований, участвующих в композиции. Для этого рассмотрим уравнение (4), записав преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования:
$$l(\ ) = l^M{}_L \cdot I^L{}_M(\ )\,, \quad l_2(\ ) = (l_2)^M{}_I \cdot I^I{}_M(\ )\,,$$
$$l_1(\ ) = (l_1)^K{}_L \cdot I^L{}_K(\ )\,,$$
и учитывая, что
$$x = \mathfrak{E}_L \cdot x^L\,.$$
Для правой части уравнения (4) получим
$$\begin{aligned}
&l_2((l_1)^K{}_I \cdot I^I{}_K(x)) = l_2((l_1)^K{}_I \cdot I^I{}_K(\mathfrak{E}_L \cdot x^L))\\
&= l_2(\mathfrak{E}_K \cdot (l_1)^K{}_L \cdot x^L) = (l_2)^M{}_I \cdot I^I{}_M(\mathfrak{E}_K \cdot (l_1)^K{}_L \cdot x^L)\\
&= (l_2)^M{}_I \cdot (l_1)^K{}_L \cdot x^L \cdot I^I{}_M(\mathfrak{E}_K)\\
&= \mathfrak{E}_M \cdot (l_2)^M{}_I \cdot (l_1)^I{}_L \cdot x^L\,.
\end{aligned}$$
Для левой части уравнения (4) получим
$$l(\mathfrak{E}_I \cdot x^I) = l^M{}_L \cdot I^L{}_M(\mathfrak{E}_I \cdot x^I) = \mathfrak{E}_M \cdot l^M{}_L \cdot x^L$$
Из сравнения этих выражений получим
$$l^M{}_L = (l_2)^M{}_I \cdot (l_1)^I{}_L\,. \tag{5}$$
Кроме того, из сравнения
$$l_2(l_1(\ )) = (l_2)^M{}_I \cdot (l_1)^K{}_L \cdot I^I{}_M(I^L{}_K(\ ))$$
и
$$\begin{aligned}
l(\ ) &= l^M{}_L \cdot I^L{}_M(\ ) = (l_2)^M{}_I \cdot (l_1)^I{}_L \cdot I^L{}_M(\ )\\
&= (l_2)^M{}_I \cdot \delta^I{}_K \cdot (l_1)^K{}_L \cdot I^L{}_M(\ )
\end{aligned}$$
получим закон композиции базисных преобразований
$$I^I{}_M(I^L{}_K(\ )) = \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M(\ )\,.$$
Закон композиции, действующий на векторах пространства $\mathbb{L}$, можно рассматривать как вид умножения и записывать его в в алгебраической, а не в операторной форме
$$l = l_1 \circ l_2\,. \tag{6}$$
Закон композиции для базисных векторов приобретает вид $\circ$-умножения:
$$I^L{}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M\,. \tag{7}$$
Действие линейного преобразования на вектор можно также рассматривать как вид умножения:
$$x' = x \circ l\,.$$
Закон композиции для базисных векторов (3) приобретает вид:
$$\mathfrak{E}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{E}_M\,.$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*.

3. Линейное преобразование алгебры $\mathbb{X}$

Так как $\mathbb{X}$ является не только векторным пространством, но и алгеброй, то возникает вопрос: что происходит с произведением векторов при линейном преобразовании векторного пространства $\mathbb{X}$ в себя. В общем случае алгебра $\mathbb{X}$ отображается в другую алгебру $\mathbb{X}'$ с другим произведением векторов. Далее рассмотрим связь между произведениями в алгебрах $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$.

Пусть векторы x, x_1, $x_2 \in \mathbb{X}$ подчиняются правилу параллелограмма, то есть
$$x = x_2 \circ x_1\,,$$
и пусть векторы x', x'_1, $x'_2 \in \mathbb{X}'$ получены из x, x_1, x_2 с помощью линейного преобразования l, то есть
$$x' = l(x), \quad x'_1 = l(x_1), \quad x'_2 = l(x_2)\,.$$
Рассмотрим далее два вектора. Вектор, в который отображается произведение векторов
$$x' = l(x) = l(x_2 \circ x_1)\,,$$
и вектор, равный произведению преобразованных векторов
$$x'' = l(x_2) \circ l(x_1)\,.$$
В общем случае эти векторы не равны друг другу. Действительно, запишем вектор x' через базисные векторы:
$$x' = l(\mathfrak{E}_L \cdot x^L) = l(\mathfrak{E}_L) \cdot x^L = \mathfrak{E}_N \cdot l^N{}_L \cdot x^L$$

или

$$x' = l((\mathfrak{E}_I \cdot {x_2}^I) \circ (\mathfrak{E}_K \cdot {x_1}^K)) = l(\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K) \cdot {x_2}^I \cdot {x_1}^K$$
$$= l(\mathfrak{E}_L) \cdot {}^+{C^L}_{KI} \cdot {x_2}^I \cdot {x_1}^K$$
$$= \mathfrak{E}_N \cdot {l^N}_L \cdot {}^+{C^L}_{KI} \cdot {x_2}^I \cdot {x_1}^K .$$

Для вектора x'' имеем:

$$x'' = l(\mathfrak{E}_I \cdot {x_2}^I) \circ l(\mathfrak{E}_K \cdot {x_1}^K) = l(\mathfrak{E}_I) \circ l(\mathfrak{E}_K) \cdot {x_2}^I \cdot {x_1}^K .$$

Рассматривая векторы $l(\mathfrak{E}_I)$ как базисные в алгебре $\mathbb{X}'$, закон умножения базисных векторов в этой алгебре запишем следующим образом

$$l(\mathfrak{E}_I) \circ l(\mathfrak{E}_K) = l(\mathfrak{E}_L) \cdot {}^+{C'^L}_{KI} , \tag{8}$$

где ${}^+{C'^L}_{KI}$ структурные постоянные алгебры $\mathbb{X}'$. С учетом этого для вектора x'' имеем:

$$x'' = l(\mathfrak{E}_I \cdot {x_2}^I) \circ l(\mathfrak{E}_K \cdot {x_1}^K) = l(\mathfrak{E}_L) \cdot {}^+{C'^L}_{KI} \cdot {x_2}^I \cdot {x_1}^K$$
$$= \mathfrak{E}_N \cdot {l^N}_L \cdot {}^+{C'^L}_{KI} \cdot {x_2}^I \cdot {x_1}^K .$$

Отсюда следует, что векторы x' и x'' отличаются вследствие различия структурных постоянных в алгебрах $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$. Из (8) следует уравнение, связывающее структурные постоянные алгебр $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$:

$${}^+{C^N}_{MP} \cdot {l^P}_I \cdot {l^M}_K = {l^N}_L \cdot {}^+{C'^L}_{KI} . \tag{9}$$

Отсюда следует условие, при котором линейное преобразование сохраняет алгебру $\mathbb{X}$. Потребуем, чтобы векторы x', x'_1, x'_2 также подчинялись правилу параллелограмма

$$l(x) = l(x_2) \circ l(x_1) .$$

Это равносильно условию

$${}^+{C'^L}_{KI} = {}^+{C^L}_{KI}$$

или

$${}^+{C^N}_{MP} \cdot {l^P}_I \cdot {l^M}_K = {l^N}_L \cdot {}^+{C^L}_{KI}$$

или

$${l^N}_L \cdot {}^+{C^L}_{KI} \cdot {(l^{-1})^I}_P = {}^+{C^N}_{MP} \cdot {l^M}_K .$$

То есть линейные преобразования, сохраняющие произведение в $\mathbb{X}$, сохраняют структурные матрицы $\mathbb{X}$.

4. Регулярное представление преобразованного вектора

В регулярном представлении векторов алгебры $\mathbb{X}$ базисным векторам $\mathfrak{E}_I$ ставятся в соответствие структурные матрицы

$$\mathfrak{E}_I \sim {}^+{C^L}_{KI} ,$$

вектору $x \in \mathbb{X}$

$$x = \mathfrak{E}_I \cdot x^I$$

ставится в соответствие матрица

$${X^L}_K = {}^+{C^L}_{KI} \cdot x^I .$$

Отсюда следует, что в регулярном представлении преобразованному вектору $x' = l(x)$

$$x' = \mathfrak{E}_I \cdot {l^I}_P \cdot x^P$$

соответствует матрица

$${X'^L}_K = {}^+{C^L}_{KI} \cdot {l^I}_P \cdot x^P .$$

Используя (9), для матрицы представления получим

$${X'^L}_K = {l^L}_N \cdot {}^+{C^N}_{IP} \cdot {(l^{-1})^I}_K \cdot x^P = {l^L}_N \cdot {X^N}_I \cdot {(l^{-1})^I}_K .$$

– правило преобразования матрицы представления при линейных преобразованиях.

IV. ПОВОРОТЫ И РАСТЯЖЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Линейное преобразование запишем в виде произведения преобразований

$$l = u \circ h .$$

И пусть преобразование u поворачивает вектор, не меняя его длины, а преобразование h, напротив, сохраняет направление вектора, но изменяет его длину. Преобразование u называется *поворотом*, преобразование h называется *растяжением*. Далее рассмотрим указанные преобразования.

1. Скалярное произведение. Длина вектора

На пространстве-времени $\mathbb{X}$ определено скалярное произведение векторов. Для $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ скалярное произведение равно

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \mathfrak{E}_I, \mathfrak{E}_K \rangle \, (x_1)^I \, (x_2)^K = g_{IK} \cdot (x_1)^I \, (x_2)^K .$$

Величина $g_{IK} = \mathfrak{E}_0 \cdot {}^+C^0{}_{IK}$ есть *метрический тензор.*

Скалярное произведение вектора на себя есть квадрат *длины* вектора:

$$\langle x, x \rangle = g_{IK} \cdot x^I \cdot x^K \equiv x^2 .$$

Пусть ${}^+x$ есть сопряженный вектор по отношению к вектору x. Тогда скалярное произведение

$$\langle x, {}^+x \rangle = \delta_{IK} \cdot x^I \cdot x^K$$

называют квадратом *нормы* вектора и обозначают $|x|^2$ в отличие от обозначения x^2 для длины вектора.

Пусть $x = x_2 \circ x_1$, вычислим квадрат нормы вектора x через квадраты норм векторов x_1 и x_2.

$$\begin{aligned}
|x|^2 = \langle x_2 \circ x_1\,,\ {}^{+}x_1 \circ {}^{+}x_2 \rangle = \\
\langle {x_2}^I \cdot {x_1}^K \cdot (\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K)\,,\ x_{1L} \cdot x_{2M} \cdot (\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^M) \rangle = \\
\langle \mathfrak{E}_P \cdot {}^{+}C^P{}_{IK} \cdot {x_1}^I \cdot {x_2}^K\,,\ \mathfrak{E}^Q \cdot C_Q{}^{LM} \cdot x_{1L} \cdot x_{2M} \rangle = \\
{x_1}^I \cdot {x_2}^K \cdot {}^{+}C^P{}_{IK} \cdot C_P{}^{LM} \cdot x_{1L} \cdot x_{2M}\,.
\end{aligned}$$

Далее учтем, что*

$${}^{+}C^P{}_{IK} \cdot C_P{}^{LM} = \delta^L{}_I \cdot \delta^M{}_K\,.$$

Получим

$$|x|^2 = {x_2}^I \cdot {x_1}^K \cdot x_{1K} \cdot x_{2I}\,.$$

Таким образом, в результате имеем

$$|x|^2 = |x_2|^2 \cdot |x_1|^2$$

– соотношение, которое можно назвать *теоремой Пифагора* для алгебры $\mathbb{X}$.

Сделаем полезное замечание. Особенно просто теорема Пифагора доказывается для векторов специального вида. Пусть для векторов x_1 и x_2 выполняются условия†

$$\begin{aligned}
x_1 \circ {}^{+}x_1 = \langle x_1, {}^{+}x_1 \rangle \equiv |x_1|^2 \\
x_2 \circ {}^{+}x_2 = \langle x_2, {}^{+}x_2 \rangle \equiv |x_2|^2
\end{aligned}$$

Тогда для вектора

$$x = x_2 \circ x_1$$

также выполняется

$$x \circ {}^{+}x = \langle x, {}^{+}x \rangle \equiv |x|^2\,,$$

причем

$$|x|^2 = |x_2|^2 \cdot |x_1|^2\,.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
x \circ {}^{+}x = x_2 \circ x_1 \circ {}^{+}x_1 \circ {}^{+}x_2 = x_2 \circ {}^{+}x_2 \cdot \langle x_1, {}^{+}x_1 \rangle = \\
\langle x_2, {}^{+}x_2 \rangle \cdot \langle x_1, {}^{+}x_1 \rangle = |x_2|^2 \cdot |x_1|^2\,.
\end{aligned}$$

*Это следует из соотношения, приведенного в Лекции 16 стр.12

†Указанные условия выполняются, например, для кватернионов.

2. Группа поворотов

В общем случае алгебра $\mathbb{X}$ при линейном преобразовании переходит в другую алгебру $\mathbb{X}'$ с другим произведением векторов. В том числе линейное преобразование меняет и скалярное произведение векторов. Далее рассмотрим связь между скалярными произведениями в алгебрах $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$.

