Лекция 12. Алгебра нерелятивистских кварков

А. А. Кецарис
(26 февраля 2005 г.)

В этой Лекции мы рассматриваем алгебру кварков как обобщение алгебры Клиффорда. Каждому поколению кварков ставится в соответствие разновидность алгебры кварков, отличающаяся знаком перестановки сомножителей в произведении образующих базисных векторов геометрического пространства.

I. ВВЕДЕНИЕ

Для описания фундаментальных частиц, отличных от лептонов, в предыдущей Лекции мы предложили обобщить алгебру Клиффорда, отказавшись от антикоммутативности умножения базисных векторов образующего пространства. В качестве простейшего случая была рассмотрена коммутативная алгебра $\mathbb{C}^*$. При этом оказалось, что фундаментальные частицы, которые могут быть сопоставлены этой алгебре, не являются кварками. Так были введены гипотетические фундаментальные частицы – лептино.

Теперь, следуя исходному предположению, мы вынуждены рассматривать алгебру кварков как алгебру, в которой одна часть произведений базисных векторов образующего пространства антикоммутативна, а другая часть – коммутативна. В общем случае алгебру кварков будем обозначать $\mathbb{Q}$, а ее базисные векторы будем обозначать λ_I.

Настоящая Лекция посвящена алгебре нерелятивистских кварков $\mathbb{Q}_3$, образующим пространством которой является геометрическое пространство с базисными векторами

$$\lambda_1\,, \quad \lambda_2\,, \quad \lambda_3\,.$$

Будем полагать, что алгебра нерелятивистских кварков включает в себя три алгебры, отличающиеся правилами перестановки сомножителей в произведениях базисных векторов образующего пространства. Приведем эти перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_1 &= -\lambda_1 \circ \lambda_2\,, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= \lambda_3 \circ \lambda_1\,, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= -\lambda_2 \circ \lambda_3\,, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_1 &= -\lambda_1 \circ \lambda_2\,, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= -\lambda_3 \circ \lambda_1\,, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= \lambda_2 \circ \lambda_3\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 \circ \lambda_1 &= \lambda_1 \circ \lambda_2\,, \\ \lambda_1 \circ \lambda_3 &= -\lambda_3 \circ \lambda_1\,, \\ \lambda_3 \circ \lambda_2 &= -\lambda_2 \circ \lambda_3\,, \end{aligned} \tag{3}$$

Указанные три алгебры поставим в соответствие трем поколениям кварков. Алгебру, включающую перестановочные соотношения первого типа, поставим в соответствие u и d кваркам и будем обозначать $\mathbb{Q}(u,d)$. Алгебру, включающую перестановочные соотношения второго типа, поставим в соответствие c и s кваркам и будем обозначать $\mathbb{Q}(c,s)$. Алгебру, включающую перестановочные соотношения третьего типа, поставим в соответствие t и b кваркам и будем обозначать $\mathbb{Q}(t,b)$. Алгебры $\mathbb{Q}(u,d)$, $\mathbb{Q}(c,s)$, $\mathbb{Q}(t,b)$ содержат по двум антикоммутативным и одному коммутативному соотношениям. Следует ожидать, что это совпадение приведет к совпадению ряда динамических характеристик поколений кварков.

Здесь необходимо вспомнить ситуацию, с которой мы столкнулись при описании лептонов. В Лекции 5 мы установили, что алгебра Клиффорда $\mathbb{C}_3$ является алгеброй действия и алгеброй пространства лептонов одного поколения. Наши рассуждения включали два этапа. Сначала мы обобщили алгебру $\mathbb{C}_3$ до алгебры релятивистских лептонов $\mathbb{C}_4$, а затем записали уравнения квантовой механики для этой алгебры. Оказалось, что уравнения распадаются на две независимые системы уравнений, одна из которых относится к верхнему, а другая к нижнему лептонам одного поколения. Если допустить единую точку зрения на алгебраическую структуру лептонов и кварков, то нужно считать, что алгебра кварков $\mathbb{Q}_3$ является алгеброй действия и алгеброй пространства кварков одного поколения (например, u и d). Причем после того, как алгебра $\mathbb{Q}_3$ будет обобщена до алгебры релятивистских кварков $\mathbb{Q}_4$ и для нее будут записаны уравнения квантовой механики, то эти уравнения должны допустить возможность их записи в виде двух независимых систем уравнений. Одна из этих систем должна относиться к верхнему кварку (например, u), а другая к нижнему кварку (например, d) одного поколения. Наличие такой точки зрения на алгебраическую структуру фундаментальных частиц одного поколения является весьма желательным с позиции *единого* подхода к фундаментальным частицам. Именно эту точку зрения мы проводим, постулируя вышеуказанное соответствие алгебр и поколений кварков.

От алгебры $\mathbb{Q}(u,d)$, можно перейти к алгебре $\mathbb{Q}(c,s)$ и затем к алгебре $\mathbb{Q}(t,b)$, выполняя циклическую перестановку индексов $1, 2.3$, нумерующих компоненты геометрического вектора. Таким образом, переход от волновых функций кварков одного поколения к волновым функциям кварков других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора. При этом само число поколений кварков равно размерности геометрического пространства, то есть трем. Здесь необходимо вспомнить, что в Лекции 5 было показано, что переход от волновых функций лептонов одного поколения к волновым функциям лептонов других поколений осуществляется циклической перестановкой индексов, нумерующих компоненты геометрического вектора, а само число поколений лептонов равно размерности геометрического пространства. Таким образом, мы имеем единую точку зрения, объясняющую как существование поколений фундаментальных частиц так и их число. Наличие такой точки зрения является необходимым условием построения единой теории взаимодействий.

