Лекция 10. Специальная теория относительности в пространстве-времени лептона.

А. А. Кецарис

(24 октября 2004 г.)

В этой Лекции мы рассматриваем линейные преобразования пространства-времени лептона, сохраняющие длину интервала в этом пространстве. В частном случае эти преобразования описывают прямолинейное ускоренное движение, равномерное плоское вращение, ускоренное плоское вращение, ускоренное телесное вращение.

I. ВВЕДЕНИЕ

В Лекции 8 было установлено, что пространство-время лептона есть алгебра Клиффорда, образующим пространством которой является пространство-время специальной теории относительности Эйнштейна (СТО). Приведенные соображения позволяют записать дифференциал вектора пространства – времени лептона в следующем виде

$$dx = \mathcal{E}_0\, dx^0 + \mathcal{E}_a\, dx^a + \mathcal{E}_4\, c\, dt + \mathcal{E}_{ab}\, R\, d\varphi^{ab} + \mathcal{E}_{a4}\, T\, dv^a + \mathcal{E}_{123}\, R\, d\varphi^{123} + \mathcal{E}_{ab4}\, \frac{R\, d\omega^{ab}}{\Omega} + \mathcal{E}_{1324}\, \frac{R\, d\omega^{132}}{\Omega_T}\,.$$

Для квадрата длины этого вектора мы получили

$$\langle dx, dx\rangle \equiv (dx^0)^2 + (dx^a)^2 - c^2\, dt^2 - R^2\,(d\varphi^{ab})^2 + T^2\,(dv^a)^2 - R^2\,(d\varphi^{123})^2 + \frac{R^2\,(d\omega^{ab})^2}{\Omega^2} - \frac{R^2\,(d\omega^{132})^2}{(\Omega_T)^2} = 0\,.$$

Специальной теорией относительности в пространстве-времени лептона мы будем называть теорию преобразований координат, сохраняющих квадрат интервала $(dx^0)^2$ или выражение

$$-(dx^a)^2 + c^2\, dt^2 + R^2\,(d\varphi^{ab})^2 - T^2\,(dv^a)^2 + R^2\,(d\varphi^{123})^2 - \frac{R^2\,(d\omega^{ab})^2}{\Omega^2} + \frac{R^2\,(d\omega^{132})^2}{(\Omega_T)^2}\,. \qquad (1)$$

Очевидно, что эти преобразования значительно богаче преобразований Лоренца и включают в себя последние. В этой Лекции мы рассмотрим преобразования координат системы отсчета, соответствующие

- ускоренному прямолинейному движению,
- равномерному вращению,
- равноускоренному вращению,
- равноускоренному телесному вращению.

Предварительно остановимся на двух известных случаях. На них мы продемонстрируем методы анализа, которые будем использовать в дальнейшем. Сначала рассмотрим преобразование координат, соответствующее равномерному прямолинейному движению системы отсчета в СТО. На нем мы покажем как преобразования координат можно получить, исходя из уравнений структуры группы этих преобразований.

И затем рассмотрим поворот в геометрическом пространстве относительно произвольной оси на фиксированный угол. На этом примере мы покажем как указанный поворот выражается через повороты в трех базисных плоскостях. Этот прием нам понадобится для вывода преобразований равноускоренных движений.

1. Равномерное прямолинейное движение системы отчета в СТО

Поиск преобразования координат в этом случае продиктован тем, что попытки определить движение лаборатории (системы отсчета) относительно световой частицы оказались безуспешными. Он основан на предположении, что существует такое тело – световая частица, которая движется с одной и той же скоростью (c) независимо от того из какой системы отсчета это движение рассматривается – системы отсчета K или K', движущейся относительно K. То есть, для световой частицы выполняются соотношения

$$\frac{dx}{dt} = \pm c\,, \qquad \frac{dx'}{dt'} = \pm c$$

независимо от скорости движения* системы отсчета K' относительно K. Отсюда следует, что для световой частицы должно выполняться

$$c^2\, dt^2 - dx^2 = c^2\,(dt')^2 - (dx')^2 = 0\,.$$

Более того, Эйнштейн предположил, что при описании движения тела B (не обязательно световой частицы) относительно систем отсчета K и K' имеет место условие

---

*Здесь t и x соответственно координата времени и координата положения тела в системе отсчета K, а t' и x' – такие же координаты, но для системы отсчета K'

$$c^2\,dt^2 - dx^2 = c^2\,(dt')^2 - (dx')^2\,. \tag{2}$$

То есть, величина

$$(dx^0)^2 = c^2\,dt^2 - dx^2$$

является инвариантом выбора системы отсчета при описании движения тела. * Иначе: параметр c является фундаментальной константой при описании движения тела (не только частицы света).

Замечание: В случае СТО мы имеем две системы отсчета K и K', в каждой из которых действует своя группа переносов, свой закон сложения векторов, свой ход времени. И установить связь между ними было бы невозможно, если бы не существование световой частицы. Но так как согласно исходному постулату движение световой частицы не зависит от движения системы отсчета, то это движение может быть использовано для согласования групп переносов, законов сложения векторов, хода времени в системах отсчета K и K' и решения задачи специальной теории относительности – установления преобразования координат тела B в системе отсчета K' в координаты этого тела в системе отсчета K.

Задачу специальной теории относительности в рассматриваемом случае можно решить так.

Пусть имеет место группа линейных преобразований дифференциалов времени (dt') и вектора (dx') системы отсчета K' в дифференциалы времени (dt) и вектора (dx) системы отсчета K. Зададим эти преобразования в следующем виде

$$\begin{gathered} ||dx|| = \mathbf{V}\,||dx'||\,, \\ \mathrm{V} = \mathbf{V}\cdot \mathrm{V}'\,, \end{gathered}$$

где выражение вида $||dx||$ это столбец из дифференциалов $c\,dt$ и dx, а V, $\mathbf{V}$, V' – матрицы преобразований. Для того, чтобы преобразование $\mathbf{V}$ сохраняло $(dx^0)^2$ (иначе говоря, удовлетворяло условию (2)), оно должно быть *поворотом* в псевдоевклидовой плоскости $(c\,dt, dx)$. То есть, необходимо положить

$$\mathbf{V} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline\end{array}$$

и

$$\begin{aligned} c\,dt &= \cosh\Psi\, c\,(dt)' + \sinh\Psi\,(dx)'\,, \\ dx &= \sinh\Psi\, c\,(dt)' + \cosh\Psi\,(dx)'\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где Ψ – угол поворота в указанной псевдоплоскости. Причем этот угол как-то связан с параметрами движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K. После подстановки выражения (3) в левую часть выражения (2) получим правую часть этого выражения, причем угол Ψ исключается из выражения для $(dx^0)^2$. Это и означает, что условие (2) не зависит от параметров движения системы отсчета K'.

Далее нам необходимо установить связь между углом Ψ и параметрами движения системы отсчета K'. Для этого рассмотрим ту часть изменения дифференциалов координат $c\,dt$ и dx, которая вызвана изменением угла Ψ и по предположению, следовательно, изменением параметров движения системы отсчета K':

$$\delta||dx|| = \delta\mathbf{V}\,||dx'||\,.$$

Учитывая, что

$$||dx'|| = \mathbf{V}^{-1}\,||dx||\,,$$

запишем

$$\delta||dx|| = (\delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1})\,||dx||\,.$$

Это уравнение назовем *уравнением структуры* группы преобразований координат. Далее рассмотрим как с помощью уравнения структуры можно получить преобразования Лоренца. В следующих разделах Лекции мы будем использовать этот прием для вывода более общих преобразований.

Итак, в нашем случае

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1} &= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline \sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \cosh\Psi & -\sinh\Psi \\ \hline -\sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline\end{array} \\ &= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} c\,\delta dt &= \delta\Psi\, dx\,, \\ \delta dx &= \delta\Psi\, c\,dt\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Используя эти соотношения, вычислим ту часть изменения скорости движения тела B относительно системы отсчета K, которая вызвана изменением параметров движения системы отсчета K', связанных с углом Ψ.

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} - dx\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.$$

Учитывая (4), получим

$$\delta\frac{v}{c} = \delta\Psi\,\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\,. \tag{5}$$

Отсюда имеем

$$v = c\,\tanh(\Psi + \psi')\,, \tag{6}$$

где ψ' – постоянная интегрирования. Это соотношение будем истолковывать следующим образом. Будем полагать, что $\Psi = 0$ соответствует случаю, когда система отсчета K' неподвижна относительно системы

* Этот квадрат интервала является частным случаем квадрата интервала в пространстве–времени лептона (1)

отсчета K и соответственно скорость тела B относительно системы отсчета K равна его скорости относительно системы отсчета K', то есть

$$v = c\,\tanh\psi' = v'.$$

Когда угол $\psi' = 0$ скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю и соответственно его скорость относительно системы отсчета K равна скорости движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть

$$v = c\,\tanh\Psi = \boldsymbol{v}.$$

В результате мы решили поставленную задачу: угол Ψ связан только со скоростью движения системы отсчета K' и следующим образом

$$\boldsymbol{v} = c\,\tanh\Psi\,. \qquad (7)$$

Замечание: в рассмотренном выводе угол ψ' – постоянная интегрирования. Следовательно, в рассматриваемом заключении

$$v' = c\,\tanh\psi' = const\,.$$

То есть, рассмотрение относится к случаю, когда скорость движения тела B относительно системы отсчета K' постоянна, то есть, тело B движется относительно системы отсчета K' равномерно. Таким образом, несмотря на то, что изначально мы не предполагали движение тела B относительно системы отсчета K' равномерным, далее при использовании (7) мы должны это делать.