Пусть векторы $x_1,\ x_2 \in \mathbb{X}$ участвуют в скалярном произведении

$$\langle x_1, x_2 \rangle$$

и пусть векторы $x'_1,\ x'_2 \in \mathbb{X}'$ получены из $x_1,\ x_2$ с помощью линейного преобразования l, то есть

$$x' = l(x), \quad x'_1 = l(x_1), \quad x'_2 = l(x_2)\,.$$

Рассмотрим далее два скалярных произведения: вышеуказанное а также скалярное произведение преобразованных векторов

$$\langle l(x_1), l(x_2) \rangle\,.$$

В общем случае эти скалярные произведения не равны друг другу. Действительно, в первом случае имеем:

$$\langle (\mathfrak{E}_I \cdot {x_1}^I), (\mathfrak{E}_K \cdot {x_2}^K) \rangle = \langle \mathfrak{E}_I, \mathfrak{E}_K \rangle \cdot {x_1}^I \cdot {x_2}^K\,.$$

Здесь

$$\langle \mathfrak{E}_I, \mathfrak{E}_K \rangle = {}^{+}C^0{}_{IK} = g_{IK}$$

Для второго скалярного произведения имеем:

$$\langle l(\mathfrak{E}_I \cdot {x_1}^I), l(\mathfrak{E}_K \cdot {x_2}^K) \rangle = \langle l(\mathfrak{E}_I), l(\mathfrak{E}_K) \rangle \cdot {x_1}^I \cdot {x_2}^K\,.$$

Рассматривая векторы $l(\mathfrak{E}_I)$ как базисные в алгебре $\mathbb{X}'$ с законом умножения базисных векторов в этой алгебре (8) для скалярного произведения базисных векторов получим

$$\langle l(\mathfrak{E}_I), l(\mathfrak{E}_K) \rangle = {}^{+}C'^0{}_{IK} = g'_{IK} \tag{10}$$

где $C'^0{}_{IK}$ структурные постоянные алгебры $\mathbb{X}'$. Отсюда следует, что скалярные произведения отличаются вследствие различия метрических тензоров в алгебрах $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$. Из (10) следует уравнение, связывающее метрические тензоры алгебр $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$:

$$g_{PM} \cdot l^P{}_I \cdot l^M{}_K = g'_{IK}\,. \tag{11}$$

Отсюда следует условие, при котором линейное преобразование сохраняет скалярное произведение. Потребуем, чтобы рассмотренные скалярные произведения были равны друг другу

$$\langle l(x_1), l(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle\,.$$

Это равносильно условию

$$g'_{IK} = g_{IK} \tag{12}$$

Линейные преобразования, сохраняющие скалярное произведение, называются *поворотами.* Мы будем обозначать их символом u. Из (11) и (12) следует, что матрица линейного преобразования для поворотов должна удовлетворять условию

$$g_{LM} \cdot u^L{}_I \cdot u^M{}_K \cdot g^{KN} = \delta_I^N\,. \tag{13}$$

Если ввести *сопряженную* матрицу ${}^+u^N{}_L$ в соответствии с определением:

$${}^+u^N{}_L = g_{LM} \cdot u^M{}_K \cdot g^{KN}\,,$$

то условие принадлежности линейных преобразований к поворотам приобретает вид:

$${}^+u^N{}_L = (u^{-1})^N{}_L\,.$$

В качестве примера рассмотрим условие (12) когда поворот происходит в плоскости с сигнатурой $(+,-)$. В этом случае имеем $g_{11} = 1$, $g_{22} = -1$ и

$$u = \begin{vmatrix} u^1{}_1 & u^2{}_1 \\ u^1{}_1 & u^2{}_1 \end{vmatrix}, \qquad g = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

В результате имеем:

$$\begin{aligned} u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 - u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 &= 1 \\ u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 - u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 &= 0 \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 - u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 &= 0 \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 - u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 &= -1\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Если поворот происходит в плоскости с сигнатурой $(+,+)$, то имеем $g_{11} = 1$, $g_{22} = 1$,

$$\begin{aligned} u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 &= 1 \\ u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 &= 0 \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 + u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 &= 0 \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 &= 1\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Условие (13) является частным случаем преобразования структурных постоянных (9). Действительно, из (9) имеем:

$${}^+C^0{}_{MP} \cdot l^P{}_I \cdot l^M{}_K = l^0{}_0 \cdot {}^+C'^0{}_{KI} + l^0{}_{L_1} \cdot {}^+C'^{L_1}{}_{KI}\,.$$

Отсюда получаем условия, при которых линейное преобразование становится поворотом

$$l^0{}_0 \cdot {}^+C'^0{}_{KI} = {}^+C^0{}_{KI}\,,$$
$$l^0{}_{L_1} \cdot {}^+C'^{L_1}{}_{KI} = 0\,.$$

Повороты составляют группу. Произведение поворотов есть поворот. Действительно, если

$$(u_1)^{-1} = {}^+u_1\,, \qquad (u_2)^{-1} = {}^+u_2\,,$$

то для

$$u = u_1 \circ u_2$$

имеет место

$$u^{-1} = (u_2)^{-1} \circ (u_1)^{-1} = {}^+u_2 \circ {}^+u_1 = {}^+(u_1 \circ u_2) = {}^+u\,.$$

Последнее следует из

$$\begin{aligned} &{}^+(u_2)^N{}_L \cdot {}^+(u_1)^L{}_M = \\ &\quad g_{LI} \cdot (u_2)^I{}_K \cdot g^{KN} \cdot g_{SM} \cdot (u_1)^S{}_P \cdot g^{PL} = \\ &\quad (u_2)^I{}_K \cdot g^{KN} \cdot g_{SM} \cdot (u_1)^S{}_I = \\ &\quad g_{SM} \cdot (u_1)^S{}_I \cdot (u_2)^I{}_K \cdot g^{KN} = \\ &\quad g_{SM} \cdot u^S{}_K \cdot g^{KN} = {}^+u^N{}_M\,. \end{aligned}$$

3. Группа растяжений

Растяжения сохраняют направление вектора, но изменяют его длину. Матрица таких преобразований имеет вид

$$h^L{}_I = h \cdot \delta^L{}_I\,, \tag{16}$$

где h действительное положительное число, называемое *коэффициентом растяжения.* Действительно,

$$x' = h(x) = \mathfrak{E}_L \cdot h^L{}_I \cdot x^I = h \cdot \mathfrak{E}_L \cdot \delta^L{}_I \cdot x^I = h \cdot x\,.$$

Растяжения составляют группу. Произведение растяжений есть растяжение.

$$h^L{}_I = (h_1)^L{}_K \cdot (h_2)^K{}_I = h_1 \cdot h_2 \cdot \delta^L{}_I = h \cdot \delta^L{}_I\,.$$

Отсюда закон композиции коэффициентов растяжений

$$h = h_1 \cdot h_2\,.$$

Обратное растяжение (сжатие) к растяжению (16) есть

$$(h^{-1})^L{}_I = \frac{1}{h} \cdot \delta^L{}_I\,.$$

Произвольное линейное преобразование меняет метрический тензор в соответствии с соотношением:

$$g'_{IK} = g_{LM} \cdot l^L{}_I \cdot l^M{}_K\,.$$

Представим матрицу $l^L{}_I$ в виде произведения

$$l^L{}_I = u^L{}_P \cdot h^P{}_I\,,$$

где $u^L{}_P$ – матрица поворота, удовлетворяющая условию

$$g_{LM} \cdot u^L{}_P \cdot u^M{}_Q = g_{PQ}\,.$$

Тогда имеем

$$g'_{IK} = (g_{LM} \cdot u^L{}_P \cdot u^M{}_Q) \cdot h^P{}_I \cdot h^Q{}_K\,.$$

Отсюда получим соотношение

$$g'_{IK} = g_{PQ} \cdot h^P{}_I \cdot h^Q{}_K$$

и

$$g'_{IK} = h^2 \cdot g_{IK}\,.$$

V. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пусть векторы $l \in \mathbb{L}$ являются функциями *параметров* φ^α:

$$l(\varphi^\alpha) = I^I{}_K \cdot l^K{}_I(\varphi^\alpha)\,.$$

Причем на параметрах φ^α действует закон композиции

$$\varphi^\alpha = \Phi({\varphi_2}^\alpha, {\varphi_1}^\alpha)$$

со свойствами группы, и имеют место соответствие закона композиции на $\{\varphi^\alpha\}$ и закона композиции на $\mathbb{L}$ (6):

$$l(\varphi^\alpha) = l({\varphi_1}^\alpha) \circ l({\varphi_2}^\alpha)\,,$$

и соответствие единиц групп:

$$l(0) = \delta()\,.$$

или

$$l^K{}_I(\varphi^\alpha)\big|_{\varphi^\alpha=0} = \delta^K{}_I\,.$$

Для группы поворотов такие параметры называются *углы поворота*. Для группы растяжений такие параметры называются *коэффициенты растяжения*. Рассмотрим дифференциал dl вблизи единицы группы

$$dl(\varphi^\alpha) = I^I{}_K\,\frac{\partial l^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha}\,d\varphi^\alpha = I^I{}_K \cdot K^K{}_{I\alpha} \cdot d\varphi^\alpha\,.$$

где введено обозначение

$$K^K{}_{I\alpha} = \left.\frac{\partial l^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha}\right|_{\varphi^\alpha=0}\,.$$

Векторы

$$I_\alpha = I^I{}_K\,K^K{}_{I\alpha} \tag{17}$$

представляют собой базисные векторы в пространстве векторов вида

$$dl = I_\alpha\,d\varphi^\alpha\,. \tag{18}$$

Пусть на этом пространстве действует закон умножения, определяемый умножением базисных векторов

$$I_\alpha \circ I_\beta = I_\gamma \cdot C^\gamma{}_{\alpha\beta}\,. \tag{19}$$

Подставляя сюда (17) и учитывая (7), получим

$$K^K{}_{L\beta} \cdot K^L{}_{I\alpha} = K^K{}_{I\gamma} \cdot C^\gamma{}_{\alpha\beta}\,. \tag{20}$$

Сравнивая это соотношение с (19), заключаем, что базисным векторам I_α можно поставить в соответствие матрицы $K^K{}_{L\alpha}$. Это соответствие будем называть *параметрическим представлением* алгебры линейных преобразований и записывать так

$$I_\alpha \sim K^L{}_{I\alpha}\,.$$

Далее рассмотрим дифференциальные уравнения для зависимости координат линейного отображения от параметров. Для этого запишем уравнение (5) в следующем виде

$$l^M{}_L(\varphi_1) = l^M{}_K(\varphi) \cdot l^K{}_L(\varphi_0)\,,$$

где $\varphi_1 = \Phi(\varphi, \varphi_0)$, и рассмотрим его при $\varphi_0 = 0 + \delta\varphi$:

$$\begin{aligned} &l^M{}_L(\varphi) + \delta l^M{}_L(\varphi) = \\ &\qquad\left[l^K{}_L(0) + \left(\frac{\delta l^K{}_L(\varphi_0)}{\delta {\varphi_0}^\alpha}\right)_{\varphi_0=0} \cdot \delta\varphi^\alpha\right] \cdot l^M{}_K(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Учитывая, что $l^K{}_L(0) = \delta^K{}_L$, получим

$$\delta l^M{}_L(\varphi) = l^M{}_K(\varphi) \cdot K^K{}_{L\alpha} \cdot \delta\varphi^\alpha\,. \tag{21}$$

Эти уравнения позволяют определить координаты линейного отображения в зависимости от параметров.

1. Группа поворотов

В качестве примера воспользуемся уравнениями (21) для определения матрицы поворота в плоскости с сигнатурой $(+,-)$(Смотри Раздел IV.2). Из (21) имеем

$$\begin{aligned} \delta u^1{}_1 &= \delta\varphi \cdot (K^1{}_1 \cdot u^1{}_1 + K^2{}_1 \cdot u^1{}_2) \\ \delta u^1{}_2 &= \delta\varphi \cdot (K^1{}_2 \cdot u^1{}_1 + K^2{}_2 \cdot u^1{}_2) \\ \delta u^2{}_1 &= \delta\varphi \cdot (K^1{}_1 \cdot u^2{}_1 + K^2{}_1 \cdot u^2{}_2) \\ \delta u^2{}_2 &= \delta\varphi \cdot (K^1{}_2 \cdot u^2{}_1 + K^2{}_2 \cdot u^2{}_2)\,. \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$u^1{}_1(0) = 1, \quad u^1{}_2(0) = 0, \quad u^2{}_1(0) = 0, \quad u^2{}_2(0) = 1\,.$$

Для компонент матрицы поворота в рассматриваемом случае выполняются соотношения (14):

$$\begin{aligned} &u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 - u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 = 1 \\ &u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 - u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 = 0 \\ &u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 - u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 = 0 \\ &u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 - u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 = -1\,. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти уравнения по φ и рассматривая полученные уравнения при $\varphi = 0$, получим:

$$\begin{aligned} &\delta u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 - \delta u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 = \delta u^1{}_1 = 0 \\ &\delta u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 + u^1{}_1 \cdot \delta u^1{}_2 - \delta u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 - u^2{}_1 \cdot \delta u^2{}_2 \\ &= \delta u^1{}_2 - \delta u^2{}_1 = 0 \\ &\delta u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 + u^1{}_2 \cdot \delta u^1{}_1 - \delta u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 - u^2{}_2 \cdot \delta u^2{}_1 \\ &= \delta u^1{}_2 - \delta u^2{}_1 = 0 \\ &\delta u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 - \delta u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 = -\delta u^2{}_2 = 0\,. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$K_1{}^1 = K_2{}^2 = 0, \quad K_2{}^1 = K_1{}^2 = K\,.$$

В результате дифференциальные уравнения (21) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \delta u^1{}_1 &= \delta\varphi \cdot K \cdot u^1{}_2\,, \qquad & \delta u^1{}_2 &= \delta\varphi \cdot K \cdot u^1{}_1\,, \\ \delta u^2{}_1 &= \delta\varphi \cdot K \cdot u^2{}_2\,, \qquad & \delta u^2{}_2 &= \delta\varphi \cdot K \cdot u^2{}_1\,. \end{aligned}$$

Первая пара уравнений дает

$$u_1{}^1 = \cosh(K \cdot \varphi), \quad u_2{}^1 = \sinh(K \cdot \varphi)\,,$$

вторая пара уравнений дает

$$u_2{}^2 = \cosh(K \cdot \varphi), \quad u_1{}^2 = \sinh(K \cdot \varphi)\,.$$

Аналогично определим матрицы поворота в плоскости с сигнатурой $(+,+)$ (Смотри Раздел IV.2). Для компонент матрицы поворота в этом случае выполняются соотношения (15):

$$\begin{aligned} u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 &= 1 \\ u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 &= 0 \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 + u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 &= 0 \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти уравнения по φ и рассматривая полученные уравнения при $\varphi = 0$, получим:

$$\begin{aligned} &\delta u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 + \delta u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 = \delta u^1{}_1 = 0 \\ &\delta u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 + u^1{}_1 \cdot \delta u^1{}_2 + \delta u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 + u^2{}_1 \cdot \delta u^2{}_2 \\ &= \delta u^1{}_2 + \delta u^2{}_1 = 0 \\ &\delta u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 + u^1{}_2 \cdot \delta u^1{}_1 + \delta u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 + u^2{}_2 \cdot \delta u^2{}_1 \\ &= \delta u^1{}_2 + \delta u^2{}_1 = 0 \\ &\delta u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 + \delta u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 = \delta u^2{}_2 = 0\,. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$K^1{}_1 = K^2{}_2 = 0, \quad K^1{}_2 = -K^2{}_1 = K,.$$

В результате дифференциальные уравнения (21) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \delta u^1{}_1 &= -\delta\varphi \cdot K \cdot u^1{}_2\,, \qquad & \delta u^1{}_2 &= \delta\varphi \cdot K \cdot u^1{}_1\,, \\ \delta u^2{}_1 &= -\delta\varphi \cdot K \cdot u^2{}_2\,, \qquad & \delta u^2{}_2 &= \delta\varphi \cdot K \cdot u^2{}_1\,. \end{aligned}$$

Первая пара уравнений дает

$$u^1{}_1 = \cos(K \cdot \varphi), \quad u^1{}_2 = \sin(K \cdot \varphi)\,,$$

вторая пара уравнений дает

$$u^2{}_2 = \cos(K \cdot \varphi), \quad u^2{}_1 = -\sin(K \cdot \varphi)\,.$$

Далее рассмотрим повороты в пространстве-времени $\mathbb{X}$. Произвольное преобразование, сохраняющее квадрат длины вектора x, представляет собой поворот в произвольной плоскости в пространстве-времени $\mathbb{X}$ на угол, который мы обозначим θ. Это преобразование удовлетворяет условиям

$$u(\theta_1 + \theta_2) = u(\theta_1) \circ u(\theta_2) \tag{22}$$

$$u(0) = \Delta \quad \text{– единичному преобразованию} \tag{23}$$

Продифференцируем уравнение (22) по θ_1, после чего положим

$$\theta_1 = 0$$

и введем переобозначение

$$\theta_2 = \theta\,, \qquad \delta\theta_1 = \delta\theta\,.$$

Получим

$$\delta u(\theta) = \delta\theta \cdot I_\theta \circ u(\theta)\,, \tag{24}$$

где

$$I_\theta = \frac{du}{d\theta}\Big|_{\theta=0}\,.$$

Этот вектор назовем базисным вектором оси поворота.