II. АЛГЕБРА НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАРКОВ. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

В соответствии с выдвинутым нами предположением алгебра $\mathbb{Q}_3$ есть алгебра действия и алгебра пространства-времени фундаментальных частиц – кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Этот базисный вектор ничем не отличается от соответствующего вектора ε_0 алгебры $\mathbb{C}$. Однако мы используем другое обозначение для того, чтобы подчеркнуть принадлежность этого вектора другой алгебре. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 \,.$$

- Образующие векторы λ_a, где индекс a пробегает значения от 1 до 3. Нужно иметь в виду, что образующее пространство для алгебр $\mathbb{Q}_3$ и $\mathbb{C}_3$ одинаково. Поэтому векторы λ_a совпадают с векторами ε_a. Число векторов λ_a равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a \,.$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0 \,.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a \,.$$

Здесь $a \neq b$. Число этих векторов равно числу сочетаний из трех элементов по два

$$C_3^2 = 3 \,.$$

Для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей (перестановочные соотношения), указанные в Разделе 1.

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1 \,.$$

Для этих векторов выполняются правила умножения, вытекающие из условия ассоциативности и перестановочных соотношений.

1. Алгебра действия и алгебра пространства кварков

В последующих рассуждениях мы отталкиваемся от Раздела 5 Лекции 7. В указанном Разделе отмечалось, что для алгебры Клиффорда вследствие антикоммутативности умножения целесообразно ввести два умножения – правое и левое. Разновидность алгебры Клиффорда, связанная с правым умножением, рассматривалась нами как алгебра действия. Разновидность алгебры Клиффорда, связанная с левым умножением, рассматривалась нами как алгебра пространства-времени*. Отсюда вытекало, что для лептонов динамические параметры пространства-времени и действия существенно различны.

Так же как в алгебре Клиффорда в алгебре кварков $\mathbb{Q}$ правое и левое умножения различаются. Поэтому так же как для алгебры Клиффорда необходимо рассматривать алгебру кварков с правым умножением $\mathbb{Q}_{right}$, для которой закон умножения базисных векторов λ_I имеет вид

$$\lambda_K \circ \lambda_I = \lambda_L \cdot C^L{}_{KI} \qquad (4)$$

и алгебру кварков с левым умножением $\mathbb{Q}_{left}$, для которой закон умножения базисных векторов Λ_I имеет вид

$$\Lambda_I \circ \Lambda_K = \Lambda_L \cdot {}^+C^L{}_{KI} \,. \qquad (5)$$

Подобно тому, как мы полагали для лептонов, будем считать, что контравариантная алгебра $\mathbb{Q}_{right}$ является алгеброй действия кварков, а контравариантная алгебра $\mathbb{Q}_{left}$ является алгеброй пространства-времени кварков.

---

*Смотрите Раздел 7 Лекции 8.

Для того, чтобы рассматривать действие антикварков необходимо перейти от контравариантной алгебры $\mathbb{Q}_{right}$ к ковариантной алгебре ${}^{+}\mathbb{Q}_{right}$. Эта алгебра является также сопряженной по отношению к контравариантной алгебре[†]. Обозначим базисные векторы алгебры ${}^{+}\mathbb{Q}_{right}$ через λ^{I}. Тогда закон умножения в этой алгебре имеет вид

$$\lambda^{K} \circ \lambda^{I} = {}^{+}C^{IK}{}_{L}\, \lambda^{L} \,. \tag{6}$$

Для того, чтобы рассматривать пространство-время антикварков необходимо перейти от контравариантной алгебры $\mathbb{Q}_{left}$ к ковариантной алгебре ${}^{+}\mathbb{Q}_{left}$. Эта алгебра является также сопряженной по отношению к контравариантной алгебре. Обозначим базисные векторы алгебры ${}^{+}\mathbb{Q}_{left}$ через Λ^{I}. Тогда закон умножения в этой алгебре имеет вид

$$\Lambda^{I} \circ \Lambda^{K} = C^{IK}{}_{L}\, \Lambda^{L} \,. \tag{7}$$

Так как структурные матрицы $C^{L}{}_{KI}$ алгебры $\mathbb{Q}_{3}$ и структурные матрицы $C^{IK}{}_{L}$ сопряженной алгебры ${}^{+}\mathbb{Q}_{3}$ не совпадают, то в нерелятивистском приближении кварк и антикварк это разные частицы.

2. Структурные матрицы алгебры кварков $\mathbb{Q}_{3}$.

В последующих Разделах мы рассмотрим вычисление структурных матриц алгебры кварков $\mathbb{Q}_{3}$. При этом мы будем пользоваться опытом, полученным при выводе матриц Дирака. Обращение к матрицам Дирака научило нас следующему.

1. Компоненты векторов и матриц необходимо рассматривать в следующей последовательности индексов

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123) \,.$$

2. Переход от действительного представления к компактным представлениям осуществляется путем введения соответствующих блочных матриц. При преобразовании матриц $C^{L}{}_{KI}$ и ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$ от действительного представления к iab-представлению использованы следующие обозначения для блоков $2{\times}2$

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

$$a = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad b = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,.$$

При преобразовании матриц $C^{L}{}_{KI}$ и ${}^{+}C^{L}{}_{KI}$ от iab-представления к IAB-представлению использованы следующие обозначения для блоков $2{\times}2$

$$\mathbb{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \qquad I = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,,$$

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \qquad B = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,.$$

[*]

3. При переходе к частным случаям квантовой теории целесообразно пользоваться процедурой сжатия, или вырождения слагаемых компонент вектора.