Теперь, используя (7), получим

$$\cosh\Psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \sinh\Psi = \frac{\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,.$$

Искомое соотношение между дифференциалами координат тела B в системах отсчета K и K' примет вид преобразований Лоренца

$$dt = \frac{dt' + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad dx = \frac{\boldsymbol{v}\,dt' + dx'}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,. \qquad (8)$$

А из (6) следует закон сложения скоростей в специальной теории относительности Эйнштейна

$$v = \frac{\boldsymbol{v} + v'}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\,v'}{c^2}}\,.$$

Этот закон корреспондируется с преобразованием дифференциалов координат и времени. Действительно, из (8) имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\boldsymbol{v}\,dt' + dx'}{dt' + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\,dx'} = \frac{\boldsymbol{v} + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\,\frac{dx'}{dt'}}\,.$$

Теперь рассмотрим поворот в трехмерном геометрическом пространстве относительно произвольной оси.

2. Поворот в трехмерном пространстве относительно произвольной оси

Рассмотрим квадрат длины геометрического вектора с координатами dx^1, dx^2, dx^3

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\,.$$

Эта величина является инвариантом выбора системы отсчета при описании поворота тела. Поворот в пространстве дифференциалов вектора

$$||dx|| = \mathrm{U}\cdot||dx'||$$

сохраняет квадрат длины вектора. В частности, матрица поворота в плоскости (dx^1, dx^2) имеет вид

$$\mathrm{U}^{21} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\alpha & \sin\alpha & \\ \hline -\sin\alpha & \cos\alpha & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}\quad ,$$

матрица поворота в плоскости (dx^3, dx^1) имеет вид

$$\mathrm{U}^{13} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\beta & & -\sin\beta \\ \hline & 1 & \\ \hline \sin\beta & & \cos\beta \\ \hline \end{array}\quad ,$$

матрица поворота в плоскости (dx^2, dx^3) имеет вид

$$\mathrm{U}^{32} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \cos\gamma & \sin\gamma \\ \hline & -\sin\gamma & \cos\gamma \\ \hline \end{array}\quad .$$

Плоскости (dx^1, dx^2), (dx^3, dx^1),(dx^2, dx^3) будем называть *базисными* и соответственно повороты в этих плоскостях U^{21}, U^{13}, U^{32} также назовем *базисными.*

Произвольное преобразование U, сохраняющее квадрат длины, представляет собой поворот в произвольной плоскости в трехмерном пространстве (dx^1, dx^2, dx^3) на угол θ. Это преобразование удовлетворяет условиям

$$\mathrm{U}(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{U}(\theta_1)\cdot\mathrm{U}(\theta_2) \qquad (9)$$

$$\mathrm{U}(0) = \Delta \quad \text{– единичной матрице} \qquad (10)$$

Продифференцируем уравнение (9) по θ_1, после чего положим

$$\theta_1 = 0$$

и введем переобозначение

$$\theta_2 = \theta\,.$$

Получим [*]

[*] При дифференцировании по углу дифференциал будем обозначать δ.

$$\delta \mathrm{U}(\theta) = \delta\theta \cdot K_\theta \cdot \mathrm{U}(\theta)\,, \tag{11}$$

где

$$K_\theta = \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\Big|_{\theta=0}\,.$$

Эта матрица называется генератором поворота.

Уравнение (11) при начальном условии (10) позволяет записать матрицу поворота в следующем виде

$$\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta\cdot K_\theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\theta\cdot K_\theta) + \frac{1}{2!}\,(\theta\cdot K_\theta)^2 + \ldots\,. \tag{12}$$

В частности вышеуказанным соотношениям удовлетворяют базисные матрицы поворотов U^{21}, U^{13}, U^{32}. Им соответствуют следующие генераторы поворотов

$$K_\alpha = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline -1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,,\quad K_\beta = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & -1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}\,,\quad K_\gamma = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline\end{array}$$

Эти генераторы будем называть генераторами базисных поворотов. Генераторы произвольного поворота могут быть выражены через генераторы базисных поворотов

$$K_\theta = C^\alpha\, K_\alpha + C^\beta\, K_\beta + C^\gamma\, K_\gamma\,. \tag{13}$$

Здесь C^α, C^β, C^γ – так называемые направляющие косинусы, постоянные величины, определяющие положение произвольной плоскости относительно базисных плоскостей. Они удовлетворяют условию

$$(C^\alpha)^2 + (C^\beta)^2 + (C^\gamma)^2 = 1\,.$$

Используя соотношение (13), запишем генератор поворота в произвольной плоскости

$$K_\theta = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & C^\alpha & -C^\beta \\ \hline -C^\alpha & & C^\gamma \\ \hline C^\beta & -C^\gamma & \\ \hline\end{array}$$

Зная генератор K_θ, на основании (12) можно вычислить матрицу поворота в произвольной плоскости. Так как

$$(K_\theta)^3 = -K_\theta\,,\quad (K_\theta)^4 = -(K_\theta)^2\,,$$

то эта матрица выражается через тригонометрические функции угла θ

$$\mathrm{U} = \Delta + (K_\theta)^2 - (K_\theta)^2\,\cos\theta + K_\theta\,\sin\theta\,.$$

Или

$$\mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline (C^\gamma)^2-1 & C^\gamma C^\beta & -C^\alpha C^\gamma \\ \hline C^\beta C^\gamma & (C^\beta)^2-1 & -C^\beta C^\alpha \\ \hline C^\gamma C^\alpha & C^\alpha C^\beta & (C^\alpha)^2-1 \\ \hline\end{array} \quad -$$

$$- \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline (C^\gamma)^2-1 & C^\gamma C^\beta & -C^\alpha C^\gamma \\ \hline C^\beta C^\gamma & (C^\beta)^2-1 & -C^\beta C^\alpha \\ \hline C^\gamma C^\alpha & C^\alpha C^\beta & (C^\alpha)^2-1 \\ \hline\end{array}\,\cos\theta \quad +$$

$$+ \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & C^\alpha & -C^\beta \\ \hline -C^\alpha & & C^\gamma \\ \hline C^\beta & -C^\gamma & \\ \hline\end{array}\,\sin\theta\,.$$

Итак, мы рассмотрели два вопроса

- выражение матрицы преобразований через параметры движения системы отсчета на основании уравнения структуры группы преобразований,
- вычисление матрицы произвольного поворота через матрицы базисных поворотов.

Теперь вернемся к нашей программе и рассмотрим сначала прямолинейное ускоренное движение.

II. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ УСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим частный вектор в пространстве–времени лептона

$$dx = \mathcal{E}_0\, dx^0 + \mathcal{E}_1\, dx^1 + \mathcal{E}_4\, c\, dt + \mathcal{E}_{14}\, T\, dv^1\,.$$

Множество таких векторов составляет подалгебру алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$, которую назовем алгеброй прямолинейных ускоренных движений. Для квадрата интервала этого вектора имеем

$$(dx^0)^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - T^2\, dv^2\,. \tag{14}$$

Замечание. К такому виду квадрата интервала можно прийти из других, более общих соображений. В СТО имеет место соответствие между первой производной от функции $x(t)$ и углом поворота ψ в псевдоплоскости (x,t) системы отсчета. Следствием этого соответствие является соответствие между законом композиции в пространстве производной то есть между законом сложения скоростей и законом сложения углов в указанной псевдоплоскости. Трудно представить себе, что такого рода соответствие имеет место только для первой производной dx/dt и не имеет место для производных высшего порядка. С этой точки зрения должно быть соответствие между производной dv/dt и углом поворота в псевдоплоскости (v,t). Следствием этого соответствие должно быть соответствие между законом композиции в пространстве второй производной то есть между законом сложения ускорений и законом сложения углов в указанной псевдоплоскости.

Замечание: если под скоростью n-го порядка $v^{(n)}$ подразумевать $d^n x(t)/dt^n$ и иметь в виду, что $v^{(n)} =$

$dv^{(n-1)}/dt$, то следует ожидать, что существует соответствие между $v^{(n)}$ и углом поворота в плоскости $(v^{(n)}, t)$.