Уравнение (24) при начальном условии (23) позволяет записать поворот в следующем виде

$$u(\theta) = \exp(I_\theta \cdot \theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(I_\theta \cdot \theta) + \frac{1}{2!}\,(I_\theta \cdot \theta)^2 + \ldots\,. \tag{25}$$

Возможны два случая, которым удовлетворяет квадрат базисного вектора оси поворота:

1.

$$(I_\theta)^2 = -\mathfrak{E}_0\,,$$

2.

$$(I_\theta)^2 = \mathfrak{E}_0\,.$$

В первом случае поворот (25) принимает вид

$$u(\theta) = \mathfrak{E}_0 \cdot \cos\theta + I_\theta\,\sin\theta\,. \tag{26}$$

Во втором случае поворот (25) принимает вид*

$$u(\theta) = \mathfrak{E}_0 \cdot \cosh\theta + I_\theta\,\sinh\theta\,. \tag{27}$$

---

*Формулы (26) и (27) являются обобщением формулы Эйлера

$$\exp(i \cdot \theta) = \cos\theta + i \cdot \sin\theta\,,$$

где i- мнимая единица.

Поворот вокруг оси I_θ может быть разложен по базисным поворотам. Пусть φ^α углы базисных поворотов. Оси базисных поворотов I_α отождествим с базисными векторами $\mathfrak{E}_\alpha$ пространства-времени фундаментальных частиц. Тогда соотношение (19) преобразуется в

$$\mathfrak{E}_\alpha \circ \mathfrak{E}_\beta = \mathfrak{E}_\gamma \cdot {}^{+}C^{\gamma}{}_{\beta\alpha}\,. \tag{28}$$

Оно определяет алгебру поворотов $\mathbb{U}$ как подалгебру пространства-времени $\mathbb{X}$. Для этой алгебры из условия ассоциативности имеем

$$ {}^{+}C^{\kappa}{}_{\lambda\alpha} \cdot {}^{+}C^{\lambda}{}_{\mu\beta} = {}^{+}C^{\kappa}{}_{\mu\gamma} \cdot {}^{+}C^{\gamma}{}_{\beta\alpha}\,. \tag{29}$$

Отсюда следует регулярное параметрическое представление алгебры поворотов

$$\mathfrak{E}_\alpha \sim {}^{+}C^{\gamma}{}_{\beta\alpha}\,.$$

Матрицы ${}^{+}C^{\gamma}{}_{\beta\alpha}$ в этом случае называются *генераторами* поворотов.

Если пространством представления алгебры поворотов является пространство-время, то соотношение (20) принимает вид

$$ {}^{+}C^{K}{}_{L\alpha} \cdot {}^{+}C^{L}{}_{I\beta} = {}^{+}C^{K}{}_{I\gamma} \cdot {}^{+}C^{\gamma}{}_{\beta\alpha}\,. \tag{30}$$

И в этом случае *параметрическое представление* алгебры поворотов записывать так

$$\mathfrak{E}_\alpha \sim {}^{+}C^{L}{}_{I\alpha}\,.$$

Генераторами поворотов служат матрицы ${}^{+}C^{L}{}_{I\alpha}$.

Рассмотрим дифференциал поворота du вблизи единицы группы

$$du(\varphi^\alpha) = I^{I}{}_{K}\,\frac{\partial u^{K}{}_{I}(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha}\,d\varphi^\alpha = I^{I}{}_{K} \cdot {}^{+}C^{K}{}_{I\alpha} \cdot d\varphi^\alpha\,.$$

где принято

$$ {}^{+}C^{K}{}_{I\alpha} = \left.\frac{\partial u^{K}{}_{I}(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha}\right|_{\varphi^\alpha=0}\,.$$

Векторы

$$\mathfrak{E}_\alpha = I^{I}{}_{K}\,{}^{+}C^{K}{}_{I\alpha} \tag{31}$$

представляют собой базисные векторы осей поворотов в пространстве-времени. Таким образом,

$$du = \mathfrak{E}_\alpha\, d\varphi^\alpha\,.$$

Сравнение этой формулы с

$$du = \left. I_\theta\, d\theta\right|_{\theta=0}\,.$$

показывает, что векторы I_θ могут быть выражены через векторы базисных поворотов $\mathfrak{E}_\alpha$

$$I_\theta = \mathfrak{E}_\alpha \cdot C^\alpha\,. \tag{32}$$

Здесь C^α – "направляющие косинусы" вектора оси поворота I_θ

$$C^\alpha = \left.\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \theta}\right|_{\theta=0}\,.$$

Из (32) вытекает условие, которому удовлетворяют "направляющие косинусы"

$$(I_\theta)^2 = (\mathfrak{E}_\alpha)^2 \cdot (C^\alpha)^2\,.$$

В частном случае, когда

$$I_\theta = \mathfrak{E}_\alpha$$

имеем базисные повороты, а соотношения (26) и (27) преобразуются в следующие

$$u(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \mathfrak{E}_0\,\cos\varphi^\alpha + \mathfrak{E}_\alpha\,\sin\varphi^\alpha\,, & \text{для } (\mathfrak{E}_\alpha)^2 = -1\,; \\ \mathfrak{E}_0\,\cosh\varphi^\alpha + \mathfrak{E}_\alpha\,\sinh\varphi^\alpha\,, & \text{для } (\mathfrak{E}_\alpha)^2 = 1\,. \end{cases} \tag{33}$$

(По α нет суммирования.)

Матрицы поворота в подалгебре поворотов имеют вид

$$u^{\gamma}{}_{\beta}(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \delta^{\gamma}{}_{\beta} \cdot \cos\varphi^\alpha + {}^{+}C^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \cdot \sin\varphi^\alpha\,, \\ \qquad\qquad \text{для } (\mathfrak{E}_\alpha)^2 = -1\,; \\ \delta^{\gamma}{}_{\beta} \cdot \cosh\varphi^\alpha + {}^{+}C^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \cdot \sinh\varphi^\alpha\,, \\ \qquad\qquad \text{для } (\mathfrak{E}_\alpha)^2 = 1\,, \end{cases} \tag{34}$$

Матрицы поворота в пространстве-времени таковы

$$u^{K}{}_{I}(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \delta^{K}{}_{I} \cdot \cos\varphi^\alpha + {}^{+}C^{K}{}_{I\alpha} \cdot \sin\varphi^\alpha\,, \\ \qquad\qquad \text{для } (\mathfrak{E}_\alpha)^2 = -1\,; \\ \delta^{K}{}_{I} \cdot \cosh\varphi^\alpha + {}^{+}C^{K}{}_{I\alpha} \cdot \sinh\varphi^\alpha\,, \\ \qquad\qquad \text{для } (\mathfrak{E}_\alpha)^2 = 1\,, \end{cases} \tag{35}$$

2. Группа растяжений

Произвольное преобразование, сохраняющее направление вектора, представляет собой растяжение, определяемое параметром который мы обозначим k. Это преобразование удовлетворяет условиям

$$h(k_1 + k_2) = h(k_1) \circ h(k_2) \tag{36}$$

$$h(0) = \Delta \quad \text{– единичному преобразованию} \tag{37}$$

Продифференцируем уравнение (36) по k_1, после чего положим

$$k_1 = 0$$

и введем переобозначение

$$k_2 = k\,, \qquad \delta k_1 = \delta k\,.$$

Получим

$$\delta h(k) = \delta k \cdot \mathfrak{E}_0 \circ h(k)\,, \tag{38}$$

где

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{dh}{dk}\Big|_{k=0}\,.$$

Этот вектор назовем базисным вектором оси поворота.

Уравнение (38) при начальном условии (37) позволяет записать поворот в следующем виде

$$h(k) = \exp(\mathfrak{E}_0 \cdot k) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\mathfrak{E}_0 \cdot k) + \frac{1}{2!}\,(\mathfrak{E}_0 \cdot k)^2 + \dots. \tag{39}$$

VI. ПОВОРОТЫ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА

Используя (32), получим представление поворотов в алгебре Клиффорда векторами этой алгебры:

$$u(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \mathcal{E}_0\,\cos\varphi^\alpha + \mathcal{E}_\alpha\,\sin\varphi^\alpha\,, & \text{для } (\mathcal{E}_\alpha)^2 = -1\,;\\ \mathcal{E}_0\,\cosh\varphi^\alpha + \mathcal{E}_\alpha\,\sinh\varphi^\alpha\,, & \text{для } (\mathcal{E}_\alpha)^2 = 1\,. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$I_\alpha = I^I{}_K \cdot {}^+C^K{}_{I\alpha} = \mathcal{E}_\alpha\,.$$

Матрицы поворота пространства алгебры Клиффорда вокруг оси, задаваемой вектором $\mathcal{E}_\alpha$, можно записать так

$$u^K{}_I(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \delta^K{}_I \cdot \cos\varphi^\alpha + {}^+C^K{}_{I\alpha} \cdot \sin\varphi^\alpha\,,\\ \qquad\qquad \text{для } (\mathcal{E}_\alpha)^2 = -1\,;\\ \delta^K{}_I \cdot \cosh\varphi^\alpha + {}^+C^K{}_{I\alpha} \cdot \sinh\varphi^\alpha\,,\\ \qquad\qquad \text{для } (\mathcal{E}_\alpha)^2 = 1\,, \end{cases}$$

где ${}^+C^K{}_{I\alpha}$ есть структурные матрицы регулярного представления базисных векторов $\mathcal{E}_\alpha$, по индексу α нет суммирования. Отсюда следует, что

$$K^K{}_{I\alpha} = \frac{\partial u^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial\varphi^\alpha}\Big|_{\varphi^\alpha=0} = {}^+C^K{}_{I\alpha} \tag{40}$$

1. Полувекторы

Рассмотрим поворот в алгебре Клиффорда относительно оси $\mathcal{E}_{21}$. В обратном регулярном представлении такой поворот представляется вектором алгебры Клиффорда

$$u = \mathcal{E}_0\,\cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\,\sin\varphi\,. \tag{41}$$

Сопряженный поворот представляется вектором

$${}^+u = \mathcal{E}_0\,\cos\varphi - \mathcal{E}_{21}\,\sin\varphi\,.$$

Вектор ${}^+u$ является обратным по отношению к u. То есть

$${}^+u \circ u = (u)^{-1} \circ u = u \circ {}^+u = u \circ (u)^{-1} = \mathcal{E}_0\,.$$

Назовем вектор u – поворотом на угол $(+\varphi)$, а вектор ${}^+u = (u)^{-1}$ – поворотом на угол $(-\varphi)$. Рассмотрим далее произведение $u \circ u$

$$\begin{aligned} &u \circ u = u^2 = \mathcal{E}_0\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \mathcal{E}_{21}\,2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\\ &= \mathcal{E}_0\,\cos 2\,\varphi - \mathcal{E}_{21}\,\sin 2\,\varphi\,. \end{aligned}$$

Таким образом, u^2 – есть поворот на угол $(+2\,\varphi)$. Аналогично ${}^+u^2$ – есть поворот на угол $(-2\,\varphi)$.

Рассмотрим теперь преобразование векторов алгебры Клиффорда под действием поворотов. Рассмотрим сначала алгебру Клиффорда $\mathbb{C}_2$, построенную на базисных векторах $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_{21}$. Сигнатура этих векторов такова $(+, ++, -)$. Рассмотрим вектор

$$\psi = \mathcal{E}_1\,x^1 + \mathcal{E}_2\,x^2\,,$$

принадлежащий этой алгебре. Вычислим вектор

$$\psi' = \psi \circ u\,.$$

$$\begin{aligned} &\psi' = \psi \circ u = (\mathcal{E}_1\,x^1 + \mathcal{E}_2\,x^2) \circ (\mathcal{E}_0\,\cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\,\sin\varphi)\\ &= \mathcal{E}_1\,(x^1\,\cos\varphi + x^2\,\sin\varphi) + \mathcal{E}_2\,(x^2\,\cos\varphi - x^1\,\sin\varphi)\,. \end{aligned}$$

То есть, ψ' представляет собой вектор, повернутый относительно ψ на угол $(-\varphi)$. Аналогично этому

$$\begin{aligned} &\psi' = u \circ \psi = (\mathcal{E}_0\,\cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\,\sin\varphi) \circ (\mathcal{E}_1\,x^1 + \mathcal{E}_2\,x^2)\\ &= \mathcal{E}_1\,(x^1\,\cos\varphi - x^2\,\sin\varphi) + \mathcal{E}_2\,(x^2\,\cos\varphi + x^1\,\sin\varphi) \end{aligned}$$

– вектор, повернутый относительно ψ на угол $(+\varphi)$. * Векторы $\psi' = \psi \circ {}^+u$ и $\psi' = {}^+u \circ \psi$ повернуты относительно ψ на углы $(+\varphi)$ и $(-\varphi)$ соответственно. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\psi \circ u = {}^+u \circ \psi\,, \quad u \circ \psi = \psi \circ {}^+u\,,\\ &u \circ \psi \circ u = \psi\,, \quad {}^+u \circ \psi {}^+u = \psi\,. \end{aligned}$$

Кроме того, вектор вида

$$u \circ \psi \circ {}^+u = u^2 \circ \psi = \psi \circ {}^+u^2$$

---

*Заметим, что для алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_2$, построенной на базисных векторах $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_{21}$ с сигнатурой $(+, --, -)$ умножение ψ на h справа $(\psi \circ u)$ поворачивает ψ на угол $(+\varphi)$, а слева $(u \circ \psi)$ – на угол $(-\varphi)$

соответствует повороту ψ на угол $(+2\,\varphi)$, а вектор

$$ {}^{+}u \circ \psi \circ u = {}^{+}u^2 \circ \psi = \psi \circ u^2 $$

– повороту ψ на угол $(-2\,\varphi)$.

Рассмотрим теперь другой вектор, принадлежащий указанной алгебре,

$$ \lambda = \mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_{21}\, x^{21}\,, $$

Умножение λ на u справа дает

$$ \lambda' = \lambda \circ u = (\mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_{21}\, x^{21}) \circ (\mathcal{E}_0\, \cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\, \sin\varphi) $$
$$ = \mathcal{E}_0\, (x^0\, \cos\varphi - x^{21}\, \sin\varphi) + \mathcal{E}_{21}\, (x^{21}\, \cos\varphi + x^0\, \sin\varphi)\,. $$

То есть, λ' представляет собой вектор, повернутый относительно λ на угол $(-\varphi)$. Умножим λ на u слева

$$ \lambda' = u \circ \lambda = (\mathcal{E}_0\, \cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\, \sin\varphi) \circ (\mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_{21}\, x^{21}) $$
$$ = \mathcal{E}_0\, (x^0\, \cos\varphi - x^{21}\, \sin\varphi) + \mathcal{E}_{21}\, (x^{21}\, \cos\varphi + x^0\, \sin\varphi)\,. $$

Следовательно, умножение λ на u слева поворачивает λ также на угол $(-\varphi)$. Аналогично этому легко получить, что векторы ${}^{+}u \circ \lambda$ и $\lambda \circ {}^{+}u$ соответствуют повороту на угол $(+\varphi)$. Из

$$ u \circ \lambda = \lambda \circ u\,, \qquad \lambda \circ {}^{+}u = {}^{+}u \circ \lambda\,, $$

следует

$$ u \circ \lambda \circ {}^{+}u = \lambda\,, \qquad {}^{+}u \circ \lambda \circ u = \lambda\,. $$

а также, что вектор

$$ u \circ \lambda \circ u = u^2 \circ \lambda = \lambda \circ u^2 $$

соответствует повороту λ на угол $(-2\,\varphi)$, а вектор

$$ {}^{+}u \circ \lambda \circ {}^{+}u = {}^{+}u^2 \circ \lambda = \lambda \circ {}^{+}u^2 $$

– повороту λ на угол $(+2\,\varphi)$.