Из (4) следует алгоритм вычисления структурных матриц алгебры $\mathbb{Q}_{right}$. Эти матрицы соответствуют базисным векторам λ_{I}. Сначала нужно установить номер структурной матрицы (I) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы (K) проделать следующие вычисления. Базисный вектор λ_{K}, номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *справа* на базисный вектор λ_{I}, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор λ_{L}, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер (L) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Из (5) следует алгоритм вычисления структурных матриц алгебры $\mathbb{Q}_{left}$. Эти матрицы соответствуют базисным векторам Λ_{I}. Сначала нужно установить номер структурной матрицы (I) в соответствии с номером базисного вектора, затем для каждого столбца матрицы (K) проделать следующие вычисления. Базисный вектор Λ_{K}, номер которого совпадает с номером *столбца* матрицы, нужно умножить *слева* на базисный вектор Λ_{I}, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор Λ_{L}, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер (L) указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

[†]Обозначение ковариантных (сопряженных) алгебр ${}^{+}\mathbb{Q}_{right}$ и ${}^{+}\mathbb{Q}_{left}$ выполнено по аналогии с соответствующим обозначением для алгебры Клиффорда.

[*]Напомним (см. Лекцию 4), что для матриц i, a, b и соответствующих гиперчисел выполняются правила умножения

$$a^{2} = b^{2} = \mathit{1}\,, \qquad i^{2} = -\mathit{1}\,, \qquad a\,b = -b\,a = i\,,$$
$$a\,i = -i\,a = b\,, \qquad i\,b = -b\,i = a\,.$$

Аналогично для матриц I, A, B и соответствующих гиперчисел выполняются правила умножения

$$A^{2} = B^{2} = \mathbb{1}\,, \qquad I^{2} = -\mathbb{1}\,, \qquad A\,B = -B\,A = I\,,$$
$$A\,I = -I\,A = B\,, \qquad I\,B = -B\,I = A\,.$$

Итак, в соответствии с нашим общим подходом мы должны, пользуясь правилами умножения векторов в алгебре $\mathbb{Q}_3$, найти структурные матрицы этой алгебры. Затем, анализируя свойства этих матриц, сделать заключение относительно свойств кварков.

3. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_3$

Вычисление структурных матриц $C^L{}_{KI}$ в действительном представлении будем выполнять по приведенному алгоритму для принятого ранее порядка индексов. То есть, будем записывать слагаемые вектора ψ в следующей последовательности

$$\psi = \lambda_{32}\,\psi^{32} + \lambda_{13}\,\psi^{13} + \lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_0\,\psi^0 + \\ \lambda_1\,\psi^1 + \lambda_2\,\psi^2 + \lambda_3\,\psi^3 + \lambda_{123}\,\psi^{123}\,.$$

В результате получим действительные структурные матрицы размерности 8×8. (см. Разделы III 1, 5) Помимо действительного представления будем использовать iab-представление и IAB-представление базисных векторов алгебры кварков, удобные в силу своей компактности.

4. iab-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_3$

iab-представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \lambda_{13}\circ(\lambda_{21}\,\psi^{32} + \lambda_0\,\psi^{13}) + \lambda_0\circ(\lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_0\,\psi^0) + \\ \lambda_2\circ(\lambda_{21}\,\psi^1 + \lambda_0\,\psi^2) + \lambda_{123}\circ(\lambda_{21}\,\psi^3 + \lambda_0\,\psi^{123})\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{Q}_3$ в виде произведения $\mathbb{Q}_2\times\mathbb{Q}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_2$ являются

$$\lambda_{13}\,,\quad \lambda_0\,,\quad \lambda_2\,,\quad \lambda_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_1$ являются

$$\lambda_{21}\,,\quad \lambda_0\,.$$

Пространство $\mathbb{Q}_1$ можно рассматривать как пространство либо комплексных чисел, либо a-чисел. Для этого базисному вектору λ_{21} алгебры $\mathbb{Q}_1$ поставим в соответствие либо мнимую единицу, если $\operatorname{sign}\lambda_{21} = -1$, либо a-единицу, если $\operatorname{sign}\lambda_{21} = 1$, а базисному вектору λ_0 алгебры $\mathbb{Q}_1$ поставим в соответствие действительную единицу.

В iab-представлении структурные матрицы имеют размерность 4×4 (см. Разделы III 1,5).

5. IAB-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}_3$

IAB-представление подалгебры $\mathbb{Q}_3$ основано на разложении вектора:

$$\psi = (\lambda_{32}\,\psi^{32} + \lambda_{13}\,\psi^{13} + \lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_0\,\psi^0)\circ\lambda_0 + \\ (\lambda_{32}\,\psi^1 + \lambda_{13}\,\psi^2 + \lambda_{21}\,\psi^3 + \lambda_0\,\psi^{123})\circ\lambda_{123}\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{Q}_3$ в виде произведения $\mathbb{Q}_1\times\mathbb{Q}_2$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_1$ являются

$$\lambda_0\,,\quad \lambda_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_2$ являются

$$\lambda_{32}\,,\quad \lambda_{13}\,,\quad \lambda_{21}\,,\quad \lambda_0\,.$$

Последнюю алгебру мы назовем IAB-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. В этом представлении базисные векторы λ_{32}, λ_{13}, λ_{21}, λ_0 заменяются на гиперчисла IAB-алгебры. Отсюда видно, что в IAB-представлении вектор ψ проецируется на направления λ_0, λ_{123}.