Однако, в рамках математического аппарата СТО подобное рассмотрение невозможно. Необходимое обобщение СТО заключается в следующем. Наряду с функцией $x(t)$ будем рассматривать функцию $v(t) = dx/dt$. В соответствии с вышеприведенными соображениями на дифференциалах dt, dx и dv построим векторное пространство, на котором введем квадрат интервала

$$(dx^0)^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - T^2\,dv^2\,.$$

Здесь постоянная T согласует размерность dv с размерностью линейного элемента и имеет размерность времени. Таким образом, мы пришли к выражению (14).

В частном случае, когда изменением скорости dv можно пренебречь рассматриваемый интервал (14) сводится к интервалу СТО. Далее рассмотрим следствия, вытекающие из инвариантности квадрата интервала (14).

1. Движение световой частицы

Сначала сделаем следующее замечание. Специальная теория относительности Эйнштейна рассматривает световую частицу как точку, движущуюся со скоростью c по отношению к любой инерциальной системе отсчета и не рассматривает процессы возникновения и исчезновения света, наблюдаемые в действительности. Кинематически такие процессы можно представить себе как ускорение световой частицы до скорости c и замедление ее движения от скорости c до нуля. А теперь вернемся к интервалу (14). Потребуем, чтобы для световой частицы этот интервал был равен нулю независимо от системы отсчета, из которой он рассматривается

$$c^2\,dt^2 - dx^2 - T^2\,dv^2 = c^2\,(dt')^2 - (dx')^2 - T^2\,(dv')^2 = 0\,.$$

Или в другой форме

$$c^2 - v^2 - \tfrac{c^2}{A^2}\,a^2 =$$

$$c^2 - (v')^2 - \tfrac{c^2}{A^2}\,(a')^2 = 0\,.$$

Здесь

$$v = \frac{dx}{dt}\,, \qquad v' = \frac{dx'}{dt'}$$

– скорость световой частицы в различных системах отсчета,

$$a = \frac{dv}{dt}\,, \qquad a' = \frac{dv'}{dt'}$$

– ускорение световой частицы в различных системах отсчета,

$$A = \frac{c}{T}$$

– постоянная величина, имеющая размерность ускорения.

Иначе говоря, условие

$$c^2 - v^2 - \frac{c^2}{A^2}a^2 = 0\,, \qquad (15)$$

а вместе с ним скорость c и ускорение A не зависят от скорости и ускорения системы отсчета, из которой наблюдается световая частица. Очевидно, что скорость движения световой частицы не может превышать значение c, а ускорение световой частицы не может превышать значение A. Условие (15) является естественным обобщением условия СТО для движения световой частицы

$$c^2 - v^2 = 0\,.$$

Уравнение (15) назовем *уравнением движения световой частицы*. Интегрирование этого уравнения приводит к следующим двум зависимостям скорости световой частицы от времени

$$v_1 = \pm c\,,$$
$$v_2 = \pm c\,\cos(t/T + C_1)\,,$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

При последующем интегрировании получим две зависимости координаты световой частицы от времени

$$x_1 = \pm c\,t + C_{0_1}\,,$$
$$x_2 = \pm R\,\sin(t/T + C_1) + C_{0_2}\,,$$

где C_{0_1} и C_{0_2} – постоянные интегрирования, $R = c\,T$.

Отсюда следует, что возможны два вида движения световой частицы. В первом случае она движется прямолинейно и равномерно со скоростью c, во втором случае световая частица совершает колебательное движение вдоль прямой в интервале $[R + C_0, R - C_0]$. В моменты времени $t/T + C_1 = \pi\,n$, где n – целое, скорость световой частицы при колебательном движении равна $\pm c$ и можно представить, что в эти моменты времени возможно изменение вида движения световой частицы: колебательное движение переходит в прямолинейное равномерное и наоборот. Так можно представить себе процесс возникновения и исчезновения света.

Таким образом, в пространстве–времени лептона движение световой частицы приобретает новые качества

1. световая частица может двигаться ускоренно;
2. существует предельное ускорение A, с которым может двигаться световая частица;

3. скорость v и ускорение a, с которыми движется световая частица, подчиняются уравнению (15);

4. указанное уравнение, а вместе с ним скорость c и ускорение A не зависят от скорости и ускорения системы отсчета, из которой наблюдается световая частица;

Разумеется, главным критерием правильности сформулированных положений будет обнаружение у света указанных свойств.

2. Начало движения. Закон сложения ускорений

Рассмотрим случай, относящийся к началу ускоренного движения, когда изменением геометрического смещения тела можно пренебречь [*], а изменение скорости тела существенно. Для этого случая квадрат интервала (14) упрощается до

$$(dx^0)^2 = c^2\, dt^2 - T^2\, dv^2\,.$$

Зададим линейные преобразования координат в следующем виде

$$\begin{gathered} ||dx|| = \mathbf{A}\, ||dx'||\,, \\ \mathrm{A} = \mathbf{A}\cdot \mathrm{A}'\,, \end{gathered}$$

где выражение вида $||dx||$ это столбец из дифференциалов $c\,dt$ и $T\,dv$, а A, $\mathbf{A}$, A' – матрицы преобразований. Для того, чтобы преобразование $\mathbf{A}$ сохраняло $(dx^0)^2$, оно должно быть *поворотом* в псевдоевклидовой плоскости $(c\,dt, T\,dv)$. То есть, необходимо положить

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline \end{array}$$

и

$$\begin{aligned} c\,dt\ &= \cosh\Psi\, c\,dt' + \sinh\Psi\, T\,dv'\,, \\ T\,dv\ &= \sinh\Psi\, c\,dt' + \cosh\Psi\, T\,dv'\,, \end{aligned} \tag{16}$$

где Ψ – угол поворота в указанной псевдоплоскости. Причем этот угол как-то связан с параметрами движения тела. Далее нам необходимо установить эту связь. Для этого рассмотрим уравнение структуры группы преобразований координат [†]

$$\delta||dx|| = (\delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1})\, ||dx||\,,$$

где

$$\delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline \sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \cosh\Psi & -\sinh\Psi \\ \hline -\sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline \end{array}$$

$$= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}.$$

результате получим

$$\begin{aligned} c\,\delta dt\ &= \delta\Psi\, T\,dv\,, \\ T\,\delta dv\ &= \delta\Psi\, c\,dt\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Используя эти соотношения, вычислим ту часть изменения скорости движения тела B относительно системы отсчета K, которая вызвана изменением параметров движения системы отсчета K', связанных с углом Ψ.

$$\delta\frac{dv}{dt} = \frac{\delta dv}{dt} - dv\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.$$

Учитывая (17), получим

$$\delta\frac{a}{A} = \delta\Psi\,\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)\,. \tag{18}$$

Здесь введены обозначения

$$a = \frac{dv}{dt}\,, \qquad A = \frac{c}{T}$$

Отсюда имеем соотношение между ускорением и углом Ψ

$$a = A\,\tanh(\Psi + \psi')\,, \tag{19}$$

где ψ' – постоянная интегрирования. Будем полагать, что $\Psi = 0$ соответствует случаю, когда система отсчета K' неподвижна относительно системы отсчета K и соответственно ускорение тела B относительно системы отсчета K равно его ускорению относительно системы отсчета K', то есть

$$a = A\,\tanh\psi' = a'.$$

Когда угол $\psi' = 0$ ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю и соответственно его ускорение относительно системы отсчета K равно ускорению движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть

$$a = A\,\tanh\Psi = \boldsymbol{a}.$$

В результате мы решили поставленную задачу: угол Ψ связан только с ускорением движения системы отсчета K' и следующим образом

$$\boldsymbol{a} = A\,\tanh\Psi\,. \tag{20}$$

Замечание: в рассмотренном выводе угол ψ' – постоянная интегрирования. Следовательно,

$$a' = A\,\tanh\psi' = const\,.$$

Теперь, используя (20), получим

$$\cosh\Psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}}\,, \qquad \sinh\Psi = \frac{\boldsymbol{a}}{A\,\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}}\,.$$

[*] То есть можно положить $dx = dx'$

[†] Смотри Раздел I.1.

Искомые соотношения между дифференциалами координат тела B в системах отсчета K и K' примут вид

$$dt = \frac{dt' + \frac{\boldsymbol{a}}{A^2}\, T\, dv'}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}}\,, \qquad dv = \frac{\boldsymbol{a}\, dt' + dv'}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}}\,. \tag{21}$$

К ним нужно добавить ранее принятое

$$dx = dx'\,.$$

При $A \to \infty$ получим преобразование Ньютона

$$\begin{gathered} dt = dt' \\ dx = dx' \\ dv = \boldsymbol{a}\, dt' + dv' \end{gathered}$$

Из (19) следует закон сложения ускорений

$$a = \frac{\boldsymbol{a} + a'}{1 + \frac{\boldsymbol{a}\, a'}{A^2}}\,.$$

Этот закон корреспондируется с преобразованием дифференциалов скорости и времени.