Рассмотрим теперь преобразование полного вектора алгебры $\mathbb{C}_2$

$$ x = (\mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_{21}\, x^{21}) + (\mathcal{E}_1\, x^1 + \mathcal{E}_2\, x^2) = \lambda + \psi $$

под действием поворота (41). Из предыдущего следует, что умножение x на u справа $(x \circ u)$ поворачивает каждую из частей λ и ψ на угол $(-\varphi)$, а умножение слева поворачивает часть ψ на угол $(+\varphi)$, а часть λ на угол $(-\varphi)$. Умножение x на ${}^{+}u$ слева $({}^{+}u \circ x)$ приводит к повороту каждой из частей λ и ψ на угол $(+\varphi)$, а умножение x на ${}^{+}u$ справа $(x \circ {}^{+}u)$ приводит к повороту части λ на угол $(+\varphi)$, а части ψ на угол $(-\varphi)$. Преобразования вида

$$ u \circ x \circ {}^{+}u\,, \qquad {}^{+}u \circ x \circ u \tag{42} $$

сохраняют часть λ но поворачивают часть ψ на угол $(-2\,\varphi)$ и $(+2\,\varphi)$ соответственно. И, напротив, преобразования вида

$$ u \circ x \circ u\,, \qquad {}^{+}u \circ x \circ {}^{+}u \tag{43} $$

сохраняют часть ψ, но поворачивают часть λ на угол $(-2\,\varphi)$ и $(+2\,\varphi)$ соответственно. То есть,

$$ u \circ x \circ {}^{+}u = \lambda + u \circ \psi \circ {}^{+}u\,, $$
$$ {}^{+}u \circ x \circ u = \lambda + {}^{+}u \circ \psi \circ u\,, $$
$$ u \circ x \circ u = u \circ \lambda \circ u + \psi\,, $$
$$ {}^{+}u \circ x \circ {}^{+}u = {}^{+}u \circ \lambda \circ {}^{+}u \; + \psi\,. $$

Все сказанное свидетельствует о том, что полный вектор алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_2$ содержит два слагаемых, преобразующихся по разному под действием поворотов. В связи с этим дадим следующее определение. Назовем часть вектора алгебры Клиффорда, преобразующуюся при поворотах (42) и сохраняющуюся при поворотах (43), *полувектором первого рода*, а часть вектора алгебры Клиффорда, преобразующуюся при поворотах (43) и сохраняющуюся при поворотах (42), *полувектором второго рода*.

Рассмотрим далее вектор алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_3$ с сигнатурой $(+,+++,---,-)$:

$$ x = \mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_1\, x^1 + \mathcal{E}_2\, x^2 + \mathcal{E}_3\, x^3 $$
$$ +\mathcal{E}_{21}\, x^{21} + \mathcal{E}_{13}\, x^{13} + \mathcal{E}_{23}\, x^{23} + \mathcal{E}_{123}\, x^{123} $$

Рассмотрим поведение двух слагаемых

$$ \chi = \mathcal{E}_3\, x^3 + \mathcal{E}_{123}\, x^{123}\,, \qquad \mu = \mathcal{E}_{13}\, x^{13} + \mathcal{E}_{23}\, x^{23} $$

под действием поворота (41). Имеем

$$ \chi' = \chi \circ u = (\mathcal{E}_3\, x^3 + \mathcal{E}_{123}\, x^{123}) \circ (\mathcal{E}_0\, \cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\, \sin\varphi) $$
$$ = \mathcal{E}_3\, (x^3\, \cos\varphi - x^{123}\, \sin\varphi) + \mathcal{E}_{123}\, (x^{123}\, \cos\varphi + x^0\, \sin\varphi)\,. $$

$$ \chi' = u \circ \chi = (\mathcal{E}_0\, \cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\, \sin\varphi) \circ (\mathcal{E}_3\, x^3 + \mathcal{E}_{123}\, x^{123}) = $$
$$ \mathcal{E}_3\, (x^3\, \cos\varphi - x^{123}\, \sin\varphi) + \mathcal{E}_{123}\, (x^{123}\, \cos\varphi + x^3\, \sin\varphi)\,. $$

$$ \mu' = \mu \circ u = (\mathcal{E}_{13}\, x^{13} + \mathcal{E}_{23}\, x^{23}) \circ (\mathcal{E}_0\, \cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\, \sin\varphi) = $$
$$ \mathcal{E}_{13}\, (x^{13}\, \cos\varphi - x^{23}\, \sin\varphi) + \mathcal{E}_{23}\, (x^{23}\, \cos\varphi + x^{13}\, \sin\varphi)\,. $$

$$ \mu' = u \circ \mu = (\mathcal{E}_0\, \cos\varphi + \mathcal{E}_{21}\, \sin\varphi) \circ (\mathcal{E}_{13}\, x^{13} + \mathcal{E}_{23}\, x^{23}) = $$
$$ \mathcal{E}_{13}\, (x^{13}\, \cos\varphi - x^{23}\, \sin\varphi) + \mathcal{E}_{23}\, (x^{23}\, \cos\varphi + x^{13}\, \sin\varphi)\,. $$

Отсюда следует, что слагаемые

$$ \psi + \mu = \mathcal{E}_1\, x^1 + \mathcal{E}_2\, x^2 + \mathcal{E}_{13}\, x^{13} + \mathcal{E}_{23}\, x^{23} $$

составляют полувектор первого рода, а слагаемые

$$ \lambda + \chi = \mathcal{E}_0\, x^0 + \mathcal{E}_{21}\, x^{21} + \mathcal{E}_3\, x^3 + \mathcal{E}_{123}\, x^{123} $$

составляют полувектор второго рода.

Рассмотрим далее вектор алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$ с сигнатурой $(+,+++-,---+++,-+++,-)$:

$$x = \mathcal{E}_0\,x^0 + \mathcal{E}_1\,x^1 + \mathcal{E}_2\,x^2 + \mathcal{E}_3\,x^3 + \mathcal{E}_4\,x^4 +$$
$$\mathcal{E}_{21}\,x^{21} + \mathcal{E}_{13}\,x^{13} + \mathcal{E}_{23}\,x^{23} + \mathcal{E}_{14}\,x^{14} + \mathcal{E}_{24}\,x^{24} + \mathcal{E}_{34}\,x^{34} +$$
$$\mathcal{E}_{123}\,x^{123} + \mathcal{E}_{124}\,x^{124} + \mathcal{E}_{134}\,x^{134} + \mathcal{E}_{234}\,x^{234} + \mathcal{E}_{1234}\,x^{1234}\,.$$

Он распадается на полувектор первого рода

$$x' = (\mathcal{E}_1\,x^1 + \mathcal{E}_2\,x^2) + (\mathcal{E}_{13}\,x^{13} + \mathcal{E}_{23}\,x^{23})$$
$$+(\mathcal{E}_{14}\,x^{14} + \mathcal{E}_{24}\,x^{24}) + (\mathcal{E}_{134}\,x^{134} + \mathcal{E}_{234}\,x^{234})$$

и полувектор второго рода

$$x'' = (\mathcal{E}_0\,x^0 + \mathcal{E}_{21}\,x^{21}) + (\mathcal{E}_3\,x^3 + \mathcal{E}_{123}\,x^{123})$$
$$+(\mathcal{E}_4\,x^4 + \mathcal{E}_{124}\,x^{124}) + (\mathcal{E}_{34}\,x^{34} + \mathcal{E}_{1234}\,x^{1234})\,.$$

2. Геометрические повороты

Базисными векторами осей геометрических поворотов служат базисные векторы

$$\mathcal{E}_{21}\,, \qquad \mathcal{E}_{13}\,, \qquad \mathcal{E}_{32}\,.$$

Вместе с базисным вектором $\mathcal{E}_0$ указанные векторы образуют алгебру Клиффорда $\mathbb{C}_2$ – алгебру кватернионов. Генераторами геометрических поворотов в пространстве алгебры $\mathbb{U}$ являются матрицы Паули

$$\mathcal{E}_{21} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline 32 & & -1 & & \\ 13 & 1 & & & \\ \hline 21 & & & & 1 \\ 0 & & & -1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_3$$

$$\mathcal{E}_{13} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline 32 & & & 1 & \\ 13 & & & & 1 \\ \hline 21 & -1 & & & \\ 0 & & -1 & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_2$$

$$\mathcal{E}_{32} \sim \begin{array}{c|cc|cc|} & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline 32 & & & & 1 \\ 13 & & & -1 & \\ \hline 21 & & 1 & & \\ 0 & -1 & & & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_1$$

Генераторами геометрических поворотов в пространстве представления $\mathbb{X}$ являются матрицы

$$\mathcal{E}_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline 32 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ 13 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 21 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 42 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ 14 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ 1324 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ 34 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ 2 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ 123 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ \hline 134 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ 234 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ 4 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ 124 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline \end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c} & & & & & & & & \\ 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline -1 & & & & & & & & 13 \\ & 1 & & & & & & & 0 \\ & & -1 & & & & & & 14 \\ & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline & & & & -1 & & & & 2 \\ & & & & & 1 & & & 123 \\ & & & & & & -1 & & 234 \\ & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline \sigma_3 & & & & 0 \\ & \sigma_3 & & & 34 \\ \hline & & \sigma_3 & & 123 \\ & & & \sigma_3 & 124 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathcal{E}_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline 32 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ 13 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ 21 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 42 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ 14 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ 1324 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ 34 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ 2 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ 3 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ 123 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline 134 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ 234 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ 4 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ 124 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$= i \begin{array}{|cccc|cccc|c} 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline & -i & & & & & & & 13 \\ i & & & & & & & & 0 \\ & & & -i & & & & & 14 \\ & & i & & & & & & 34 \\ \hline & & & & & -i & & & 2 \\ & & & & i & & & & 123 \\ & & & & & & & -i & 234 \\ & & & & & & i & & 124 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c} 0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline \sigma_2 & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & 34 \\ \hline & & \sigma_2 & & 123 \\ & & & \sigma_2 & 124 \\ \hline \end{array}$$

$$
\mathcal{E}_{32} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & 1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & 1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma_1 & & & & 0 \\
 & \sigma_1 & & & 34 \\ \hline
 & & \sigma_1 & & 123 \\
 & & & \sigma_1 & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

3. Релятивистские повороты

Релятивистские повороты состоят из геометрических поворотов относительно осей

$$\mathcal{E}_{21}\,, \qquad \mathcal{E}_{13}\,, \qquad \mathcal{E}_{32}\,.$$

и так называемых *бустов*, то есть поворотов относительно осей

$$\mathcal{E}_{14}\,, \qquad \mathcal{E}_{42}\,, \qquad \mathcal{E}_{34}\,.$$

Эти повороты являются гиперболическими. Указанные базисные векторы совместно с базисными векторами

$$\mathcal{E}_{0}\,, \qquad \mathcal{E}_{1324}$$

составляют алгебру Клиффорда $\mathbb{C}_3$. Генераторами релятивистских поворотов в пространстве алгебры $\mathbb{U}$ являются матрицы

$$
\mathcal{E}_{21} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & -1 & & \\
14 & & & & & 1 & & & \\
1324 & & & & & & & & 1 \\
34 & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
-1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & -1 & & 14 \\
 & & & 1 & 34 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
\sigma_3 & & 0 \\ \hline
 & \sigma_3 & 34 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{13} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & \\
0 & & -1 & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & 1 & \\
14 & & & & & & & & 1 \\
1324 & & & & & -1 & & & \\
34 & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
 & -i & & & 13 \\
i & & & & 0 \\ \hline
 & & & -i & 14 \\
 & & i & & 34 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
\sigma_2 & & 0 \\ \hline
 & \sigma_2 & 34 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{32} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 \\
14 & & & & & & & -1 & \\
1324 & & & & & & 1 & & \\
34 & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 14 \\
 & & 1 & & 34 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
\sigma_1 & & 0 \\ \hline
 & \sigma_1 & 34 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{14} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & 1 \\
21 & & & & & 1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
42 & & & 1 & & & & & \\
14 & & & & 1 & & & & \\
1324 & 1 & & & & & & & \\
34 & & 1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
 & & & 1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 14 \\
1 & & & & 34 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
 & \sigma_1 & 0 \\ \hline
\sigma_1 & & 34 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{24} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & 1 & \\
21 & & & & & & 1 & & \\
0 & & & & & -1 & & & \\ \hline
42 & & & & -1 & & & & \\
14 & & & 1 & & & & & \\
1324 & & 1 & & & & & & \\
34 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
 & & & -i & 13 \\
 & & i & & 0 \\ \hline
 & -i & & & 14 \\
i & & & & 34 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
 & \sigma_2 & 0 \\ \hline
\sigma_2 & & 34 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{34} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & & & & -1 & & & \\
13 & & & & & & -1 & & \\
21 & & & & & & & 1 & \\
0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
42 & -1 & & & & & & & \\
14 & & -1 & & & & & & \\
1324 & & & 1 & & & & & \\
34 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
 & & -1 & & 13 \\
 & & & 1 & 0 \\ \hline
-1 & & & & 14 \\
 & 1 & & & 34 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
 & \sigma_3 & 0 \\ \hline
\sigma_3 & & 34 \\ \hline
\end{array}
$$