IAB-представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2 (см. Разделы III 1, 5).

III. АЛГЕБРА КВАРКОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(U,D)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра $\mathbb{Q}(u,d)$ есть алгебра действия и алгебра пространства-времени кварков первого поколения. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0\circ\lambda_0 = \lambda_0\,.$$

- Образующие базисные векторы λ_a, где индекс a пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов λ_a равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a\circ\lambda_0 = \lambda_0\circ\lambda_a = \lambda_a\,.$$

$$\lambda_a\circ\lambda_a = \lambda_0\,.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b\circ\lambda_a\,.$$

Здесь $a \neq b$.

В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – перестановочные соотношения

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21} \,, \quad \lambda_{13} = \lambda_{31} \,, \quad \lambda_{32} = -\lambda_{23} \,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности,

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = -\lambda_0 \,, \quad \lambda_{13} \circ \lambda_{13} = \lambda_0 \,, \quad \lambda_{32} \circ \lambda_{32} = -\lambda_0 \,.$$

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1 \,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = -\lambda_{132} \,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0 \,.$$

1. Структурные матрицы контравариантной алгебры действия кварков первого поколения $\mathbb{Q}(u,d)_{right}$

Вычисление этих матриц выполним в соответствии с Разделом II 1 на основании формулы (4)

$$\lambda_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 & 1 &&&&&&& \\ 13 && 1 &&&&&& \\ 21 &&& 1 &&&&& \\ 0 &&&& 1 &&&& \\ \hline 1 &&&&& 1 &&& \\ 2 &&&&&& 1 && \\ 3 &&&&&&& 1 & \\ 123 &&&&&&&& 1 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline 1 &&&& 13 \\ & 1 &&& 0 \\ \hline && 1 && 2 \\ &&& 1 & 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline \mathbb{1} & & 0 \\ \hline & \mathbb{1} & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&&&& 1 \\ 13 &&&&&&& 1 & \\ 21 &&&&&& 1 && \\ 0 &&&&& 1 &&& \\ \hline 1 &&&& 1 &&&& \\ 2 &&& 1 &&&&& \\ 3 && 1 &&&&&& \\ 123 & 1 &&&&&&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline &&& 1 & 13 \\ && 1 && 0 \\ \hline & 1 &&& 2 \\ 1 &&&& 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & A & 0 \\ \hline A & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&&& 1 & \\ 13 &&&&&&&& -1 \\ 21 &&&&& -1 &&& \\ 0 &&&&&& 1 && \\ \hline 1 &&& -1 &&&&& \\ 2 &&&& 1 &&&& \\ 3 & 1 &&&&&&& \\ 123 && -1 &&&&&& \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline &&& -1 & 13 \\ && 1 && 0 \\ \hline & 1 &&& 2 \\ -1 &&&& 123 \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & -I & 0 \\ \hline I & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&&& -1 && \\ 13 &&&&& 1 &&& \\ 21 &&&&&&&& -1 \\ 0 &&&&&&& 1 & \\ \hline 1 && 1 &&&&&& \\ 2 & -1 &&&&&&& \\ 3 &&&& 1 &&&& \\ 123 &&& -1 &&&&& \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline && -1 && 13 \\ &&& -1 & 0 \\ \hline 1 &&&& 2 \\ & 1 &&& 123 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & -\mathbb{1} & 0 \\ \hline \mathbb{1} & & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 52 && -1 &&&&&& \\ 13 & 1 &&&&&&& \\ 21 &&&& 1 &&&& \\ 0 &&& -1 &&&&& \\ \hline 1 &&&&&& 1 && \\ 2 &&&&& -1 &&& \\ 3 &&&&&&&& -1 \\ 123 &&&&&&& 1 & \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline -1 &&&& 13 \\ & 1 &&& 0 \\ \hline && 1 && 2 \\ &&& -1 & 123 \\ \hline \end{array} = i \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline B & & 0 \\ \hline & -B & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&& -1 &&&&& \\ 13 &&&& 1 &&&& \\ 21 & -1 &&&&&&& \\ 0 && 1 &&&&&& \\ \hline 1 &&&&&&& 1 & \\ 2 &&&&&&&& -1 \\ 3 &&&&& 1 &&& \\ 123 &&&&&& -1 && \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & 1 &&& 13 \\ 1 &&&& 0 \\ \hline &&& -1 & 2 \\ && -1 && 123 \\ \hline \end{array} = b \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline A & & 0 \\ \hline & -A & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda_{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&& 1 &&&& \\ 13 &&& 1 &&&&& \\ 21 && -1 &&&&&& \\ 0 & -1 &&&&&&& \\ \hline 1 &&&&&&&& 1 \\ 2 &&&&&&& 1 & \\ 3 &&&&&& -1 && \\ 123 &&&&& -1 &&& \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & 1 &&& 13 \\ -1 &&&& 0 \\ \hline &&& 1 & 2 \\ && -1 && 123 \\ \hline \end{array} = a \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline I & & 0 \\ \hline & I & 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda_{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|} & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline 32 &&&&& -1 &&& \\ 13 &&&&&& -1 && \\ 21 &&&&&&& 1 & \\ 0 &&&&&&&& 1 \\ \hline 1 & -1 &&&&&&& \\ 2 && -1 &&&&&& \\ 3 &&& 1 &&&&& \\ 123 &&&& 1 &&&& \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c} \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline && -1 && 13 \\ &&& 1 & 0 \\ \hline -1 &&&& 2 \\ & 1 &&& 123 \\ \hline \end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{123} & \\ \hline & B & 0 \\ \hline B & & 123 \\ \hline \end{array}$$