3. Составное движение

С целью упрощения дальнейших преобразований перейдем к безразмерным координатам. Для этого квадрат интервала (14) разделим на R^2 и выполним следующие переобозначения

$$\frac{dx^0}{R} \to dx^0\,, \quad \frac{dt}{T} \to dt\,, \quad \frac{dx}{R} \to dx\,, \quad \frac{dv}{c} \to dv\,.$$

Получим квадрат интервала в следующем виде

$$(dx^0)^2 = dt^2 - dx^2 - dv^2\,.$$

При переходе к безразмерным координатам будем пользоваться следующими обозначениями x, t, v, a соответственно координата, время, скорость и ускорение тела B относительно системы отсчета K, x', t', v', a' координата, время, скорость и ускорение тела B относительно системы отсчета K', $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ координата, время, скорость и ускорение системы отсчета K относительно системы отсчета K'.

Поворот в пространстве дифференциалов

$$||dx|| = \mathbf{U}\, ||dx'||$$

сохраняет квадрат интервала. В частности, поворот в псевдоплоскости (dx, dt)

$$\mathbf{V} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\Psi & \sinh\Psi & \\ \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array}$$

соответствует равномерному движению системы отсчета K'. Поворот в псевдоплоскости (dt, dv)

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\Phi & & \sinh\Phi \\ \hline & 1 & \\ \hline \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ \hline\end{array}$$

соответствует ускоренному движению системы отсчета K'.

Так как в общем случае повороты не перестановочны между собой, то движение $\mathbf{U} = \mathbf{VA}$ системы отсчета K' нужно отличать от движения $\mathbf{U} = \mathbf{AV}$ системы отсчета K'.

Будем говорить о системе отсчета K_1, параметры движения (скорость, ускорение) которой определены относительно системы отсчета K, как о системе отсчета, *вложенной* в K. На вложенных системах отсчета введем отношение порядка, задаваемое порядком относительного определения параметров движения. На Рис. 1(a,b) показаны вложенные системы отсчета, соответствующие **VA**- и **AV**-движению системы отсчета K', соответственно.

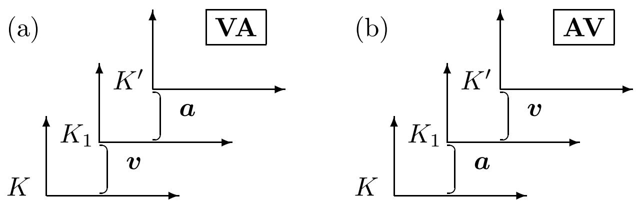

РИС. 1. (a) Случай **VA** движения. Скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K_1 задана относительно системы отсчета K, ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K' задано относительно системы отсчета K_1. (b) Случай **AV** движения. Скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K' задана относительно системы отсчета K_1, ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K_1 задано относительно системы отсчета K.

4. VA движение системы отсчета K'

Рассмотрим поворот, который задается матрицей

$$\mathbf{U} = \mathbf{VA} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\Psi\, \cosh\Phi & \sinh\Psi & \cosh\Psi\, \sinh\Phi \\ \hline \sinh\Psi\, \cosh\Phi & \cosh\Psi & \sinh\Psi\, \sinh\Phi \\ \hline \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ \hline\end{array}\,.$$

Тогда

$$\begin{gathered} dt = \cosh\Psi\, \cosh\Phi\, dt' + \sinh\Psi\, dx' + \cosh\Psi\, \sinh\Phi\, dv'\,, \\ dx = \sinh\Psi\, \cosh\Phi\, dt' + \cosh\Psi\, dx' + \sinh\Psi\, \sinh\Phi\, dv'\,, \\ dv = \sinh\Phi\, dt' + \cosh\Phi\, dv'\,. \end{gathered} \tag{22}$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и скоростью $v = dx/dt$ и ускорением $a = dv/dt$ тела B, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов Ψ и Φ на основании уравнений структуры:

$$\delta||dx|| = (\delta\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1})\,||dx||\,.$$

В нашем случае $\mathbf{U} = \mathbf{VA}$ и

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1}) &= \delta(\mathbf{VA})\,(\mathbf{VA})^{-1}\\ &= (\delta\mathbf{V}\,\mathbf{A} + \mathbf{V}\,\delta\mathbf{A})\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}^{-1}\\ &= \delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\,(\delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{V}^{-1}\,.\end{aligned}$$

$$\delta\mathbf{V} = \delta\Psi \begin{bmatrix} \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \cosh\Psi & \sinh\Psi & \\ & & \end{bmatrix},$$

$$\delta\mathbf{A} = \delta\Phi \begin{bmatrix} \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ & & \\ \cos\Phi & & \sinh\Phi \end{bmatrix}$$

$$\delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1} = \delta\Psi \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}, \qquad \delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \delta\Phi \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}\,(\delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{V}^{-1} = \delta\Phi \begin{bmatrix} \cosh\Psi & \sinh\Psi & \\ \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cosh\Psi & -\sinh\Psi & \\ -\sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \delta\Phi \begin{bmatrix} & & \cosh\Psi \\ & & \sinh\Psi \\ \cosh\Psi & -\sinh\Psi & \end{bmatrix}$$

$$\delta\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1} = \delta\Psi \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix} + \delta\Phi \begin{bmatrix} & & \cosh\Psi \\ & & \sinh\Psi \\ \cosh\Psi & -\sinh\Psi & \end{bmatrix}$$

Используя эту матрицу, получим

$$\begin{aligned}\delta dt &= \delta\Psi\,dx + \cosh\Psi\,\delta\Phi\,dv\,,\\ \delta dx &= \delta\Psi\,dt + \sinh\Psi\,\delta\Phi\,dv\,,\\ \delta dv &= \cosh\Psi\,\delta\Phi\,dt - \sinh\Psi\,\delta\Phi\,dx\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и скоростью тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} - dx\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.$$

Используя (23), получим

$$\delta v = \delta\Psi\,(1 - v^2) + \delta\Phi\,(\sinh\Psi - v\,\cosh\Psi)\,a\,, \tag{24}$$

где введено обозначение $a = dv/dt$.

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и ускорением тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{dv}{dt} = \frac{\delta dv}{dt} - dv\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.$$

Используя (23), получим

$$\delta a = -a\,v\,\delta\Psi + \big(\cosh\Psi\,(1 - a^2) - \sinh\Psi\,v\big)\,\delta\Phi\,. \tag{25}$$

Соотношения (22), (24) и (25) определяют преобразования координат, обобщенные на случай ускоренных движений тела B и системы отсчета K', и законы сложения скоростей и ускорений.

Далее рассмотрим решения уравнений (24) и (25) для случая, когда скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю. На Рис. 2 показаны вложенные системы отсчета, поясняющие этот случай.

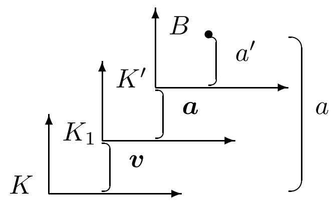

РИС. 2. Вложенные системы отсчета для случае **VA** движения системы отсчета K'. Скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K_1 задана относительно системы отсчета K, ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K' задана относительно системы отсчета K_1, ускорение a' тела B задано относительно системы отсчета K', ускорение a тела B задано относительно системы отсчета K.

1. *Закон сложения скоростей*

В соответствии с Рис. 1а для **VA** движения ускоренно движущаяся система отсчета K' не участвует в определении скорости $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K_1. Поэтому в этом случае закон сложения скоростей не зависит от ускорения. На Рис. 3 показаны вложенные системы отсчета, поясняющие закон сложения скоростей.

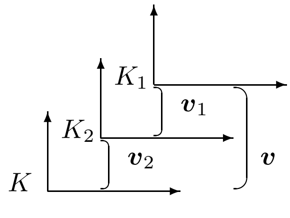

РИС. 3. Вложенные системы отсчета для сложения скоростей в случае **VA** движения системы отсчета K'. Скорость $\boldsymbol{v}_2$ системы отсчета K_2 задана относительно системы отсчета K, скорость $\boldsymbol{v}_1$ системы отсчета K_1 задана относительно системы отсчета K_2, скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K_1 задана относительно системы отсчета K.

В рассматриваемом случае скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю и соответственно его скорость относительно системы отсчета K равна скорости движения системы отсчета K_1 относительно системы отсчета K, то есть $v = \boldsymbol{v}$. Таким образом, из (24) при начальном условии ($\Psi = 0$, $v = 0$) имеем

$$v = \boldsymbol{v} = \tanh \Psi \,. \tag{26}$$

Отсюда следует закон сложения скоростей, известный из специальной теории относительности.