Генераторами релятивистских поворотов в пространстве представления $\mathbb{X}$ помимо матриц, указанных в предыдущем Разделе, являются

$$
\mathcal{E}_{14} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&&&& & 1 &&&&&&&&& \\
13 & &&&&& && 1 &&&&&&&& \\
21 & &&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
0 & &&&&& 1 &&&&&&&&&& \\ \hline
42 & && 1 &&&&&&&&&&&&& \\
14 & &&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
1324 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
34 & & 1 &&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 & &&&&& &&&&& &&&& -1 & \\
2 & &&&&& &&&&& &&&&& -1 \\
3 & &&&&& &&&&& && -1 &&& \\
123 & &&&&& &&&&& &&& -1 && \\ \hline
134 & &&&&& &&&&& -1 &&&&& \\
234 & &&&&& &&&&&& -1 &&&& \\
4 & &&&&& &&& -1 &&&&&&& \\
124 & &&&&& &&&& -1 &&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & &&& 1 &&&& \\
0 & && 1 &&&&& \\
14 & & 1 &&&&&& \\
34 & 1 &&&&&&& \\ \hline
2 & &&&&&&& -1 \\
123 & &&&&&& -1 & \\
234 & &&&&& -1 && \\
124 & &&&& -1 &&& \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & \sigma_1 & & \\
34 & \sigma_1 & & & \\ \hline
123 & & & & -\sigma_1 \\
124 & & & -\sigma_1 & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{42} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&&&& && 1 &&&&&&&& \\
13 & &&&&& & -1 &&&&&&&&& \\
21 & &&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
0 & &&&& 1 &&&&&&&&&&& \\ \hline
42 & &&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
14 & && -1 &&&&&&&&&&&&& \\
1324 & & -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
34 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 & &&&&& &&&&& &&&&& -1 \\
2 & &&&&& &&&&& &&&& 1 & \\
3 & &&&&& &&&&& &&& 1 && \\
123 & &&&&& &&&&& && -1 &&& \\ \hline
134 & &&&&& &&&&&& -1 &&&& \\
234 & &&&&& &&&&& 1 &&&&& \\
4 & &&&&& &&&& 1 &&&&&& \\
124 & &&&&& &&& -1 &&&&&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & &&& i &&&& \\
0 & && -i &&&&& \\
14 & & i &&&&&& \\
34 & -i &&&&&&& \\ \hline
2 & &&&&&&& -i \\
123 & &&&&&& i & \\
234 & &&&&& -i && \\
124 & &&&& i &&& \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & -\sigma_2 & & \\
34 & -\sigma_2 & & & \\ \hline
123 & & & & \sigma_2 \\
124 & & & \sigma_2 & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\mathcal{E}_{34} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & &&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
13 & &&&&& -1 &&&&&&&&&& \\
21 & &&&&& & 1 &&&&&&&&& \\
0 & &&&&& && 1 &&&&&&&& \\ \hline
42 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
14 & & -1 &&&&&&&&&&&&&& \\
1324 & && 1 &&&&&&&&&&&&& \\
34 & &&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 & &&&&& &&&&& && 1 &&& \\
2 & &&&&& &&&&& &&& 1 && \\
3 & &&&&& &&&&& &&&& -1 & \\
123 & &&&&& &&&&& &&&&& -1 \\ \hline
134 & &&&&& &&& 1 &&&&&&& \\
234 & &&&&& &&&& 1 &&&&&& \\
4 & &&&&& &&&&& -1 &&&&& \\
124 & &&&&& &&&&&& -1 &&&& \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & && -1 &&&&& \\
0 & &&& 1 &&&& \\
14 & -1 &&&&&&& \\
34 & & 1 &&&&&& \\ \hline
2 & &&&&&& 1 & \\
123 & &&&&&&& -1 \\
234 & &&&& 1 &&& \\
124 & &&&&& -1 && \\ \hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & & \sigma_3 & & \\
34 & \sigma_3 & & & \\ \hline
123 & & & & -\sigma_3 \\
124 & & & -\sigma_3 & \\ \hline
\end{array}
$$

VII. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ АНТИЧАСТИЦЫ

Алгебра ${}^+\mathbb{X}$ была определена как пространство-время фундаментальной античастицы.

Введем линейное преобразование ${}^+l\colon {}^+\mathbb{X}\to{}^+\mathbb{X}$. Для него имеем $(\ )^+l = {}^+l^K{}_I\cdot(\ )K^I{}_K$, где $(\ )K^I{}_K$ и ${}^+l^K{}_I$ соответственно базисные преобразования и координаты преобразования $(\ )^+l$.

$$({}^+x)^+l = (x_L\cdot\mathfrak{E}^L)^+l = x_L\cdot(\mathfrak{E}^L)^+l = x_L\cdot(\mathfrak{E}^L)K^I{}_K\cdot{}^+u^K{}_I\,.$$

Если положить

$$(\mathfrak{E}^L)K^I{}_M = \mathfrak{E}^I\cdot\delta^L{}_M\,, \tag{44}$$

получим

$$({}^+x)^+l = x_L\cdot\delta^L{}_M\cdot{}^+l^M{}_I\cdot\mathfrak{E}^I = x_L\cdot{}^+l^L{}_I\cdot\mathfrak{E}^I\,.$$

Линейное преобразование ${}^+l\colon {}^+\mathbb{X}\to{}^+\mathbb{X}$ является сопряженным* линейному преобразованию $l\colon \mathbb{X}\to\mathbb{X}$.

---

*то есть полученным в результате сопряжения;

Связь между преобразованиями дается формулами:

$$\begin{aligned}
&{}^+(x') = {}^+(\mathfrak{E}_K \cdot l^K{}_I \cdot x^I) = \\
&\qquad {}^+(x^I) \cdot {}^+(l^K{}_I) \cdot {}^+(e_K) = x_I \cdot {}^+l^I{}_K \cdot \mathfrak{E}^K = {}^+x' \\
&{}^+(l^K{}_I) = {}^+l^I{}_K \\
&{}^+(I^I{}_K(\ )) = (\ )K^K{}_I \\
&{}^+(I^I{}_K(\ ) \cdot l^K{}_I) = {}^+(l^K{}_I) \cdot {}^+(I^I{}_K(\ )) = {}^+l^I{}_K \cdot (\ )K^K{}_I \\
&{}^+(l(\ )) = (\ )^+l \\
&{}^+l^M{}_L = g^{IM} \cdot l^K{}_I \cdot g_{KL}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&{}^+(({}^+x)') = {}^+(x_I \cdot {}^+l^I{}_K \cdot \mathfrak{E}^K) = \\
&\qquad {}^+(\mathfrak{E}^K) \cdot {}^+({}^+l^I{}_K) \cdot {}^+(x_I) = \mathfrak{E}_K \cdot l^K{}_I \cdot x^I = x' \\
&{}^+({}^+l^K{}_I) = l^I{}_K \\
&{}^+((\ )K^I{}_K) = I^K{}_I(\ ) \\
&{}^+((\ )K^I{}_K \cdot {}^+l^K{}_I) = {}^+({}^+l^K{}_I) \cdot {}^+((\ )K^I{}_K) = l^I{}_K \cdot I^K{}_I(\ ) \\
&{}^+((\ )^+l) = l(\ ) \\
&l^M{}_L = g^{IM} \cdot {}^+l^K{}_I \cdot g_{KL}\,.
\end{aligned}$$

Здесь g_{KL} и g^{IM} – компоненты метрического и обратного метрического тензоров.

На множестве ${}^+l$ действует закон композиции. Двум преобразованиям $({}^+x)^+l_1$ и $({}^+x)^+l_2$ ставится в соответствие композиция или произведение преобразований

$$({}^+x)^+l = (({}^+x)^+l_2)^+l_1\,.$$

Найдем связь между координатами композиции преобразований и координатами преобразований, участвующих в композиции.

$$\begin{aligned}
&(({}^+x)K^I{}_K \cdot {}^+(l_2)^K{}_I)^+l_1 = ((x_L \cdot \mathfrak{E}^L)K^I{}_K \cdot {}^+(l_2)^K{}_I)^+l_1 = \\
&(x_K \cdot {}^+(l_2)^K{}_I \cdot \mathfrak{E}^I)^+l_1 = \\
&(x_K \cdot {}^+(l_2)^K{}_I \cdot \mathfrak{E}^I)K^M{}_L \cdot {}^+(l_1)^L{}_M = \\
&(\mathfrak{E}^I)K^M{}_L \cdot {}^+(l_2)^K{}_I \cdot x_K \cdot {}^+(l_1)^L{}_M = \\
&x_K \cdot {}^+l_2{}^K{}_L \cdot {}^+(l_1)^L{}_I \cdot \mathfrak{E}^I = (x_I \cdot \mathfrak{E}^I)^+l = \\
&(x_I \cdot \mathfrak{E}^I)K^K{}_L \cdot {}^+l^L{}_K = x_K \cdot {}^+l^K{}_I \cdot \mathfrak{E}^I\,.
\end{aligned}$$

Поэтому

$${}^+l^K{}_I = {}^+(l_2)^K{}_L \cdot {}^+(l_1)^L{}_I\,.$$

Кроме того, из сравнения

$$((\ )^+l_2)^+l_1 = ((\ )K^L{}_K)K^I{}_M \cdot {}^+(l_2)^K{}_L \cdot {}^+(l_1)^M{}_I$$

и

$$\begin{aligned}
(\ )^+l = (\ )K^I{}_K \cdot {}^+l^K{}_I = (\ )K^I{}_K \cdot {}^+(l_1)^L{}_I \cdot {}^+(l_2)^K{}_L = \\
(\ )K^I{}_K \cdot {}^+(l_1)^M{}_I \cdot \delta^L{}_M \cdot {}^+(l_2)^K{}_L
\end{aligned}$$

получим правило композиции базисных преобразований

$$((\ )K^L{}_K)K^I{}_M = (\ )K^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,.$$

После введения на множестве линейных преобразований умножения на число $(\ )^+l_1 \odot \alpha = (\ )^+l$ и сложения $(\ )^+l_1 \oplus (\ )^+l_2 = (\ )^+l$ получим *алгебру линейных преобразований* ${}^+\mathbb{L}$.

${}^+\mathbb{L}$ можно рассматривать как пространство векторов вида ${}^+l = K^I{}_K \cdot {}^+l^K{}_I$. На векторах ${}^+l$ действует закон умножения ${}^+\mathbb{L} \circ {}^+\mathbb{L} \to {}^+\mathbb{L}$. Закон композиции для базисных векторов приобретает вид умножения:

$$K^L{}_K \circ K^I{}_M = K^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,. \tag{45}$$

Действие сопряженного линейного преобразования на сопряженный вектор можно также рассматривать как вид умножения:

$${}^+x' = {}^+x \circ {}^+l\,.$$

Закон композиции для базисных векторов (44) приобретает вид:

$$\mathfrak{E}^L \circ K^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot \mathfrak{E}^I\,. \tag{46}$$

1. Повороты в сопряженном пространства-времени

Введем *скалярное произведение* сопряженных векторов ${}^+x_1, {}^+x_2 \in {}^+\mathbb{X}$:

$$\langle {}^+x_1, {}^+x_2 \rangle = (x_1)_I\,(x_2)_K\,\langle \mathfrak{E}^I, \mathfrak{E}^K \rangle = (x_1)_I\,(x_2)_K \cdot g^{IK}\,.$$

Величина $g^{IK} = C^{IK}{}_0$ есть *обратный метрический тензор*. Заметим, что в случае сопряженной алгебры Клиффорда ${}^+\mathbb{C}_4$, g^{IK} представляет собой диагональную матрицу, диагональю которой является сигнатура базисных векторов $\mathfrak{E}^I$. Скалярное произведение сопряженного вектора на себя есть квадрат *длины* вектора:

$$\langle {}^+x, {}^+x \rangle = {}^+x_I \cdot {}^+x_K \cdot g^{IK} = ({}^+x)^2\,.$$

В общем случае алгебра ${}^+\mathbb{X}$ при линейном преобразовании переходит в другую алгебру ${}^+\mathbb{X}'$ с другим произведением векторов. В том числе линейное преобразование меняет и скалярное произведение векторов. Далее рассмотрим связь между скалярными произведениями в алгебрах ${}^+\mathbb{X}$ и ${}^+\mathbb{X}'$.

Пусть векторы ${}^+x_1$, ${}^+x_2 \in {}^+\mathbb{X}$ участвуют в скалярном произведении

$$\langle {}^+x_1, {}^+x_2 \rangle$$

и пусть векторы ${}^+x_1'$, ${}^+x_2' \in {}^+\mathbb{X}'$ получены из ${}^+x_1$, ${}^+x_2$ с помощью линейного преобразования ${}^+l$, то есть

$${}^+x' = ({}^+x)^+l, \quad {}^+x_1' = ({}^+x_1)^+l, \quad {}^+x_2' = ({}^+x_2)^+l\,.$$

Рассмотрим далее два скалярных произведения: вышеуказанное а также скалярное произведение преобразованных векторов

$$\langle ({}^+x_1)^+l, ({}^+x_2)^+l \rangle\,.$$

В общем случае эти скалярные произведения не равны друг другу. Действительно, в первом случае имеем:

$$\langle x_{1I} \cdot \mathfrak{E}^I, x_{2K} \cdot \mathfrak{E}^K \rangle = x_{1I} \cdot x_{2K} \cdot \langle \mathfrak{E}^I, \mathfrak{E}^K \rangle .$$

Здесь

$$\langle \mathfrak{E}^I, \mathfrak{E}^K \rangle = C^{IK}{}_0 = g^{IK}$$

Для второго скалярного произведения имеем:

$$\langle (x_{1I} \cdot \mathfrak{E}^I)^+ l, (x_{2K} \cdot \mathfrak{E}^K)^+ l \rangle = x_{1I} \cdot x_{2K} \cdot \langle (\mathfrak{E}^I)^+ l, (\mathfrak{E}^K)^+ l \rangle .$$

Рассматривая векторы $(\mathfrak{E}^I)^+ l$ как базисные в алгебре ${}^+\mathbb{X}'$ для скалярного произведения базисных векторов получим

$$\langle (\mathfrak{E}^I)^+ l, (\mathfrak{E}^K)^+ l \rangle = C'^{IK}{}_0 = g'^{IK} \tag{47}$$

где $C'^{IK}{}_0$ структурные постоянные алгебры ${}^+\mathbb{X}'$. Отсюда следует, что скалярные произведения отличаются вследствие различия метрических тензоров в алгебрах ${}^+\mathbb{X}$ и ${}^+\mathbb{X}'$. Из (47) следует уравнение, связывающее метрические тензоры алгебр ${}^+\mathbb{X}$ и ${}^+\mathbb{X}'$:

$${}^+l^I{}_P \cdot {}^+l^K{}_M \cdot g^{PM} = g'^{IK} . \tag{48}$$

Отсюда следует условие, при котором линейное преобразование сохраняет скалярное произведение. Потребуем, чтобы рассмотренные скалярные произведения были равны друг другу

$$\langle ({}^+x_1)^+ l, ({}^+x_2)^+ l \rangle = \langle {}^+x_1, {}^+x_2 \rangle .$$

Это равносильно условию

$$g'^{IK} = g^{IK}$$

Линейные преобразования, сохраняющие скалярное произведение в сопряженном пространстве-времени, назовем *сопряженными поворотами* и будем обозначать их символом ${}^+u$. Матрица линейного преобразования для сопряженных поворотов должна удовлетворять условию

$$g^{LM} \cdot {}^+u^I{}_L \cdot {}^+u^K{}_M \cdot g_{KN} = \delta_I^N .$$

Если ввести матрицу $u^N{}_L$ в соответствии с определением:

$$u^L{}_N = g_{KN} \cdot {}^+u^K{}_M \cdot g^{LM} ,$$

то условие принадлежности сопряженных линейных преобразований к поворотам приобретает вид:

$$u^L{}_N = {}^+(u^{-1})^L{}_N .$$

2. Растяжения сопряженного пространства-времени ${}^+\mathbb{X}$

Растяжения сопряженного пространства-времени ${}^+\mathbb{X}$ сохраняет направление вектора этого пространства. Обозначим такое растяжение ${}^+h$. Мы положим, что

$${}^+h = h^{-1} .$$

Таким образом,

$${}^+h^I{}_K = \frac{1}{h} \cdot \delta^I{}_K$$

и

$$({}^+h)^{-1} = h .$$

VIII. ОБЩАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

В этом разделе мы построим *общую кинематическую алгебру*, объединяющую обобщенное пространство-время, сопряженное обобщенное пространство-время и линейные преобразования этих пространств. Это пространство далее будет рассматриваться как пространство фундаментальных и промежуточных частиц и античастиц. Такое построение выполним в несколько этапов, рассматривая подалгебры общей кинематической алгебры по мере их усложнения.

1. Алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$

Эта алгебра далее положена в основу рассмотрения пространства промежуточных частиц.