2. Действительное представление алгебры кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{right}$

Структурные матрицы $C^{L}{}_{KI}$ в действительном представлении вычислены по алгоритму, приведенному в Разделе II, для принятого ранее порядка индексов. При этом слагаемые вектора ψ записываются в следующей последовательности

$$\psi = \lambda_{32}\,\psi^{32} + \lambda_{13}\,\psi^{13} + \lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_{0}\,\psi^{0} + \lambda_{1}\,\psi^{1} + \lambda_{2}\,\psi^{2} + \lambda_{3}\,\psi^{3} + \lambda_{123}\,\psi^{123}\,.$$

В результате мы получили действительные структурные матрицы λ_K размерности 8×8. Помимо действительного представления мы использовали iab-представление.

3. iab-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{right}$

iab-представление основано на следующем разложении вектора:

$$\psi = \lambda_{13} \circ (\lambda_{21}\,\psi^{32} + \lambda_0\,\psi^{13}) + \lambda_0 \circ (\lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_0\,\psi^{0}) + \lambda_2 \circ (\lambda_{21}\,\psi^{1} + \lambda_0\,\psi^{2}) + \lambda_{123} \circ (\lambda_{21}\,\psi^{3} + \lambda_0\,\psi^{123})\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{Q}_3$ в виде произведения $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_1$ (здесь нижний индекс есть размерность образующего пространства). Базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_2$ являются

$$\lambda_{13}\,,\quad \lambda_0\,,\quad \lambda_2\,,\quad \lambda_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_1$ являются

$$\lambda_{21}\,,\quad \lambda_0\,.$$

Пространство $\mathbb{Q}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору λ_{21} алгебры $\mathbb{Q}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу, учитывая, что $\operatorname{sign}\lambda_{21} = -1$, а базисному вектору λ_0 этой алгебры поставим в соответствие действительную единицу.

$$\lambda_{21} \sim i\,,\quad \lambda_0 \sim 1\,.$$

В результате получим вектор алгебры $\mathbb{Q}_3$ в iab-представлении

$$\begin{aligned}\psi \ = \ &\lambda_{13} \circ (i\,\psi^{32} + \psi^{13}) + \lambda_0 \circ (i\,\psi^{21} + \psi^{0}) + \\ &\lambda_2 \circ (i\,\psi^{1} + \psi^{2}) + \lambda_{123} \circ (i\,\psi^{3} + \psi^{123})\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, в iab-представлении координаты (компоненты) вектора являются комплексными числами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}^{13} &= i\,\psi^{32} + \psi^{13}\,, & \boldsymbol{\psi}^{0} &= i\,\psi^{21} + \psi^{0}\,,\\ \boldsymbol{\psi}^{2} &= i\,\psi^{1} + \psi^{2}\,, & \boldsymbol{\psi}^{123} &= i\,\psi^{3} + \psi^{123}\,.\end{aligned} \tag{9}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \lambda_{13}\,\boldsymbol{\psi}^{13} + \lambda_0\,\boldsymbol{\psi}^{0} + \lambda_2\,\boldsymbol{\psi}^{2} + \lambda_{123}\,\boldsymbol{\psi}^{123}\,. \tag{10}$$

Отсюда видно, что в iab-представлении вектор ψ проецируется на направления λ_{13}, λ_0, λ_2, λ_{123}.

В iab-представлении структурные матрицы имеют размерность 4×4. От iab-представления мы перешли к IAB-представлению.

4. IAB-представление алгебры кварков $\mathbb{Q}(u,d)_{right}$

IAB-представление подалгебры $\mathbb{Q}_3$ основано на разложении вектора:

$$\psi = (\lambda_{32}\,\psi^{32} + \lambda_{13}\,\psi^{13} + \lambda_{21}\,\psi^{21} + \lambda_0\,\psi^{0}) \circ \lambda_0 + (\lambda_{32}\,\psi^{1} + \lambda_{13}\,\psi^{2} + \lambda_{21}\,\psi^{3} + \lambda_0\,\psi^{123}) \circ \lambda_{123}\,.$$

Это представление соответствует записи алгебры $\mathbb{Q}_3$ в виде произведения $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$. Базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_1$ являются

$$\lambda_0\,,\quad \lambda_{123}\,;$$

базисными векторами алгебры $\mathbb{Q}_2$ являются

$$\lambda_{32}\,,\quad \lambda_{13}\,,\quad \lambda_{21}\,,\quad \lambda_0\,.$$

$$\operatorname{sign}\lambda_{32} = \operatorname{sign}\lambda_{21} = -1\,,\quad \operatorname{sign}\lambda_{13} = \operatorname{sign}\lambda_0 = 1\,.$$

Последнюю алгебру мы назовем IAB-алгеброй. Эта алгебра аналогична алгебре кватернионов. Для базисных единиц IAB-алгебры используем следующие обозначения

$$a \cdot I\,,\quad b \cdot A\,,\quad i \cdot B\,,\quad \mathbb{1}\,.$$

Заменим базисные векторы λ_{32}, λ_{13}, λ_{21}, λ_0 приведенными гиперчислами в соответствии

$$\begin{aligned}\lambda_{32} &\sim a\,I\,,\\ \lambda_{13} &\sim b\,A\,,\\ \lambda_{21} &\sim i\,B\,,\\ \lambda_0 &\sim 1\,\mathbb{1}\,.\end{aligned}$$