2. Закон сложения ускорений

Так как для **VA** движения системы отсчета K' ускорение a ускоренно движущегося тела B определено по отношению к равномерно движущейся системе отсчета K_1 (см. Рис. 1a), то закон сложения ускорений, записанный по отношению к системе отсчета K, зависит от скорости движения системы отсчета K_1. Рассмотрим сначала случай, когда скорость $v = \boldsymbol{v} = 0$ и $\Psi = 0$. Уравнение (25) при этом сводится к

$$\delta a = \left(1 - a^2\right)\, \delta \Phi \,.$$

Отсюда имеем случай, рассмотренный в Разделе 2.2

Для скорости v, отличной от нуля, уравнение (25) с учетом (26) и принятого условия $v = \boldsymbol{v}$ дает

$$a = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}\, \tanh(\Phi + \phi') \,.$$

Постоянную интегрирования ϕ' определим из следующих соображений. Будем полагать, что $\phi' = 0$ соответствует случаю, когда ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю и соответственно его ускорение относительно системы отсчета K (или K_1) равно ускорению движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть $a = \boldsymbol{a}$. И, напротив, будем полагать, что $\Phi = 0$ соответствует случаю, когда ускорение движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K равно нулю и соответственно ускорение тела B относительно системы отсчета K равно его ускорению относительно системы отсчета K', то есть $a = a'$. Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}\, \tanh \Phi \,. \tag{27}$$

$$a' = \sqrt{1-(v')^2}\, \tanh \phi' \,.$$

Но в рассматриваемом случае скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю, то есть $v' = 0$, поэтому

$$a' = \tanh \phi' \,.$$

Из соотношения, (27) следует закон сложения ускорений в общем случае, когда скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K' отлична от нуля:

$$a = \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2} \cdot \frac{\boldsymbol{a} + \sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}\, a'}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2} + \boldsymbol{a}\, a'} \,.$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$a = \sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} \cdot \frac{\boldsymbol{a} + \sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}\, a'}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} + \frac{\boldsymbol{a}\, a'}{A^2}} \,.$$

3. Преобразование дифференциалов координат

Из

$$\tanh \Psi = \boldsymbol{v} \,, \qquad \tanh \Phi = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} \,.$$

следует

$$\cosh \Psi = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} \,, \qquad \sinh \Psi = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}$$

и

$$\cosh \Phi = \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}} \,, \qquad \sinh \Phi = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}} \,.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (22), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned}
dt &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\, dt' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\, dx' + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\, \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\, dv' \,, \\
dx &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\, dt' + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\, dx' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}\, \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\, dv' \,, \\
dv &= \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\, dt' + \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\, dv' \,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом мы получили конкретный вид преобразований (22).

Для $v \ll 1$ и $a \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned}
dt &= \ dt' + \boldsymbol{v}\, dx' + \boldsymbol{a}\, dv' \,, \\
dx &= \ \boldsymbol{v}\, dt' + dx' + \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{a}\, dv' \,, \\
dv &= \ \boldsymbol{a}\, dt' + dv' \,.
\end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned}
dt &= \ dt' + \tfrac{1}{c^2}\, \boldsymbol{v}\, dx' + \tfrac{1}{A^2}\, \boldsymbol{a}\, dv' \,, \\
dx &= \ \boldsymbol{v}\, dt' + dx' + \tfrac{1}{A^2}\, \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{v}\, dv' \,, \\
dv &= \ \boldsymbol{a}\, dt' + dv' \,.
\end{aligned}$$

В ньютоновском пределе (при $c \to \infty$ и $A \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
dt =&\ dt' ,\\
dx =&\ \boldsymbol{v}\, dt' + dx' ,\\
dv =&\ \boldsymbol{a}\, dt' + dv' ,\\
da =&\ da' = 0 .
\end{aligned}
$$

5. AV движение системы отсчета K'.

В этом случае матрица поворота имеет вид:

$$
\mathbf{U} = \mathbf{AV} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\Phi\, \cosh\Psi & \cosh\Phi\, \sinh\Psi & \sinh\Phi \\ \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \hline \sinh\Phi\, \cosh\Psi & \sinh\Phi\, \sinh\Psi & \cosh\Phi \\ \hline \end{array} .
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
dt =&\ \cosh\Phi\, \cosh\Psi\, dt' \cosh\Phi\, \sinh\Psi\, dx' + \sinh\Phi\, dv' ,\\
dx =&\ \sinh\Psi\, dt' + \cosh\Psi\, dx' ,\\
dv =&\ \sinh\Phi\, \cosh\Psi\, dt' + \sinh\Phi\, \sinh\Psi\, dx' + \cosh\Phi\, dv' .
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ матрицы вращения и скоростью $v = dx/dt$ и ускорением $a = dv/dt$ тела B, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов Ψ и Φ матрицы поворота в соответствии с уравнением структуры:

$$
\delta dx = (\delta\mathbf{U}\, \mathbf{U}^{-1})\, dx .
$$

В нашем случае $\mathbf{U} = \mathbf{AV}$ и

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{U}\, \mathbf{U}^{-1} &= \delta(\mathbf{AV})\, (\mathbf{AV})^{-1} \\
&= (\delta\mathbf{A}\, \mathbf{V} + \mathbf{A}\, \delta\mathbf{V})\, \mathbf{V}^{-1}\, \mathbf{A}^{-1} \\
&= \delta\mathbf{A}\, \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}\, (\delta\mathbf{V}\, \mathbf{V}^{-1})\, \mathbf{A}^{-1} .
\end{aligned}
$$

$$
\delta\mathbf{V} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \hline \cosh\Psi & \sinh\Psi & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} ,
$$

$$
\delta\mathbf{A} = \delta\Phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ \hline & & \\ \hline \cosh\Phi & & \sinh\Phi \\ \hline \end{array}
$$

$$
\delta\mathbf{V}\, \mathbf{V}^{-1} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} , \qquad \delta\mathbf{A}\, \mathbf{A}^{-1} = \delta\Phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}
$$

$$
\mathbf{A}\, (\delta\mathbf{V}\, \mathbf{V}^{-1})\, \mathbf{A}^{-1} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\Phi & & \sinh\Phi \\ \hline & 1 & \\ \hline \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ \hline \end{array}
$$

$$
\cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\Phi & & -\sinh\Phi \\ \hline & 1 & \\ \hline -\sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ \hline \end{array}
$$

$$
= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \cosh\Phi & \\ \hline \cosh\Phi & & -\sinh\Phi \\ \hline & \sinh\Phi & \\ \hline \end{array}
$$

$$
\delta\mathbf{U}\, \mathbf{U}^{-1} = \delta\Phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} + \delta\Psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \cosh\Phi & \\ \hline \cosh\Phi & & -\sinh\Phi \\ \hline & \sinh\Phi & \\ \hline \end{array}
$$

Используя эту матрицу, получим

$$
\begin{aligned}
\delta dt =&\ \delta\Phi\, dv + \cosh\Phi\, \delta\Psi\, dx ,\\
\delta dx =&\ \cosh\Phi\, \delta\Psi\, dt - \sinh\Phi\, \delta\Psi\, dv ,\\
\delta dv =&\ \delta\Phi\, dt + \sinh\Phi\, \delta\Psi\, dx .
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и скоростью тела B, рассмотрим дифференциал

$$
\delta\frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} - dx\, \frac{\delta dt}{(dt)^2} .
$$

Используя (30), получим

$$
\delta v = \delta\Psi\, \big((1 - v^2)\, \cosh\Phi - a\, \sinh\Phi\big) - \delta\Phi\, v\, a . \tag{31}
$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и ускорением тела B, рассмотрим дифференциал

$$
\delta\frac{dv}{dt} = \frac{\delta dv}{dt} - dv\, \frac{\delta dt}{dt^2} .
$$

Используя (30), получим

$$
\delta a = (\sinh\Phi - \cosh\Phi\, a)\, v\, \delta\Psi + (1 - a^2)\delta\Phi . \tag{32}
$$

Соотношения (28), (30), (31) определяют преобразования координат, обобщенные на случай ускоренных движений тела B и системы отсчета K', и законы сложения скоростей и ускорений.

Далее рассмотрим решения уравнений (30), (31) для случая, когда ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю. На Рис. 4 показаны вложенные системы отсчета, поясняющие рассматриваемый случай.

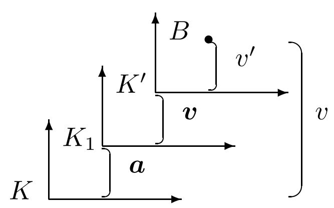

РИС. 4. Вложенные системы отсчета для сложения скоростей в случае **AV** движения системы отсчета K'. Ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K_1 задано относительно системы отсчета K, скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K' задана относительно системы отсчета K_1, скорость v' тела B задана относительно системы отсчета K', скорость v тела B задана относительно системы отсчета K.