Рассмотренную ранее алгебру линейных преобразований $\mathbb{L}$ дополним скалярным умножением $\langle \mathbb{L}, \mathbb{L} \rangle \to \mathbb{K}$. Для базисных векторов скалярное умножение определим следующим образом

$$\langle I^L{}_K, I^I{}_M \rangle = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M .$$

Тогда $\circ$-умножение базисных векторов в алгебре линейных преобразований определяется следующим образом

$$I^L{}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M . \tag{49}$$

Умножение векторов в алгебре записывается так

$$l = l_1 \circ l_2 . \tag{50}$$

Здесь $l, l_1, l_2 \in \mathbb{L}$. Пусть векторы l_1, l_2 записываются через базисные векторы следующим образом

$$l_1 = I^L{}_K \cdot (l_1)^K{}_L , \quad l_2 = I^I{}_M \cdot (l_2)^M{}_I$$

Тогда

$$l = \mathfrak{E}_0 \cdot l^0 + I^L{}_M \cdot l^M{}_L \,.$$

После подстановки приведенных выражений в (24) и учета закона умножения базисных векторов (23), получим выражения для координат вектора–произведения l

$$l^0 = (l_2)^M{}_K \cdot (l_1)^K{}_M \,, \quad l^M{}_L = (l_2)^M{}_K \cdot (l_1)^K{}_L \,.$$

Здесь l^0 представляет собой значение скалярного произведения векторов l_1, l_2.

2. Кинематическая алгебра $\mathbb{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L}$

Эта алгебра далее положена в основу рассмотрения пространства фундаментальных и промежуточных частиц.

Введем векторное пространство $\mathbb{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L}$, которое назовем *кинематическим*. Наряду с умножениями

$$\mathbb{X} \circ \mathbb{X} \to \mathbb{X} \,, \qquad \mathbb{L} \circ \mathbb{L} \to \mathbb{L}$$

введем умножения

$$\mathbb{X} \circ \mathbb{L} \to \mathbb{X} \,, \qquad \mathbb{L} \circ \mathbb{X} \to \mathbb{X}$$

с помощью следующей таблицы умножений базисных векторов

$$\begin{gathered} \mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K = \mathfrak{E}_L \cdot {}^+C^L{}_{IK} \,, \\ I^L{}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M \,, \\ \mathfrak{E}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{E}_M \,, \\ I^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M = 0 \,. \end{gathered} \tag{51}$$

В результате множество векторов $\mathbb{T}$ становится алгеброй, которую также назовем *кинематической*. Умножение векторов в кинематической алгебре запишем следующим образом

$$t = t_1 \circ t_2 \,. \tag{52}$$

Здесь $t, t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

Заметим, что алгебра $\mathbb{T}$ неассоциативна. Например, не выполняется условие ассоциативности произведения

$$(\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K) \circ I^M{}_L = \mathfrak{E}_I \circ (\mathfrak{E}_K \circ I^M{}_L) \,.$$

Действительно, справа имеем $C^M{}_{IK} \cdot \mathfrak{E}_L$, а слева $\delta^M{}_K \cdot C^P{}_{IL} \cdot \mathfrak{E}_P$.

Кинематическую алгебру $\mathbb{T}$ дополним скалярным умножением

$$\langle \mathbb{L}, \mathbb{L} \rangle \to \mathbb{K} \,, \quad \langle \mathbb{L}, \mathbb{X} \rangle \to \mathbb{K}$$

а также умножением

$$\mathbb{X} \circ \mathbb{X} \to \mathbb{L} \,.$$

Тогда $\circ$-умножение базисных векторов в кинематической алгебре $\mathbb{T}$ определяется следующим образом

$$\begin{gathered} \mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K = \mathfrak{E}_L \cdot {}^+C^L{}_{IK} - I^M{}_L \cdot {}^+C^L{}_{MIK} \\ I^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M = 0 \\ \mathfrak{E}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{E}_M \\ I^L{}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M \,. \end{gathered} \tag{53}$$

Эти формулы составляют правила умножения базисных векторов алгебры $\mathbb{T}$.

Квадрат длины вектора в этой алгебре равен

$$t^2 = g_{IK} \cdot x^I \cdot x^K + l^I{}_K \cdot l^K{}_I$$

Отметим, что алгебра пространства-времени $\mathbb{X}$ и алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$ являются подалгебрами кинематической алгебры $\mathbb{T}$.

3. Общая алгебра линейных преобразований $\mathbf{L} = \mathbb{L} + {}^+\mathbb{L}$

Эта алгебра далее положена в основу рассмотрения пространства промежуточных частиц и античастиц.

Рассмотрим случай, когда алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$ и алгебра сопряженных линейных преобразований ${}^+\mathbb{L}$ объединены в одну. Построенную таким образом алгебру будем называть *общей алгеброй линейных преобразований* . Эта алгебра определяется уже введенными правилами умножения базисных векторов: (7) для алгебры линейных преобразований $\mathbb{L}$ и (45) для алгебры сопряженных линейных преобразований ${}^+\mathbb{L}$, а также смешанными произведениями базисных векторов, в качестве которых постулируем следующие:

$$\begin{aligned} I^L{}_K \circ K^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI} \\ K^L{}_K \circ I^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM} \,. \end{aligned}$$

В результате общая алгебра линейных преобразований определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned} I^L{}_K \circ I^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M \\ K^L{}_K \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot K^I{}_K \\ I^L{}_K \circ K^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI} \\ K^L{}_K \circ I^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM} \,. \end{aligned} \tag{54}$$

Если на алгебрах $\mathbb{L}$ и ${}^+\mathbb{L}$ определено скалярное умножение, то общая алгебра линейных преобразований определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned} I^L{}_K \circ I^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M \\ K^L{}_K \circ I^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM} \\ I^L{}_K \circ K^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI} \\ K^L{}_K \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot K^I{}_K \,. \end{aligned} \tag{55}$$

4. Сопряженная кинематическая алгебра $^{+}\mathbb{T} = {}^{+}\mathbb{X} + {}^{+}\mathbb{L}$

Эта алгебра далее положена в основу рассмотрения пространства фундаментальных и промежуточных античастиц.

$^{+}\mathbb{X}$ представляет собой пространство векторов $x = x_I \cdot \mathfrak{E}^I$, $^{+}\mathbb{L}$ представляет собой пространство векторов $^{+}l = {}^{+}l^I{}_K \cdot K^K{}_I$. В результате получим таблицу умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned}
K^L{}_K \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot K^I{}_K \\
K^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I &= 0 \\
\mathfrak{E}^L \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \mathfrak{E}^I \\
\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K &= C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L \,.
\end{aligned} \tag{56}$$

Если на алгебре $^{+}\mathbb{L}$ определено скалярное умножение, то сопряженная кинематическая алгебра определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$\begin{aligned}
K^L{}_K \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot K^I{}_K \\
K^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I &= 0 \\
\mathfrak{E}^L \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \mathfrak{E}^I \\
\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K &= C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L - C^{KIM}{}_L \cdot K^L{}_M \,.
\end{aligned} \tag{57}$$

5. Общая кинематическая алгебра $\mathbf{T} = \mathbb{X} + {}^{+}\mathbb{X} + \mathbb{L} + {}^{+}\mathbb{L}$

Эта алгебра далее положена в основу рассмотрения пространства фундаментальных и промежуточных частиц и античастиц.

Рассмотрим общий случай, когда алгебры $\mathbb{X}$, $\mathbb{L}$, $^{+}\mathbb{X}$ и $^{+}\mathbb{L}$ объединены в одну. Построенную таким образом алгебру будем называть *общей кинематической*, имея в виду, что в ней объединены кинематическая алгебра и сопряженная кинематическая алгебра. Эта алгебра определяется уже выведенными правилами умножения, к которым нужно добавить следующие произведения

$$K^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M \,, \quad \mathfrak{E}_K \circ K^I{}_M \,, \quad I^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I \,, \quad \mathfrak{E}^L \circ I^I{}_M \,.$$

Рассмотрим указанные произведения

$$\begin{aligned}
&K^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M = \mathfrak{E}_K \otimes \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}_M \\
&\quad = \mathfrak{E}_K \otimes \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}_M + \mathfrak{E}_K \otimes \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}_M \rangle = \mathfrak{E}_K \cdot \delta^L{}_M \\
&\mathfrak{E}_K \circ K^I{}_M = \mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}_M \otimes \mathfrak{E}^I \\
&\quad = \mathfrak{E}_K \otimes \mathfrak{E}_M \otimes \mathfrak{E}^I + \langle \mathfrak{E}_K, \mathfrak{E}_M \rangle \otimes \mathfrak{E}^I = g_{KM} \cdot \mathfrak{E}^I \\
&I^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}^I \\
&\quad = \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}_K \otimes \mathfrak{E}^I + \mathfrak{E}^L \otimes \langle \mathfrak{E}_K, \mathfrak{E}^I \rangle = \mathfrak{E}^L \cdot \delta^I{}_K \\
&\mathfrak{E}^L \circ I^I{}_M = \mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{E}_M \\
&\quad = \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}^I \otimes \mathfrak{E}_M + \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}^I \rangle \otimes \mathfrak{E}_M = g^{LI} \cdot \mathfrak{E}_M \\
&\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}_M = \mathfrak{E}^L \otimes \mathfrak{E}_M + \langle \mathfrak{E}^L, \mathfrak{E}_M \rangle = I^L{}_M + \delta^L{}_M \\
&\mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}^I = \mathfrak{E}_K \otimes \mathfrak{E}^I + \langle \mathfrak{E}_K, \mathfrak{E}^I \rangle = K^I{}_K + \delta^I{}_K \,.
\end{aligned}$$

Здесь из конечных выражений исключены базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры.

Таким образом, общая кинематическая алгебра определяется следующей таблицей умножений базисных векторов:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}^I &= K^I{}_K + \delta^I{}_K \\
\mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K &= \mathfrak{E}_L \cdot {}^{+}C^L{}_{IK} - I^M{}_L \cdot {}^{+}C^L{}_{MIK} \\
\mathfrak{E}_K \circ I^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{E}_M \\
I^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M &= \mathfrak{E}^L \cdot g_{KM} \\
I^L{}_K \circ I^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M \\
\mathfrak{E}_K \circ K^I{}_M &= g_{KM} \cdot \mathfrak{E}^I \\
K^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M &= \mathfrak{E}_K \cdot \delta^L{}_M \\
I^L{}_K \circ K^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI} \\
K^L{}_K \circ I^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM} \\
I^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I &= \mathfrak{E}^L \cdot \delta^I{}_K \\
\mathfrak{E}^L \circ I^I{}_M &= g^{LI} \cdot \mathfrak{E}_M \\
K^L{}_K \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot K^I{}_K \\
\mathfrak{E}^L \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \mathfrak{E}^I \\
K^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I &= \mathfrak{E}_K \cdot g^{LI} \\
\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K &= C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L - C^{IKM}{}_L \cdot K^L{}_M \\
\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}_M &= \delta^L{}_M + I^L{}_M \,.
\end{aligned} \tag{58}$$

IX. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ. УРАВНЕНИЯ КВАНТОВАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

1. Уравнения структуры алгебры линейных отображений $\mathbb{L}$

Рассмотрим алгебру линейных отображений $\mathbb{L}$. Закон композиции на $\mathbb{L}$ определен умножением векторов

$$l = l_1 \circ l_2$$

Введем второй дифференциал $\delta_2\delta_1 l$. Выполняя для него выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны в предыдущем разделе, получим уравнения структуры:

$$\delta_2\delta_1 l = \delta_1 l \circ \delta_2 l \,. \tag{59}$$

К уравнениям структуры можно применить процедуру антисимметризации. Из (59) имеем

$$\delta_2\delta_1 l - \delta_1\delta_2 l = \delta_1 l \circ \delta_2 l - \delta_2 l \circ \delta_1 l \,.$$

Или в другом виде с использованием символа Λ

$$\delta_2 \,\Lambda\, \delta_1 l = \delta_1 l \,\Lambda\, \delta_2 l \,.$$

Подставляя в (59) выражения дифференциалов через базисные векторы

$$\delta l = I^K{}_I \cdot \delta l^I{}_K$$

и пользуясь законом умножения базисных векторов *

$$I^L{}_K \circ I^I{}_M = \delta^I_K \cdot I^L{}_M \,,$$

получим уравнения структуры для алгебры линейных отображений $\mathbb{L}$ в координатной форме

$$\delta_2\delta_1 l^M{}_L = \delta_2 l^M{}_K \cdot \delta_1 l^K{}_L \,. \tag{60}$$

Это уравнение можно получить непосредственно дифференцируя закон умножения координат векторов сомножителей:

$$l^M{}_L = (l_2)^M{}_K \cdot (l_1)^K{}_L \,.$$

В том случае, когда в алгебре $\mathbb{L}$ определено скалярное умножение, закон умножения базисных векторов имеет вид:

$$I^L{}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \,.$$

и ранее полученное уравнение структуры дополняется скалярным уравнением

$$\delta_2\delta_1 l^0 = \delta_2 l^L{}_K \cdot \delta_1 l^K{}_L \,,$$

которое можно рассматривать как определение квадрата дифференциала длины, так как для скалярного произведения $\delta_2 = \delta_1 = \delta$ и

$$\delta^2 l^0 = \delta l^L{}_K \cdot \delta l^K{}_L = (\delta\sigma)^2 \,.$$

2. Уравнения квантования в дифференциалах алгебры линейных преобразований

В уравнениях (59) и (60) введем обозначение $\delta_1 l = \chi_l$ и соответственно $\delta_1 l^I{}_K = \chi^I{}_K$ и назовем функцию χ_l с координатами $\chi^I{}_K$ *волновой* функцией пространства $\mathbb{L}$, дифференциал δ_2 обозначим d. Коэффициент L имеет размерность длины и аналогичен постоянной Планка $\hbar$ в уравнениях квантовой механики. Уравнения структуры, записанные по отношению к волновым функциям

$$d\chi_l = \frac{1}{L} \cdot \chi_l \circ dl \,. \tag{61}$$

или к ее координатам

$$d\chi^I{}_K = \frac{1}{L} \cdot dl^I{}_L \cdot \chi^L{}_K \,. \tag{62}$$

назовем *уравнениями квантования в дифференциалах алгебры линейных преобразований*.