Получим вектор алгебры $\mathbb{Q}_3$ в IAB-представлении *

$$\psi = (a \cdot I\,\psi^{32} + b \cdot A\,\psi^{13} + i \cdot B\,\psi^{21} + \mathbb{1}\,\psi^{0}) \circ \lambda_0 + (a \cdot I\,\psi^{1} + b \cdot A\,\psi^{2} + i \cdot B\,\psi^{3} + \mathbb{1}\,\psi^{123}) \circ \lambda_{123}\,.$$

Таким образом, в IAB-представлении координаты (компоненты) вектора являются гиперчислами. Введем для них обозначение

$$\begin{aligned}\Psi^{0} &= a\,I\,\psi^{32} + b\,A\,\psi^{13} + i\,B\,\psi^{21} + \mathbb{1}\,\psi^{0}\,,\\ \Psi^{123} &= a\,I\,\psi^{1} + b\,A\,\psi^{2} + i\,B\,\psi^{3} + \mathbb{1}\,\psi^{123}\,.\end{aligned} \tag{11}$$

С учетом этого вектор ψ можно записать

$$\psi = \Psi^0\,\lambda_0 + \Psi^{123}\,\lambda_{123}\,.$$

Отсюда видно, что в IAB-представлении вектор ψ проецируется на направления λ_0, λ_{123}.

В IAB-представлении структурные матрицы имеют размерность 2×2 (см. Раздел III 1).

---

*Заметим, что при умножении базисных единиц первые и вторые сомножители умножаются отдельно. Например,

$$(a \cdot I) \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot (I \cdot A) = -i \cdot B\,.$$

5. Структурные матрицы контравариантной алгебры пространства кварков первого поколения $\mathbb{Q}(u,d)_{left}$

Вычисление этих матриц выполним в соответствии с Разделом II 3 на основании формулы (5)

$$\Lambda_0 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & 1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0 \\ \hline
 & \mathbb{1} & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda_1 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & & -1 \\
13 & & & & & & & 1 & \\
21 & & & & & & -1 & & \\
0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
1 & & & & 1 & & & & \\
2 & & & -1 & & & & & \\
3 & & 1 & & & & & & \\
123 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -1 & 13 \\
 & & -1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -A & 0 \\ \hline
A & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda_2 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & & -1 & \\
13 & & & & & & & & -1 \\
21 & & & & & 1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
1 & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & \\
3 & -1 & & & & & & & \\
123 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 2 \\
-1 & & & & 123 \\ \hline
\end{array} = 1 \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & -I & 0 \\ \hline
I & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda_3 \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & & 1 & & \\
13 & & & & & 1 & & & \\
21 & & & & & & & & 1 \\
0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
1 & & 1 & & & & & & \\
2 & 1 & & & & & & & \\
3 & & & & 1 & & & & \\
123 & & & 1 & & & & & \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & 1 & & 13 \\
 & & & 1 & 0 \\ \hline
1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & 0 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & -1 & & \\
2 & & & & & 1 & & & \\
3 & & & & & & & & 1 \\
123 & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
-1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & -1 & & 2 \\
 & & & 1 & 123 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
B & & 0 \\ \hline
 & B & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & -1 & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & 1 & \\
2 & & & & & & & & -1 \\
3 & & & & & 1 & & & \\
123 & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & -1 & 2 \\
 & & -1 & & 123 \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
A & & 0 \\ \hline
 & -A & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda_{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & \\
21 & & -1 & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & -1 \\
2 & & & & & & & -1 & \\
3 & & & & & & 1 & & \\
123 & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
-1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & -1 & 2 \\
 & & 1 & & 123 \\ \hline
\end{array} = a \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
I & & 0 \\ \hline
 & -I & 123 \\ \hline
\end{array}$$

$$\Lambda_{123} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 & & & & & 1 & & & \\
13 & & & & & & -1 & & \\
21 & & & & & & & -1 & \\
0 & & & & & & & & 1 \\ \hline
1 & 1 & & & & & & & \\
2 & & -1 & & & & & & \\
3 & & & -1 & & & & & \\
123 & & & & 1 & & & & \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & -1 & & 13 \\
 & & & 1 & 0 \\ \hline
-1 & & & & 2 \\
 & 1 & & & 123 \\ \hline
\end{array} = b \begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
 & B & 0 \\ \hline
B & & 123 \\ \hline
\end{array}$$

IV. АЛГЕБРА КВАРКОВ ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(C,S)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра $\mathbb{Q}(c,s)$ есть алгебра действия и алгебра пространства-времени фундаментальных частиц – c и s кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0\,.$$

- Образующие базисные векторы λ_a, где индекс a пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов λ_a равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a\,.$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0\,.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a\,.$$

Здесь $a \neq b$. Число этих векторов равно трем. В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – перестановочные соотношения

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21}\,,$$
$$\lambda_{13} = -\lambda_{31}\,,$$
$$\lambda_{32} = \lambda_{23}\,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности,

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = -\lambda_0 \,,$$
$$\lambda_{13} \circ \lambda_{13} = -\lambda_0 \,,$$
$$\lambda_{32} \circ \lambda_{32} = \lambda_0 \,.$$

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1 \,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей

$$\lambda_{123} = -\lambda_{213} = \lambda_{231} = \lambda_{321} = -\lambda_{312} = \lambda_{132} \,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0 \,.$$

V. АЛГЕБРА КВАРКОВ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ $\mathbb{Q}(T, B)$

В соответствии с выдвинутым нами предположением коммутативно-антикоммутативная алгебра $\mathbb{Q}(t, b)$ есть алгебра действия и алгебра пространства-времени фундаментальных частиц – t и b кварков. Укажем базисные векторы этой алгебры и правила умножения, которым они подчиняются.