1. Закон сложения ускорений

В соответствии с Рис. 1b для **AV** движения равномерно движущаяся система отсчета K' не участвует в определении ускорения $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K_1. Поэтому в этом случае закон сложения ускорений не зависит от скорости v' тела B. На Рис. 5 показаны вложенные системы отсчета, поясняющие закон сложения ускорений.

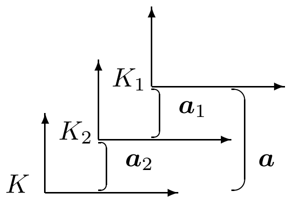

РИС. 5. Вложенные системы отсчета для сложения ускорений в случае **AV** движения системы отсчета K'. Ускорение $\boldsymbol{a}_2$ системы отсчета K_2 задано относительно системы отсчета K, ускорение $\boldsymbol{a}_1$ системы отсчета K_1 задано относительно системы отсчета K_2, ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K_1 задано относительно системы отсчета K.

Для рассматриваемого случая ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю и соответственно его ускорение относительно системы отсчета K ускорению системы отсчета K_1 относительно системы отсчета K, то есть $a = \boldsymbol{a}$. Таким образом, из (31) при начальном условии ($\Phi = 0$, $a = 0$) имеем

$$a = \boldsymbol{a} = \tanh \Phi \,. \tag{33}$$

Отсюда следует ранее рассмотренный закон сложения ускорений.

2. Закон сложения скоростей

Так как для **AV** движения системы отсчета K' скорость v тела B определена по отношению к ускоренно движущейся системе отсчета K_1 (см. Рис. 1b), то закон сложения скоростей, записанный по отношению к системе отсчета K, зависит от ускорения системы отсчета K_1.

Для частного случая, когда ускорение $a = \boldsymbol{a} = 0$ и $\Phi = 0$ уравнение (30) сводится к

$$\delta v = (1 - v^2)\, \delta \Psi \,.$$

Отсюда имеем преобразование Лоренца.

Для произвольного ускорения уравнение (30) с учетом (33) и принятого условия $a = \boldsymbol{a}$ дает

$$v = \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}\, \tanh(\Psi + \psi') \,.$$

Отсюда следует, что максимальное значение скорости равно

$$v_m = \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}$$

или в размерных единицах

$$v_m = c \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}} \,. \tag{34}$$

Отсюда следует, что при наличии ускорения возможная максимальная скорость движения меньше скорости света. В частности, если источник света движется ускоренно относительно системы отсчета K, то скорость света относительно K меньше c и определяется выражением (34).

Постоянную интегрирования ψ' определим из следующих соображений. Будем полагать, что $\psi' = 0$ соответствует случаю, когда скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю и соответственно его скорость относительно системы отсчета K (или K_1) равна скорости движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть $v = \boldsymbol{v}$. И, напротив, будем полагать, что $\Psi = 0$ соответствует случаю, когда скорость движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K равна нулю и соответственно скорость тела B относительно системы отсчета K равна его скорости относительно системы отсчета K', то есть $v = v'$. Таким образом,

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}\, \tanh \Psi \,. \tag{35}$$

$$v' = \sqrt{1 - (a')^2}\, \tanh \psi' \,.$$

Но в рассматриваемом случае ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю, то есть $a' = 0$, поэтому

$$v' = \tanh \psi' \,.$$

Из соотношения (35) следует закон сложения скоростей в общем случае, когда ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K' отлично от нуля:

$$v = \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2} \cdot \frac{\boldsymbol{v} + \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2} v'}{\sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2} + \boldsymbol{v}\, v'}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$v = \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}} \cdot \frac{\boldsymbol{v} + \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}\, v'}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}} + \frac{\boldsymbol{v}\, v'}{c^2}} \,.$$

3. Преобразование дифференциалов координат

Из

$$\tanh \Phi = \boldsymbol{a} \,, \qquad \tanh \Psi = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}}$$

следует

$$\cosh \Phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}} \,, \qquad \sinh \Phi = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}}$$

и

$$\cosh\Psi = \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,, \quad \sinh\Psi = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (29), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned} dt &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dx' + \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,,\\ dx &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dx'\,,\\ dv &= \tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dx' + \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Таким образом мы получили конкретный вид преобразований (29).

Для $v \ll 1$ и $a \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned} dt &= dt' + \boldsymbol{v}\,dx' + \boldsymbol{a}\,dv'\,,\\ dx &= \boldsymbol{v}\,dt' + dx'\,,\\ dv &= \boldsymbol{a}\,dt' + \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dx' + dv'\,. \end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned} dt &= (dt)' + \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,(dx)' + \tfrac{1}{A^2}\,\boldsymbol{a}\,(dv)'\,,\\ dx &= \boldsymbol{v}\,(dt)' + (dx)'\,,\\ dv &= \boldsymbol{a}\,(dt)' + \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,(dx)' + (dv)'\,. \end{aligned}$$

В ньютоновском пределе (при $c \to \infty$ и $A \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dt &= (dt)'\\ dx &= \boldsymbol{v}\,(dt)' + (dx)'\,,\\ dv &= \boldsymbol{a}\,(dt)' + (dv)'\,. \end{aligned}$$

6. Связь с преобразованием Риндлера

Связь между рассматриваемыми преобразованиями и преобразованием Риндлера рассмотрим на примере преобразований для **VA** движения системы отсчета K'. А именно, рассмотрим преобразования (22) для случая, когда

$$dx' = 0\,, \quad dv' = 0\,, \tag{37}$$

то есть, когда тело B неподвижно относительно системы отсчета K'. В этом случае $v = \boldsymbol{v}$, $a = \boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned} dt &= \cosh\Psi\,\cosh\Phi\,dt'\,,\\ dx &= \sinh\Psi\,\cosh\Phi\,dt'\,,\\ dv &= \sinh\Phi\,dt'\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь углы Ψ и Φ связаны со скоростью и ускорением системы отсчета K' следующим образом

$$\tanh\Psi = v\,, \qquad \tanh\Phi = \frac{a}{\sqrt{1-v^2}}\,.$$

Далее рассмотрим преобразования (38) для случая, когда

$$\Psi \approx \tanh\Psi = v\,, \sinh\Phi \approx \tanh\Phi = a\,, \cosh\Phi = 1\,.$$

То есть, по существу для нерелятивистских скоростей и ускорений $a \ll A$.

Преобразования (38) приобретают вид

$$\begin{aligned} dt &= \cosh(v)\,dt'\,,\\ dx &= \sinh(v)\,dt'\,,\\ dv &= a\,dt'\,. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом, что ускорение a постоянно, получим

$$v = a\,t'\,.$$

Используя это соотношение, запишем преобразования следующим образом

$$\begin{aligned} dt &= \cosh(a\,t')\,dt'\,,\\ dx &= \sinh(a\,t')\,dt'\,. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и принимая постоянные интегрирования равными нулю, получим

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{1}{a}\,\sinh(a\,t')\,,\\ x &= \tfrac{1}{a}\,\cosh(a\,t')\,. \end{aligned}$$

Отсюда после перехода к размерным величинам получим

$$\begin{aligned} \tfrac{t}{T} &= \tfrac{A}{a}\,\sinh\left(\tfrac{a}{A}\,\tfrac{t'}{T}\right)\,,\\ \tfrac{x}{R} &= \tfrac{A}{a}\,\cosh\left(\tfrac{a}{A}\,\tfrac{t'}{T}\right)\,. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$A\,T = c\,, \qquad R\,A = (c\,T)\,A = c^2\,,$$

получим преобразования Риндлера в следующем виде

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{c}{a}\,\sinh\left(\tfrac{a\,t'}{c}\right)\,,\\ x &= \tfrac{c^2}{a}\,\cosh\left(\tfrac{a\,t'}{c}\right)\,. \end{aligned}$$

Заметим, что, как это и необходимо для преобразований Риндлера, время t' совпадает с собственным временем x^0/c с точностью до постоянной величины, так как в силу (37)

$$(dx^0)^2 = c^2\,(dt')^2\,.$$

7. Равноускоренное движение

Рассмотрим теперь равноускоренное движение. Как и прежде с целью упрощения дальнейших преобразований перейдем к безразмерным координатам.

Для этого квадрат интервала (14) разделим на R^2 и выполним следующие переобозначения

$$\frac{dx^0}{R} \to dx^0\,, \quad \frac{dt}{T} \to dt\,, \quad \frac{dx}{R} \to dx\,, \quad \frac{dv}{c} \to dv\,.$$

Получим квадрат дифференциала интервала в следующем виде

$$(dx^0)^2 = dt^2 - dx^2 - dv^2\,.$$

Линейное преобразование в пространстве дифференциалов координат

$$||dx|| = \mathrm{U}\,||dx'||\,, \tag{39}$$

сохраняющее квадрат интервала, есть поворот. Здесь подобно Разделу 1.1 выражение вида $||dx||$ это столбец из дифференциалов dt, dx и dv, а U – матрица поворота в некоторой плоскости рассматриваемого пространства. В частности, поворот в псевдоплоскости (dt, dx), представленный матрицей

$$\mathrm{V} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\psi & \sinh\psi & \\ \hline \sinh\psi & \cosh\psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}\quad ,$$

соответствует равномерному движению системы отсчета.