---

*В рассматриваемой здесь алгебре $\mathbb{L}$ скалярное умножение не определено

3. Уравнения структуры общей алгебры линейных преобразований $\mathbf{L} = \mathbb{L} + {}^+\mathbb{L}$

Рассмотрим алгебру векторов

$$\mathbf{l} = \mathbf{l} + {}^+\mathbf{l} \in \mathbf{L} = \mathbb{L} + {}^+\mathbb{L} \,.$$

Умножение векторов задано уравнениями

$$\mathbf{l} = \mathbf{l_1} \circ \mathbf{l_2}$$

Введем второй дифференциал $\delta_2\delta_1\mathbf{l}$. Выполняя для него выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны в предыдущем разделе, получим уравнения структуры:

$$\delta_2\delta_1\mathbf{l} = \delta_\mathbf{1}\mathbf{l} \circ \delta_\mathbf{2}\mathbf{l} \,. \tag{63}$$

или

$$\delta_2(\delta_1{}^+l + \delta_1 l) = (\delta_1{}^+l + \delta_1 l) \circ (\delta_2{}^+l + \delta_2 l)$$

или

$$\delta_2\delta_1{}^+l + \delta_2\delta_1 l = \delta_1{}^+l \circ \delta_2{}^+l + \delta_1{}^+l \circ \delta_2 l + \delta_1 l \circ \delta_2{}^+l + \delta_1 l \circ \delta_2 l \,.$$

Вычислим уравнения структуры для координат векторов. Для этого подставим в предыдущее соотношение выражения дифференциалов через базисные векторы:

$$\delta^+ l = \delta^+ l^I{}_K \cdot K^K{}_I, \quad \delta l = \delta l^I{}_K \cdot I^K{}_I \,.$$

$$\begin{aligned}
&\delta_2\delta_1{}^+l^M{}_L \cdot K^L{}_M + \delta_2\delta_1 l^M{}_L \cdot I^L{}_M = \\
&\delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^M{}_I \cdot (K^L{}_K \circ K^I{}_M) + \\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^M{}_I \cdot (I^L{}_K \circ K^I{}_M) + \\
&\delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot (K^L{}_K \circ I^I{}_M) + \\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot (I^L{}_K \circ I^I{}_M) \,.
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся законом умножения базисных векторов (55):

$$\begin{aligned}
I^L{}_K \circ I^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M \\
K^L{}_K \circ I^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM} \\
I^L{}_K \circ K^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI} \\
K^L{}_K \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot K^I{}_K \,.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
&\delta_2\delta_1{}^+l^K{}_I \cdot K^I{}_K + \delta_2\delta_1 l^M{}_L \cdot I^L{}_M = \\
&\delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^L{}_K + \delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^L{}_I \cdot K^I{}_K + \\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^M{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} + \delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} \\
&+\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 l^L{}_K + \delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_K \cdot I^L{}_M \,.
\end{aligned}$$

В силу линейной независимости базисных векторов следуют уравнения структуры для координат векторов общей алгебры линейных отображений

$$\begin{gathered}
\delta_2\delta_1 l^M{}_L = \delta_2 l^M{}_K \cdot \delta_1 l^K{}_L \,, \\
\delta_2\delta_1{}^+l^K{}_I = \delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^L{}_I \,, \\
\delta_2{}^+l^M{}_L \cdot \delta_1{}^+l^L{}_M + \delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^M{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} \\
+\delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} + \delta_2 l^M{}_L \cdot \delta_1 l^L{}_M = 0 \,.
\end{gathered} \tag{64}$$

4. Уравнения квантования в дифференциалах общей алгебры линейных преобразований

В уравнениях (64) введем обозначение $\delta_1 l = \chi_l$ и соответственно $\delta_1 l^I{}_K = \chi^I{}_K$ и назовем функцию χ_l с координатами $\chi^I{}_K$ *волновой* функцией пространства $\mathbb{L}$. Кроме того, введем обозначение $\delta_1{}^+l = {}^+\chi_l$ и соответственно $\delta_1{}^+l^I{}_K = {}^+\chi^I{}_K$ и назовем функцию ${}^+\chi_l$ с координатами ${}^+\chi^I{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}^+\mathbb{L}$. Дифференциал δ_2 обозначим d. Коэффициент L имеет размерность длины и аналогичен постоянной Планка $\hbar$ в уравнениях квантовой механики. Уравнения структуры, записанные по отношению к волновым функциям или к ее координатам

$$\begin{gathered} d\chi^M{}_L = dl^M{}_K \cdot \chi^K{}_L\,, \\ d^+\chi^K{}_I = {}^+\chi^K{}_L \cdot d^+l^L{}_I\,, \\ d^+l^M{}_L \cdot {}^+\chi^L{}_M + \chi^K{}_L \cdot d^+l^M{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} \\ + {}^+\chi^K{}_L \cdot dl^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} + dl^M{}_L \cdot \chi^L{}_M = 0\,. \end{gathered} \tag{65}$$

назовем *уравнениями квантования в дифференциалах общей алгебры линейных преобразований*.

5. Уравнения структуры кинематической алгебры

Обобщенное пространство время $\mathbb{X}$ является алгеброй. Множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ пространства $\mathbb{X}$ также является алгеброй. А для алгебр существуют характерные дифференциальные соотношения, определяемые дифференцированием закона умножения векторов. Эти соотношения называются *уравнениями структуры*.

Введем векторное пространство $\mathbb{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L}$, которое назовем *кинематическим*. Наряду с умножениями $\mathbb{X}\circ\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ и $\mathbb{L}\circ\mathbb{L} \to \mathbb{L}$ введем умножения $\mathbb{X}\circ\mathbb{L} \to \mathbb{X}$ и $\mathbb{L}\circ\mathbb{X} \to$ с помощью следующей таблицы умножений базисных векторов

$$\begin{gathered} \mathfrak{E}_I \circ \mathfrak{E}_K = \mathfrak{E}_L \cdot {}^+C^L{}_{IK}\,, \\ I^L{}_K \circ I^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M\,, \\ \mathfrak{E}_I \circ I^L{}_K = \delta^L{}_I \cdot \mathfrak{E}_K\,, \\ I^I{}_M \circ \mathfrak{E}_K = 0\,. \end{gathered} \tag{66}$$

В результате множество векторов $\mathbb{T}$ становится алгеброй, которую также назовем *кинематической*. Умножение векторов в кинематической алгебре запишем следующим образом

$$t = \frac{1}{L} \cdot t_1 \circ t_2\,. \tag{67}$$

Здесь $t, t_1, t_2 \in \mathbb{T}$. Далее рассмотрим уравнения структуры кинематической алгебры $\mathbb{T}$, определяемые дифференцированием вышеуказанного закона умножения векторов: Возьмем первые дифференциалы от этого соотношения

$$\delta_1 t = \frac{1}{L} \cdot \delta t_1 \circ t_2\,, \qquad \delta_2 t = \frac{1}{L} \cdot t_1 \circ \delta t_2\,.$$

Отсюда вблизи единицы алгебры (для $t_1 = t_2 = L$):

$$\delta_1 t = \delta t_1\,, \qquad \delta_2 t = \delta t_2\,. \tag{68}$$

Введем второй дифференциал соотношения (67):

$$\delta_2\delta_1 t = \frac{1}{L} \cdot \delta t_1 \circ \delta t_2\,. \tag{69}$$

Используем (68) для преобразования этого уравнения. Получим

$$\delta_2\delta_1 t = \frac{1}{L} \cdot \delta_1 t \circ \delta_2 t\,.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения структуры кинематической алгебры $\mathbb{T}$. Запишем их через векторы слагаемых пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{L}$. Для этого подставим в эти уравнения $t = x + l$. Получим

$$\delta_2(\delta_1 x + \delta_1 l) = \frac{1}{L}(\delta_1 x + \delta_1 l) \circ (\delta_2 x + \delta_2 l)\,.$$

Или

$$\begin{aligned} \delta_2\delta_1 x &= \tfrac{1}{L} \cdot \delta_1 x \circ (\delta_2 x + \delta_2 l)\,, \\ \delta_2\delta_1 l &= \tfrac{1}{L} \cdot \delta_1 l \circ \delta_2 l\,. \end{aligned} \tag{70}$$

Запишем полученные уравнения через координаты векторов x и l. Для этого подставим в (70) выражения векторов через базисные векторы $x = \mathfrak{E}_I \cdot x^I$ и $l = l^K{}_I \cdot I^I{}_K$ и воспользуемся законом умножения базисных векторов (66). Получим

$$\begin{aligned} \delta_2\delta_1 x^I &= \tfrac{1}{L} \cdot ({}^+C^I{}_{ML} \cdot \delta_2 x^L + \delta_2 l^I{}_M) \cdot \delta_1 x^M\,, \\ \delta_2\delta_1 l^I{}_K &= \tfrac{1}{L} \cdot \delta_2 l^I{}_L \cdot \delta_1 l^L{}_K\,. \end{aligned} \tag{71}$$

6. Уравнения квантования в дифференциалах кинематической алгебры

В уравнениях (70) и (71) введем обозначение $\delta_1 x = \chi_x$ и соответственно $\delta_1 x^I = \chi^I$ и назовем функцию χ_x с координатами χ^I *волновой* функцией обобщенного пространства времени $\mathbb{X}$. Кроме того, введем обозначение $\delta_1 l = \chi_l$ и соответственно $\delta_1 l^I{}_K = \chi^I{}_K$ и назовем функцию χ_l с координатами $\chi^I{}_K$ *волновой* функцией пространства $\mathbb{L}$, дифференциал δ_2 обозначим d. Коэффициент L имеет размерность длины и аналогичен постоянной Планка $\hbar$ в уравнениях квантовой механики. Уравнения структуры, записанные по отношению к волновым функциям

$$\begin{aligned} d\chi_x &= \tfrac{1}{L} \cdot \chi_x \circ (dx + dl)\,, \\ d\chi_l &= \tfrac{1}{L} \cdot \chi_l \circ dl\,. \end{aligned} \tag{72}$$

или к ее координатам

$$\begin{aligned} d\chi^I &= \tfrac{1}{L} \cdot ({}^+C^I{}_{ML} \cdot dx^L + dl^I{}_M) \cdot \chi^M\,, \\ d\chi^I{}_K &= \tfrac{1}{L} \cdot dl^I{}_L \cdot \chi^L{}_K\,. \end{aligned} \tag{73}$$

назовем *уравнениями квантования в дифференциалах кинематической алгебры*.

7. Уравнения структуры сопряженной кинематической алгебры ${}^+\mathbb{T} = {}^+\mathbb{X} + {}^+\mathbb{L}$

Рассмотрим алгебру векторов

$$ {}^+t = {}^+x + {}^+l \in {}^+\mathbb{T} = {}^+\mathbb{X} + {}^+\mathbb{L}, $$

Умножение векторов задано уравнением

$$ {}^+t = {}^+t_1 \circ {}^+t_2 \,. $$

Введем второй дифференциал $\delta_2\delta_1{}^+t$. Выполняя для него выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны в предыдущем разделе, получим уравнение структуры:

$$ \delta_2\delta_1{}^+t = \delta_1{}^+t \circ \delta_2{}^+t \,. \tag{74} $$

После подстановки δ^+t получим

$$ \begin{aligned} &\delta_2(\delta_1{}^+x + \delta_1{}^+l) = (\delta_1{}^+x + \delta_1{}^+l) \circ (\delta_2{}^+x + \delta_2{}^+l)\,,\\ &\delta_2\delta_1{}^+x + \delta_2\delta_1{}^+l = \delta_1{}^+x \circ \delta_2{}^+x + \delta_1{}^+x \circ \delta_2{}^+l +\\ &\delta_1{}^+l \circ \delta_2{}^+x + \delta_1{}^+l \circ \delta_2{}^+l \,. \end{aligned} $$

Вычислим уравнения структуры для координат векторов. Для этого подставим в предыдущее соотношение выражения дифференциалов через базисные векторы:

$$ \delta^+x = \delta x_I \cdot \mathfrak{E}^I, \quad \delta^+l = \delta^+l^K{}_I \cdot K^I{}_K \,. $$

Получим

$$ \begin{aligned} &\delta_2\delta_1{}^+l^K{}_I \cdot K^I{}_K + \delta_2\delta_1 x_I \cdot \mathfrak{E}^I =\\ &\delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^M{}_I \cdot (K^L{}_K \circ K^I{}_M) +\\ &\delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2 x_I \cdot (K^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I) +\\ &\delta_1 x_L \cdot \delta_2{}^+l^M{}_I \cdot (\mathfrak{E}^L \circ K^I{}_M) + \delta_1 x_I \cdot \delta_2 x_K \cdot (\mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K)\,. \end{aligned} $$

Далее воспользуемся правилом умножения базисных векторов (57):

$$ \begin{aligned} K^L{}_K \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot K^I{}_K\\ K^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I &= 0\\ \mathfrak{E}^L \circ K^I{}_M &= \mathfrak{E}^I \cdot \delta^L{}_M\\ \mathfrak{E}^I \circ \mathfrak{E}^K &= C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L + C^{IKM}{}_L \cdot K^L{}_M \,. \end{aligned} $$

Получим

$$ \begin{aligned} &\delta_2\delta_1{}^+l^K{}_I \cdot K^I{}_K + \delta_2\delta_1 x_I \cdot \mathfrak{E}^I =\\ &= \delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^L{}_I \cdot (\delta^I{}_K + K^I{}_K) + \delta_1 x_L \cdot \delta_2{}^+l^L{}_I \cdot \mathfrak{E}^I\\ &+ \delta_1 x_I \cdot \delta_2 x_K \cdot (C^{IK}{}_L \cdot \mathfrak{E}^L + C^{IKM}{}_L \cdot K^L{}_M)\,. \end{aligned} $$

В результате получим уравнения структуры:

$$ \begin{aligned} \delta_2\delta_1{}^+l^K{}_I &= \delta_1{}^+l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+l^L{}_I + \delta_2 x_L \cdot \delta_1 x_M \cdot C^{MLK}{}_I\,,\\ \delta_2\delta_1 x_I &= \delta_1 x_L \cdot \delta_2{}^+l^L{}_I + \delta_1 x_M \cdot \delta_2 x_L \cdot C^{ML}{}_I\,. \end{aligned} \tag{75} $$

8. Уравнения квантования в дифференциалах сопряженной кинематической алгебры

В уравнениях (75) введем обозначение $\delta_1{}^+x = {}^+\chi_x$ и соответственно $\delta_1 x_I = \chi_I$ и назовем функцию ${}^+\chi_x$ с координатами χ_I *волновой* функцией сопряженного пространства времени ${}^+\mathbb{X}$. Кроме того, введем обозначение $\delta_1{}^+l = {}^+\chi_l$ и соответственно $\delta_1{}^+l^I{}_K = {}^+\chi^I{}_K$ и назовем функцию ${}^+\chi_l$ с координатами ${}^+\chi^I{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}^+\mathbb{L}$, дифференциал δ_2 обозначим d. Коэффициент L имеет размерность длины и аналогичен постоянной Планка $\hbar$ в уравнениях квантовой механики. Уравнения структуры, записанные по отношению к волновым функциям

$$ \begin{aligned} d^+\chi_l &= \tfrac{1}{L} \cdot {}^+\chi_l \circ d^+l\,,\\ d^+\chi_x &= \tfrac{1}{L} \cdot {}^+\chi_x \circ (d^+x + d^+l)\,. \end{aligned} \tag{76} $$

или к ее координатам

$$ \begin{aligned} d^+\chi^I{}_K &= \tfrac{1}{L} \cdot d^+l^I{}_L \cdot {}^+\chi^L{}_K\,,\\ d\chi_I &= \tfrac{1}{L} \cdot (C^{LM}{}_I \cdot dx_L + d^+l^M{}_L) \cdot \chi_M\,. \end{aligned} \tag{77} $$

назовем *уравнениями квантования в дифференциалах сопряженной кинематической алгебры*.