- λ_0 – базисный вектор скалярной части вектора. Для λ_0 имеет место правило умножения

$$\lambda_0 \circ \lambda_0 = \lambda_0 \,.$$

- Образующие базисные векторы λ_a, где индекс a пробегает значения от 1 до 3, есть базисные векторы геометрического пространства. Число векторов λ_a равно трем. Для них имеют место правила умножения

$$\lambda_a \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ \lambda_a = \lambda_a \,.$$

$$\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_0 \,.$$

- Векторы

$$\lambda_{ab} = \lambda_b \circ \lambda_a \,.$$

Здесь $a \neq b$. Число этих векторов равно трем. В соответствии с Разделом I для этих векторов выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – перестановочные соотношения

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} \,,$$
$$\lambda_{13} = -\lambda_{31} \,,$$
$$\lambda_{32} = -\lambda_{23} \,.$$

Правила умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условия ассоциативности и перестановочных соотношений. В частности,

$$\lambda_{21} \circ \lambda_{21} = \lambda_0 \,,$$
$$\lambda_{13} \circ \lambda_{13} = -\lambda_0 \,,$$
$$\lambda_{32} \circ \lambda_{32} = -\lambda_0 \,.$$

- Вектор

$$\lambda_{123} = \lambda_3 \circ \lambda_2 \circ \lambda_1 \,.$$

Для этого вектора выполняются правила перестановки индексов и, соответственно, сомножителей

$$\lambda_{123} = \lambda_{213} = -\lambda_{231} = \lambda_{321} = \lambda_{312} = -\lambda_{132} \,.$$

Из условия ассоциативности и перестановочных соотношений также следует

$$\lambda_{123} \circ \lambda_{123} = \lambda_0 \,.$$

VI. ГЕНЕРАТОРЫ АРОМАТИЧЕСКОЙ $SU(3)$ ГРУППЫ

В этом Разделе мы попытаемся вычислить матрицы Гелл-Манна. Напомним следующее. Если каждый из кварков u, d, s характеризовать комплексной волновой функцией и построить на этих функциях трехмерное комплексное пространство, то на этом пространстве действует ароматическая $SU(3)$ группа. Генераторами этой группы являются матрицы Гелл-Манна

$$\Lambda_1 \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\,, \quad \Lambda_2 \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -i & \\ \hline i & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\,, \quad \Lambda_3 \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & -1 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\Lambda_4 \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}\,, \quad \Lambda_5 \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & -i \\ \hline & i & \\ \hline \end{array}\,, \quad \Lambda_6 \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & -2 \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\Lambda_7 \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}\,, \quad \Lambda_8 \sim \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & -i \\ \hline & & \\ \hline i & & \\ \hline \end{array}\,.$$

Мы попытаемся вычислить матрицы Гелл-Манна, рассматривая их как структурные матрицы некоторой алгебры, объединяющей алгебры пространств u, d и s кварков. Эту задачу мы будем решать при ряде допущений. Во-первых, положим, что указанные алгебры являются алгебрами Клиффорда. Запишем векторы в каждой из алгебр

$$x^u = \Lambda^u_0\, x^0 + \Lambda^u_a\, x^a + \Lambda^u_{ab}\, x^{ab} + \Lambda^u_{123}\, x^{123}\,,$$

$$y^d = \Lambda^d_0\, y^0 + \Lambda^d_a\, y^a + \Lambda^d_{ab}\, y^{ab} + \Lambda^d_{123}\, y^{123}\,,$$

$$z^s = \Lambda^s_0\, z^0 + \Lambda^s_a\, z^a + \Lambda^s_{ab}\, z^{ab} + \Lambda^s_{123}\, z^{123}\,.$$

Здесь в силу нашего допущения

$$\Lambda_{ab} = -\Lambda_{ba}\,.$$

Во-вторых, будем рассматривать не полные векторы, а их частные случаи

$$x^u = \Lambda^u_0\, x^0 + \Lambda^u_{ab}\, x^{ab}\,,$$

$$y^d = \Lambda^d_0\, y^0 + \Lambda^d_{ab}\, y^{ab}\,,$$

$$z^s = \Lambda^s_0\, z^0 + \Lambda^s_{ab}\, z^{ab}\,.$$

Каждый из этих векторов определяет подалгебру соответственно в алгебрах пространств u, d и s кварков. И теперь объединим полученные подалгебры в общую алгебру, представляя ее вектором

$$w = x^u + y^d + z^s\,.$$

Эту алгебру обозначим $\mathbb{Q}(u,d,s)$. Далее выполним процедуру сжатия алгебры $\mathbb{Q}(u,d,s)$ путем отождествления следующих базисных векторов

$$\begin{array}{ll}
\Lambda^u_{32} \equiv \Lambda^s_{21}\,, & \Lambda^u_{13} \equiv \Lambda^s_0\,,\\
\Lambda^u_{21} \equiv \Lambda^d_{32}\,, & \Lambda^u_0 \equiv \Lambda^d_{13}\,,\\
\Lambda^d_{21} \equiv \Lambda^s_{32}\,, & \Lambda^d_0 \equiv \Lambda^s_{13}\,,
\end{array}$$