Поворот в псевдоплоскости (dt, dv), представленный матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\phi & & \sinh\phi \\ \hline & 1 & \\ \hline \sinh\phi & & \cosh\phi \\ \hline \end{array}\quad ,$$

соответствует ускоренному движению системы отсчета в начале движения.

Кроме того поворот в плоскости (dx, dv), представленный матрицей

$$\mathrm{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \cos\tau & \sin\tau \\ \hline & -\sin\tau & \cos\tau \\ \hline \end{array}\quad ,$$

также сохраняет квадрат интервала. Смысл этого преобразования пока оставим невыясненным. Вышеуказанные три матрицы являются по нашему определению матрицами базисных поворотов.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы из всех поворотов U выделить такой, который соответствует равноускоренному движению системы отсчета.

Произвольное линейное преобразование U, сохраняющее квадрат интервала, представляет собой поворот в произвольной плоскости в трехмерном пространстве (dt, dx, dv) на угол θ. Матрица поворота может быть записана в следующем виде

$$\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta \cdot K_\theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\theta \cdot K_\theta) + \frac{1}{2!}\,(\theta \cdot K_\theta)^2 + \ldots\,, \tag{40}$$

где

$$K_\theta = \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\Big|_{\theta=0}$$

– генератор поворота. Матрица поворота удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению *

$$\delta\mathrm{U}(\theta) = \delta\theta \cdot K_\theta \cdot \mathrm{U}(\theta)\,, \tag{41}$$

В частности вышеуказанным соотношениям удовлетворяют базисные матрицы поворотов V, A, T. Им соответствуют следующие генераторы поворотов

$$K_\psi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\,, \quad K_\phi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}\,, \quad K_\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline \end{array}$$

Для того, чтобы установить связь между углами ψ и ϕ и скоростью $v = dx/dt$ и ускорением $a = dv/dt$ тела B, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов ψ, ϕ и τ в соответствии с уравнениями структуры:

$$\delta||dx|| = (\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1})\,||dx||\,. \tag{42}$$

Из соотношения (45) следует

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\theta \cdot K_\theta\,. \tag{43}$$

Выразим $\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}$ через матрицы поворотов в базисных плоскостях †

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\mathrm{V}\,\mathrm{V}^{-1} + \delta\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} + \delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1}\,. \tag{44}$$

Здесь

$$\delta\mathrm{V}\,\mathrm{V}^{-1} = \delta\psi\,K_\psi = \delta\psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$\delta\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} = \delta\phi\,K_\phi = \delta\phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

---

*Как и прежде при дифференцировании по углу дифференциал будем обозначать δ.

†Матрица вращений относительно произвольной оси выражается через матрицы вращений относительно базисных плоскостей следующим образом

$$\mathrm{U} = \frac{1}{6}(\mathrm{VAT} + \mathrm{ATV} + \mathrm{TVA} + \mathrm{VTA} + \mathrm{AVT} + \mathrm{TAV})$$

Только в этом случае указанное представление не зависит от порядка представляющих матриц, как это следует из (44).

$$\delta \mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1} = \delta\tau\, K_\tau = \delta\tau \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline \end{array}$$

Рассматривая функции $\psi(\theta)$, $\phi(\theta)$, $\tau(\theta)$ как линейные, введем соотношения

$$\delta\psi = \delta\theta\, C^\psi, \quad \delta\phi = \delta\theta\, C^\phi, \quad \delta\tau = \delta\theta\, C^\tau\,. \tag{45}$$

Здесь C^ψ, C^ϕ, C^τ – "направляющие косинусы", постоянные величины, определяющие положение произвольной плоскости относительно базисных плоскостей. Они удовлетворяют условию

$$(C^\psi)^2 + (C^\phi)^2 - (C^\tau)^2 = 1\,. \tag{46}$$

Соотношения (43), (44) и (45) позволяют выразить генератор произвольного поворота через генераторы базисных поворотов

$$K_\theta = C^\psi\, K_\psi + C^\phi\, K_\phi + C^\tau\, K_\tau\,. \tag{47}$$

Используя это соотношение, запишем уравнения структуры (42) в следующем виде

$$\delta||dx|| = \delta \mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}\,||dx|| = \delta\theta \begin{array}{|c|c|c|}\hline & C^\psi & C^\phi \\ \hline C^\psi & & C^\tau \\ \hline C^\phi & -C^\tau & \\ \hline \end{array} ||dx||\,.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \delta dt &= \delta\theta\,(C^\psi\, dx + C^\phi\, dv)\,, \\ \delta dx &= \delta\theta\,(C^\psi\, dt + C^\tau\, dv)\,, \\ \delta dv &= \delta\theta\,(C^\phi\, dt - C^\tau\, dx)\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Для того, чтобы установить связь между углами ψ, ϕ и τ с одной стороны и скоростью и ускорением тела B с другой, рассмотрим дифференциал

$$\delta v = \delta\frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} - v\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя (48), получим

$$\delta v = \delta\theta\, \left(C^\psi\,(1-v^2) + C^\tau\, a - C^\phi\, v\, a\right)\,, \tag{49}$$

где введено обозначение $a = dv/dt$.

Аналогично рассмотрим дифференциал

$$\delta a = \delta\frac{dv}{dt} = \frac{\delta dv}{dt} - a\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя (48), получим

$$\delta a = \delta\theta\, \left(C^\phi\,(1-a^2) - C^\tau\, v - C^\psi\, v\, a\right)\,, \tag{50}$$

Кроме того рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{dx}{dv} = \delta\frac{v}{a}\,.$$

Используя соотношение

$$v = a\,t\,,$$

его можно записать

$$\delta\frac{dx}{dv} = \delta t\,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta t = \frac{\delta dx}{dv} - t\,\frac{\delta dv}{dv}\,.$$

Используя (48), получим

$$\delta t = \delta\theta\, \left(C^\psi\,\frac{1}{a} + C^\tau + t\,(-C^\phi\,\frac{1}{a} + C^\tau\, t)\right)\,, \tag{51}$$

Для равноускоренного движения должно выполняться

$$\delta v = a\,\delta t\,, \qquad \delta a = 0\,.$$

Подставляя в первое соотношение (49) и (51), получим

$$\begin{gathered} C^\psi\,(1-v^2) + C^\tau\, a - C^\phi\, v\, a = \\ a\,\left(C^\psi\,\tfrac{1}{a} + C^\tau + t\,(-C^\phi\,\tfrac{1}{a} + C^\tau\, t)\right)\,, \end{gathered}$$

или

$$C^\phi\,(1-a^2) - C^\tau\, v - C^\psi\, a\, v = 0\,. \tag{52}$$

Это же соотношение следует из условия $\delta a = 0$.

Таким образом, для равноускоренного движения вытекает условие, накладываемое на "направляющие косинусы". Значения "направляющих косинусов" определяются значениями скорости и ускорения. В частности для равномерного движения, когда $a = 0$, должно выполняться

$$C^\phi = 0\,, \quad C^\tau = 0\,, \quad C^\psi = 1\,.$$

Эти соотношения будут следствием (52) и (46), если положить

$$C^\phi = 0\,, \qquad C^\tau\, v + C^\psi\, a\, v = 0\,.$$

Таким образом имеем следующую систему уравнений для определения C^τ и C^ψ.

$$\begin{gathered} C^\tau\, v + C^\psi\, a\, v = 0 \\ (C^\psi)^2 - (C^\tau)^2 = 1\,. \end{gathered}$$

Она имеет следующее решение

$$C^\psi = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\,, \quad C^\tau = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\,.$$

* Таким образом, мы определили "направляющие косинусы" и можем, используя выражение (47), вычислить генератор группы ускоренных движений

$$K_\theta = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & -a \\ \hline & a & \\ \hline \end{array}$$

*Другое решение отличается от указанного знаком.