9. Уравнения структуры общей кинематической алгебры $\mathbf{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L} + {}^+\mathbb{X} + {}^+\mathbb{L}$

Рассмотрим алгебру векторов

$$ \mathbf{t} = \mathbf{x} + \mathbf{l} + {}^+\mathbf{x} + {}^+\mathbf{l} \in \mathbf{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L} + {}^+\mathbb{X} + {}^+\mathbb{L}\,. $$

Умножение векторов задано уравнением

$$ \mathbf{t} = \mathbf{t_1} \circ \mathbf{t_2}\,. $$

Введем второй дифференциал $\delta_2\delta_1\mathbf{t}$. Выполняя для него выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны в разделе 1, получим уравнение структуры:

$$ \delta_2\delta_1\mathbf{t} = \delta_\mathbf{1}\mathbf{t} \circ \delta_\mathbf{2}\mathbf{t}\,. \tag{78} $$

После подстановки $\delta\mathbf{t}$ получим

$$ \begin{aligned} &\delta_2(\delta_1 x + \delta_1 l + \delta_1{}^+x + \delta_1{}^+l)\\ &= (\delta_1 x + \delta_1 l + \delta_1{}^+x + \delta_1{}^+l) \circ (\delta_2 x + \delta_2 l + \delta_2{}^+x + \delta_2{}^+l)\,, \end{aligned} $$

или

$$ \begin{aligned} &\delta_2\delta_1 x + \delta_2\delta_1 l + \delta_2\delta_1{}^+x + \delta_2\delta_1{}^+l =\\ &\delta_1 x \circ \delta_2 x + \delta_1 x \circ \delta_2 l + \delta_1 x \circ \delta_2{}^+x + \delta_1 x \circ \delta_2{}^+l\\ &+\delta_1 l \circ \delta_2 x + \delta_1 l \circ \delta_2 l + \delta_1 l \circ \delta_2{}^+x + \delta_1 l \circ \delta_2{}^+l\\ &+\delta_1{}^+x \circ \delta_2 x + \delta_1{}^+x \circ \delta_2 l + \delta_1{}^+x \circ \delta_2{}^+x + \delta_1{}^+x \circ \delta_2{}^+l\\ &+\delta_1{}^+l \circ \delta_2 x + \delta_1{}^+l \circ \delta_2 l + \delta_1{}^+l \circ \delta_2{}^+x + \delta_1{}^+l \circ \delta_2{}^+l\,. \end{aligned} $$

Вычислим уравнения структуры для координат векторов. Для этого подставим в предыдущее соотношение выражения дифференциалов через базисные векторы:

$$\begin{aligned}
&\delta x = \mathfrak{E}_I \cdot \delta x^I\,, \quad \delta l = I^K{}_I \cdot \delta l^I{}_K\,,\\
&\delta^+ x = \delta x_I \cdot \mathfrak{E}^I\,, \quad \delta^+ l = \delta^+ l^I{}_K \cdot K^K{}_I\,.
\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\delta_2\delta_1 x^I \cdot \mathfrak{E}_I + \delta_2\delta_1 l^M{}_L \cdot I^L{}_M +\\
&\delta_2\delta_1{}^+ l^K{}_I \cdot K^I{}_K + \delta_2\delta_1 x_L \cdot \mathfrak{E}^L =\\
&\delta_1 x^K \cdot \delta_2 x^M \cdot (\mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}_M) + \delta_1 x^K \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot (\mathfrak{E}_K \circ I^I{}_M) +\\
&\delta_1 x^K \cdot \delta_2{}^+ l^M{}_I \cdot (\mathfrak{E}_K \circ K^I{}_M) + \delta_1 x^K \cdot \delta_2 x_I \cdot (\mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}^I) +\\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 x^M \cdot (I^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M) +\\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot (I^L{}_K \circ I^I{}_M) +\\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+ l^M{}_I \cdot (I^L{}_K \circ K^I{}_M) +\\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 x_I \cdot (I^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I) +\\
&\delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2 x^M \cdot (K^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M) +\\
&\delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot (K^L{}_K \circ I^I{}_M) +\\
&\delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+ l^M{}_I \cdot (K^L{}_K \circ K^I{}_M) +\\
&\delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2 x_I \cdot (K^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I) +\\
&\delta_1 x_L \cdot \delta_2 x^M \cdot (\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}_M) + \delta_1 x_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot (\mathfrak{E}^L \circ I^I{}_M) +\\
&\delta_1 x_L \cdot \delta_2{}^+ l^M{}_I \cdot (\mathfrak{E}^L \circ K^I{}_M) + \delta_1 x_L \cdot \delta_2 x_I \cdot (\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^I)\,.
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся правилом умножения базисных векторов (58):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}^I &= K^I{}_K + \delta^I{}_K\\
\mathfrak{E}_K \circ \mathfrak{E}_M &= \mathfrak{E}_L \cdot C^L{}_{KM} + I^P{}_L \cdot C^L{}_{PKM}\\
I^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M &= g_{KM} \cdot \mathfrak{E}^L\\
\mathfrak{E}_K \circ I^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \mathfrak{E}_M\\
I^L{}_K \circ I^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot I^L{}_M\\
\mathfrak{E}_K \circ K^I{}_M &= g_{KM} \cdot \mathfrak{E}^I\\
K^L{}_K \circ \mathfrak{E}_M &= \delta^L{}_M \cdot \mathfrak{E}_K\\
I^L{}_K \circ K^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI}\\
K^L{}_K \circ I^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM}\\
I^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I &= \mathfrak{E}^L \cdot \delta^I{}_K\\
\mathfrak{E}^L \circ I^I{}_M &= g^{LI} \cdot \mathfrak{E}_M\\
K^L{}_K \circ K^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot K^I{}_K\\
K^L{}_K \circ \mathfrak{E}^I &= \mathfrak{E}_K \cdot g^{LI}\\
\mathfrak{E}^L \circ K^I{}_M &= \mathfrak{E}^I \cdot \delta^L{}_M\\
\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}^I &= C^{LI}{}_K \cdot \mathfrak{E}^K + C^{LIM}{}_K \cdot K^K{}_M\\
\mathfrak{E}^L \circ \mathfrak{E}_M &= \delta^L{}_M + I^L{}_M\,.
\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\delta_2\delta_1 x^I \cdot \mathfrak{E}_I + \delta_2\delta_1 l^M{}_L \cdot I^L{}_M +\\
&\delta_2\delta_1{}^+ l^K{}_I \cdot K^I{}_K + \delta_2\delta_1 x_L \cdot \mathfrak{E}^L =\\
&\mathfrak{E}_I \cdot C^I{}_{KM} \cdot \delta_1 x^K \cdot \delta_2 x^M + I^P{}_L \cdot C^L{}_{PKM} \cdot \delta_1 x^K \cdot \delta_2 x^M +\\
&\delta_1 x^K \cdot \delta_2 l^M{}_K \cdot \mathfrak{E}_M + \delta_1 x^K \cdot \delta_2{}^+ l^M{}_I \cdot g_{KM} \cdot \mathfrak{E}^I +\\
&\delta_1 x^K \cdot \delta_2 x_I \cdot (K^I{}_K + \delta^I{}_K) + \delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 x^M \cdot g_{KM} \cdot \mathfrak{E}^L +\\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_K \cdot (\delta^L{}_M + I^L{}_M) +\\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+ l^M{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} +\\
&\delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 x_K \cdot E^L + \delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2 x^L \cdot \mathfrak{E}_K +\\
&\delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} +\\
&\delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+ l^L{}_I \cdot (\delta^I{}_K + K^I{}_K) +\\
&\delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2 x_I \cdot \mathfrak{E}_K \cdot g^{LI} + \delta_1 x_L \cdot \delta_2 x^M \cdot (\delta^L{}_M + I^L{}_M) +\\
&\delta_1 x_L \cdot \delta_2 l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot \mathfrak{E}_M + \delta_1 x_L \cdot \delta_2{}^+ l^L{}_I \cdot \mathfrak{E}^I +\\
&\delta_1 x_L \cdot \delta_2 x_I \cdot C^{LI}{}_K \cdot \mathfrak{E}^K + \delta_1 x_L \cdot \delta_2 x_I \cdot C^{LIM}{}_K \cdot K^K{}_M\,.
\end{aligned}$$

После необходимых преобразований получим уравнения структуры по отношению к дифференциалам координат векторов

$$\begin{aligned}
&\delta_2\delta_1 x^I = \delta_2 l^I{}_K \cdot \delta_1 x^K +\\
&\delta_2{}^+ l^I{}_L \cdot \delta_1 x^L + {}^+C^I{}_{KL} \cdot \delta_1 x^K \cdot \delta_2 x^L +\\
&\delta_1{}^+ x_L \cdot \delta_2 l^I{}_M \cdot g^{LM} + \delta_1{}^+ l^I{}_L \cdot \delta_2{}^+ x_K \cdot g^{LK}\,,\\[1ex]
&\delta_2\delta_1 l^M{}_L = \delta_2 l^M{}_K \cdot \delta_1 l^K{}_L + \delta_1{}^+ x_L \cdot \delta_2 x^K +\\
&{}^+C^M{}_{LIK} \cdot \delta_1 x^I \cdot \delta_2 x^K\,,\\[1ex]
&\delta_2\delta_1{}^+ l^K{}_I = \delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+ l^L{}_I + \delta_1 x^K \cdot \delta_2 x_I +\\
&\delta_1 x_L \cdot \delta_2 x_M \cdot C^{LMK}{}_I\,,\\[1ex]
&\delta_2\delta_1 x_L = \delta_2 x_K \cdot \delta_1 l^K{}_L +\\
&\delta_1 x_K \cdot \delta_2{}^+ l^K{}_L + \delta_1 x_K \cdot \delta_2 x_I \cdot C^{KI}{}_L +\\
&g_{KM} \cdot \delta_1 x_K \cdot \delta_2{}^+ l^M{}_L + g_{KM} \cdot \delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 x^M\,,\\[1ex]
&g_{IK} \cdot \delta_1 x^I \cdot \delta_2 x^K + g^{IK} \cdot \delta_1 x_I \cdot \delta_2 x_K + \delta_1 x^K \cdot \delta_2 x_K +\\
&\delta_1 x_K \cdot \delta_2 x^K + \delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2 l^L{}_K + \delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+ l^L{}_K +\\
&g^{LI} \cdot g_{KM} \cdot \delta_1 l^K{}_L \cdot \delta_2{}^+ l^M{}_I +\\
&g^{LI} \cdot g_{KM} \cdot \delta_1{}^+ l^K{}_L \cdot \delta_2 l^M{}_I = 0\,.
\end{aligned} \tag{79}$$

Последнее соотношение представляет собой алгебраическое уравнение. Оно является следствием отображения произведений базисных векторов на множество действительных чисел K.

10. Уравнения квантования в дифференциалах общей кинематической алгебры

В уравнениях (79) ведем обозначение $\delta_1 x = \chi_x$ и соответственно $\delta_1 x^I = \chi^I$ и назовем функцию χ_x с координатами χ^I *волновой* функцией обобщенного пространства времени $\mathbb{X}$. Кроме того, введем обозначение $\delta_1 l = \chi_l$ и соответственно $\delta_1 l^I{}_K = \chi^I{}_K$ и назовем функцию χ_l с координатами $\chi^I{}_K$ *волновой* функцией пространства $\mathbb{L}$. Кроме того введем обозначение

$\delta_1{}^+x = {}^+\chi_x$ и соответственно $\delta_1 x_I = \chi_I$ и назовем функцию ${}^+\chi_x$ с координатами χ_I *волновой* функцией сопряженного пространства времени ${}^+\mathbb{X}$. Кроме того, введем обозначение $\delta_1{}^+l = {}^+\chi_l$ и соответственно $\delta_1{}^+l^I{}_K = {}^+\chi^I{}_K$ и назовем функцию ${}^+\chi_l$ с координатами ${}^+\chi^I{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}^+\mathbb{L}$. Дифференциал δ_2 обозначим d. Коэффициент L имеет размерность длины и аналогичен постоянной Планка $\hbar$ в уравнениях квантовой механики. Уравнения структуры, записанные по отношению к волновым функциям или к ее координатам

$$d\chi^I = dl^I{}_K \cdot \chi^K +$$
$$d^+l^I{}_L \cdot \chi^L + {}^+C^I{}_{KL} \cdot \chi^K \cdot dx^L +$$
$${}^+\chi_L \cdot dl^I{}_M \cdot g^{LM} + {}^+\chi^I{}_L \cdot d^+x_K \cdot g^{LK} \,,$$

$$d\chi^M{}_L = dl^M{}_K \cdot \chi^K{}_L + {}^+\chi_L \cdot dx^K +$$
$${}^+C^M{}_{LIK} \cdot \chi^I \cdot dx^K \,,$$

$$d^+\chi^K{}_I = {}^+\chi^K{}_L \cdot d^+l^L{}_I + \chi^K \cdot dx_I +$$
$$\chi_L \cdot dx_M \cdot {}^+C^{LMK}{}_I \,,$$

$$d\chi_L = dx_K \cdot \chi^K{}_L +$$
$$\chi_K \cdot d^+l^K{}_L + \chi_K \cdot dx_I \cdot C^{KI}{}_L +$$
$$g_{KM} \cdot \chi_K \cdot d^+l^M{}_L + g_{KM} \cdot \chi^K{}_L \cdot dx^M \,,$$

$$g_{IK} \cdot \chi^I \cdot dx^K + g^{IK} \cdot \chi_I \cdot dx_K + \chi^K \cdot dx_K +$$
$$\chi_K \cdot dx^K + \chi^K{}_L \cdot dl^L{}_K + {}^+\chi^K{}_L \cdot d^+l^L{}_K +$$
$$g^{LI} \cdot g_{KM} \cdot dl^K{}_L \cdot {}^+\chi^M{}_I +$$
$$g^{LI} \cdot g_{KM} \cdot d^+l^K{}_L \cdot \chi^M{}_I = 0 \,,$$

назовем *уравнениями квантования в дифференциалах общей кинематической алгебры*.

X. ВЫВОДЫ

- Обобщение пространства-времени СТО до пространства-времени $\mathbb{X}$, сопоставленного фундаментальной частице, требует обобщения группы Пуанкаре как группы инвариантных преобразований. В частности, сдвиги геометрических точек и сдвиги времени, входящие в группу Пуанкаре, дополняются сдвигами отрезков линий, площадей, сдвигами скорости, угловой скорости и телесной угловой скорости.

- Кроме того, повороты в геометрических плоскостях и движения с постоянной скоростью, входящие в группу Пуанкаре, обобщаются до поворотов относительно всех базисных векторов в пространстве-времени $\mathbb{X}$.

- В отличие от сдвигов в пространстве-времени СТО сдвиги в пространстве-времени $\mathbb{X}$ образуют алгебру.

- Общие соображения требуют включения в состав инвариантных преобразований группы растяжений пространства-времени $\mathbb{X}$.

- Так как каждой фундаментальной частице соответствует свой тип пространства-времени $\mathbb{X}$, то наряду с инвариантными преобразованиями, не выводящими за рамки типа пространства-времени, необходимо ввести инвариантные преобразования, изменяющие тип пространства-времени. Такие преобразования сопутствуют взаимодействию элементарных частиц.

- Так как фундаментальной частице соответствует фундаментальная античастица, которой сопутствует сопряженное пространство-время ${}^+\mathbb{X}$, то в инвариантные преобразования необходимо включить сопряженные преобразования пространства-времени ${}^+\mathbb{X}$.

- Вышеуказанные преобразования объединяются в *общую кинематическую алгебру*, которая является обобщением классической группы инвариантных преобразований – группы Пуанкаре.