И, наконец, вычислим структурные матрицы Λ_{ab} алгебры $\mathbb{Q}(u,d,s)$ в сжатом представлении. Вычисления выполним в соответствии с алгоритмом, указанным в Разделе II 2. Получим

$$\Lambda^u_{32} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & & & 1 & & \\
0 & & 13 & & & -1 & & & \\
\hline
 & 32 & 21 & & 1 & & & & \\
 & 13 & 0 & -1 & & & & & \\
\hline
32 & 21 & & & & & & & \\
13 & 0 & & & & & & & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

$$\Lambda^u_{13} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & & 1 & & & \\
0 & & 13 & & & & 1 & & \\
\hline
 & 32 & 21 & -1 & & & & & \\
 & 13 & 0 & & -1 & & & & \\
\hline
32 & 21 & & & & & & & \\
13 & 0 & & & & & & & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -i & \\ \hline i & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

$$\Lambda^u_{21} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & -1 & & & & \\
0 & & 13 & 1 & & & & & \\
\hline
 & 32 & 21 & & & & 1 & & \\
 & 13 & 0 & & & -1 & & & \\
\hline
32 & 21 & & & & & & & \\
13 & 0 & & & & & & & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

$$\Lambda^d_{32} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & & & & & \\
0 & & 13 & & & & & & \\
\hline
 & 32 & 21 & & & & & & 1\\
 & 13 & 0 & & & & & -1 & \\
\hline
32 & 21 & & & & & 1 & & \\
13 & 0 & & & & -1 & & & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array}$$

$$\Lambda^d_{13} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & & & & & \\
0 & & 13 & & & & & & \\
\hline
 & 32 & 21 & & & & & 1 & \\
 & 13 & 0 & & & & & & 1\\
\hline
32 & 21 & & & & -1 & & & \\
13 & 0 & & & & & -1 & & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & -i \\ \hline & i & \\ \hline\end{array}$$

$$\Lambda^d_{21} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & & & & & \\
0 & & 13 & & & & & & \\
\hline
 & 32 & 21 & & & & -1 & & \\
 & 13 & 0 & & & 1 & & & \\
\hline
32 & 21 & & & & & & & 1\\
13 & 0 & & & & & & -1 & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & -1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\Lambda^s_{32} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & & & & & 1\\
0 & & 13 & & & & & -1 & \\
\hline
 & 32 & 21 & & & & & & \\
 & 13 & 0 & & & & & & \\
\hline
32 & 21 & & & 1 & & & & \\
13 & 0 & & -1 & & & & & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}$$

$$\Lambda^s_{13} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & & & & -1 & \\
0 & & 13 & & & & & & -1\\
\hline
 & 32 & 21 & & & & & & \\
 & 13 & 0 & & & & & & \\
\hline
32 & 21 & & 1 & & & & & \\
13 & 0 & & & 1 & & & & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & i \\ \hline & & \\ \hline -i & & \\ \hline\end{array}$$

$$\Lambda^s_{21} \sim \begin{array}{ccc|cc|cc|cc|}
 & & s & 21 & 0 & & & 32 & 13\\
 & & d & & & 32 & 13 & 21 & 0\\
s & d & u & 32 & 13 & 21 & 0 & & \\
\hline
21 & & 32 & & 1 & & & & \\
0 & & 13 & -1 & & & & & \\
\hline
 & 32 & 21 & & & & & & \\
 & 13 & 0 & & & & & & \\
\hline
32 & 21 & & & & & & & -1\\
13 & 0 & & & & & & 1 & \\
\hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & -1 \\ \hline\end{array}$$

Число приведенных матриц равно девяти, однако, матрицы Λ_{21}^u, Λ_{21}^d, Λ_{21}^s связаны между собой тождеством

$$\Lambda_{21}^u + \Lambda_{21}^d + \Lambda_{21}^s = 0\,.$$

Следовательно, только две из указанных матриц являются линейно независимыми, или две линейные комбинации с их участием. В частности, в качестве линейно независимых матриц могут быть выбраны Λ_{21}^u и

$$\Lambda_6 = \Lambda_{21}^s - \Lambda_{21}^d \;\sim\; \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & -2 \\ \hline \end{array}$$

Поэтому общее число линейно независимых матриц Λ_{ab} равно восьми и эти матрицы есть матрицы Гелл-Манна с точностью до постоянного множителя.

VII. ВЫВОДЫ

- Над геометрическим пространством можно построить три алгебры, содержащих два антикоммутативных и одно коммутативное перестановочные соотношения. Эти алгебры ставятся в соответствие трем поколениям кваркам.

- Волновые функции кварков разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех базисных векторов образующего геометрического пространства. Это правило совпадает с правилом, установленным для волновых функций лептонов разных поколений.

- Мы получили структурные матрицы алгебры кварков $\mathbb{Q}_3$ по такому же алгоритму, по которому в Лекции 3 были выведены матрицы Дирака. Для нас это обстоятельство является свидетельством в пользу того, что предлагаемый подход к описанию фундаментальных частиц содержит элементы *единой* теории.

- Матрицы Гелл-Манна являются структурными матрицами алгебры, охватывающей алгебры u, d, s кварков.