Зная генератор K_θ, на основании (40) можно вычислить матрицу преобразования координат при ускоренном движении. Так как

$$(K_\theta)^3 = K_\theta\,, \quad (K_\theta)^4 = (K_\theta)^2\,,$$

то матрица U выражается через гиперболические функции

$$\mathrm{U} = \Delta - (K_\theta)^2 + (K_\theta)^2\,\cosh\theta + K_\theta\,\sinh\theta\,.$$

Или

$$\mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array} \quad - \frac{1}{1-a^2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & -a \\ \hline & 1-a^2 & \\ \hline a & & -a^2 \\ \hline\end{array} \quad +$$

$$+\frac{1}{1-a^2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & -a \\ \hline & 1-a^2 & \\ \hline a & & -a^2 \\ \hline\end{array}\cosh\theta \quad +$$

$$+ \quad \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & -a \\ \hline & a & \\ \hline\end{array}\sinh\theta\,. \tag{53}$$

Теперь установим связь между параметрами ускоренного движения и углом θ. Для этого можно воспользоваться либо соотношением (49), либо (51). Мы остановимся на (49). Имеем

$$\delta v = \delta\theta\,\left(C^\psi\,(1-v^2) + C^\tau\,a\right)\,.$$

Отсюда получим

$$\delta\frac{v}{\sqrt{1-a^2}} = \delta\theta\,\left(1 - \frac{v^2}{1-a^2}\right)\,.$$

Из этого уравнения имеем

$$\frac{v}{\sqrt{1-a^2}} = \tanh\theta\,.$$

1. *Преобразование дифференциалов координат*

Соотношения (22), (24) и (25) определяют преобразования координат, обобщенные на случай ускоренных движений тела B и системы отсчета K', и законы сложения скоростей и ускорений. Из последнего соотношения следует

$$\begin{aligned}\cosh\theta &= \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,,\\ \sinh\theta &= \tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,.\end{aligned}$$

Подставляя полученные величины в уравнение (39), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned}dt = &\left(1 - \tfrac{1}{1-\boldsymbol{a}^2} + \tfrac{1}{1-\boldsymbol{a}^2}\,\tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\right)\,dt'\\ &+\tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dx' +\\ &\left(\tfrac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2} - \tfrac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2}\,\tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\right)\,dv'\,,\\ dx = &\tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dx'\\ &-\tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,,\\ dv = &\left(-\tfrac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2} + \tfrac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2}\,\tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\right)\,dt'\\ &+\tfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dx'\\ &+\left(1 + \tfrac{\boldsymbol{a}^2}{1-\boldsymbol{a}^2} - \tfrac{\boldsymbol{a}^2}{1-\boldsymbol{a}^2}\,\tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\right)\,dv'\,.\end{aligned} \tag{54}$$

Таким образом мы получили конкретный вид преобразований (39).

Для $v \ll 1$ и $a \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned}dt &= \ dt' + \boldsymbol{v}\,dx'\,,\\ dx &= \ \boldsymbol{v}\,dt' + dx' - \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dv'\,,\\ dv &= \ \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dx' + dv'\,.\end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned}dt \ &= dt' + \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,dx'\,,\\ dx \ &= \boldsymbol{v}\,dt' + dx' - \tfrac{1}{A^2}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dv'\,,\\ dv \ &= \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dx' + dv'\,.\end{aligned}$$

В ньютоновском пределе (при $c \to \infty$ и $A \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}dt \ &= dt'\,,\\ dx \ &= \boldsymbol{v}\,dt' + dx'\,,\\ dv \ &= dv'\,.\end{aligned}$$

III. РАВНОМЕРНОЕ ПЛОСКОЕ ВРАЩЕНИЕ

Рассмотрим частный вектор в пространстве–времени лептона

$$dx = \mathcal{E}_0\,dx^0 + \mathcal{E}_4\,c\,dt + \mathcal{E}_{21}\,R\,d\varphi^{21}\,.$$

Для квадрата интервала этого вектора имеем

$$(dx^0)^2 = c^2\,dt^2 + R^2\,(d\varphi)^2\,.$$

Зададим линейные преобразования вектора в следующем виде

$$\begin{aligned}||dx|| &= \Omega\,||dx'||\,,\\ \Omega &= \boldsymbol{\Omega}\cdot\Omega'\,,\end{aligned}$$

где выражение вида $||dx||$ это столбец из дифференциалов $c\,dt$ и $R\,d\varphi$, а Ω, $\boldsymbol{\Omega}$, Ω' – матрицы преобразований. Для того, чтобы преобразование $\boldsymbol{\Omega}$ сохраняло $(dx^0)^2$, оно должно быть *поворотом* в евклидовой плоскости $(c\,dt, R\,d\varphi)$. То есть, необходимо положить

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cos\Psi & -\sin\Psi \\ \hline \sin\Psi & \cos\Psi \\ \hline\end{array}$$

и

$$
\begin{aligned}
c\,dt &= \cos\Psi\, c\,(dt)' - \sin\Psi\, R\,(d\varphi)'\,,\\
R\,d\varphi &= \sin\Psi\, c\,(dt)' + \cos\Psi\, R\,(d\varphi)'\,,
\end{aligned}
\qquad (55)
$$

где Ψ – угол поворота в указанной плоскости. Причем этот угол как-то связан с параметрами движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K. Связь между углом Ψ и параметрами движения системы отсчета K' найдем из уравнения структуры группы преобразований *.

$$
\delta||dx|| = (\delta\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\Omega}^{-1})\,||dx||\,.
$$

Далее с помощью уравнения структуры получим искомые преобразования координат. Итак, в нашем случае

$$
\delta\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline -\sin\Psi & -\cos\Psi \\ \hline \cos\Psi & -\sin\Psi \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \cos\Psi & \sin\Psi \\ \hline -\sin\Psi & \cos\Psi \\ \hline \end{array}
$$

$$
= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}
$$

и

$$
\begin{aligned}
c\,\delta dt &= -\delta\Psi\, R\, d\varphi\,,\\
R\,\delta d\varphi &= \delta\Psi\, c\, dt\,.
\end{aligned}
\qquad (56)
$$

Используя эти соотношения, вычислим ту часть изменения угловой скорости тела B относительно системы отсчета K, которая вызвана изменением параметров движения системы отсчета K', связанных с углом Ψ.

$$
\delta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\delta d\varphi}{dt} - d\varphi\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.
$$

Учитывая (56), получим

$$
\delta\frac{\omega}{\Omega} = \delta\Psi\,\left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)\,. \qquad (57)
$$

Здесь

$$
\Omega = \frac{c}{R}
$$

– постоянная величина, имеющая размерность угловой скорости. Отсюда имеем

$$
\omega = \Omega\,\tan(\Psi + \psi')\,, \qquad (58)
$$

где ψ' – постоянная интегрирования. Это соотношение будем истолковывать следующим образом. Будем полагать, что $\Psi = 0$ соответствует случаю, когда система отсчета K' неподвижна относительно системы отсчета K и соответственно угловая скорость тела B относительно системы отсчета K равна его угловой скорости относительно системы отсчета K', то есть

$$
\omega = \Omega\,\tan\psi' = \omega'.
$$

Когда угол $\psi' = 0$ угловая скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю и соответственно его угловая скорость относительно системы отсчета K равна угловой скорости вращения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть

$$
\omega = \Omega\,\tan\Psi = \boldsymbol{\omega}.
$$

В результате мы решили поставленную задачу: угол Ψ связан только с угловой скоростью вращения системы отсчета K' и следующим образом

$$
\boldsymbol{\omega} = \Omega\,\tan\Psi\,. \qquad (59)
$$

Теперь, используя (59), получим

$$
\cos\Psi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\Omega^2}}}\,, \qquad \sin\Psi = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\Omega\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\Omega^2}}}\,.
$$

Искомое соотношение между дифференциалами координат тела B в системах отсчета K и K' примет вид

$$
dt = \frac{dt' - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\Omega^2}\,d\varphi'}{\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\Omega^2}}}\,, \qquad d\varphi = \frac{\boldsymbol{\omega}\,dt' + d\varphi'}{\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\Omega^2}}}\,. \qquad (60)
$$

А из (59) следует закон сложения угловых скоростей

$$
\omega = \frac{\boldsymbol{\omega} + \omega'}{1 - \frac{\boldsymbol{\omega}\,\omega'}{\Omega^2}}\,. \qquad (61)
$$

Этот закон корреспондируется с преобразованием дифференциалов угла и времени. Замечательное свойство приведенного закона сложения состоит в том, что в отличие от сложения скоростей и ускорений, сложение угловых скоростей не ограничено фундаментальной угловой скоростью Ω, а при сложении угловых $\boldsymbol{\omega}$ и ω', близких к Ω, закон сложения имеет особенность. Возможно этим обстоятельством может быть объяснен принцип Паули.

IV. УСКОРЕННОЕ ПЛОСКОЕ ВРАЩЕНИЕ

Рассмотрим частный вектор в пространстве–времени лептона

$$
dx = \mathcal{E}_0\,dx^0 + \mathcal{E}_4\,c\,dt + \mathcal{E}_{21}\,R\,d\varphi^{21} + \mathcal{E}_{124}\,\frac{R\,d\omega^{12}}{\Omega}\,.
$$

Множество таких векторов составляет подалгебру алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$, которую назовем алгеброй

*Сравните Раздел I.1

ускоренных вращений. Для квадрата интервала этого вектора имеем

$$(dx^0)^2 = c^2\, dt^2 + R^2\,(d\varphi)^2 - \frac{R^2}{(\Omega)^2}\,(d\omega)^2\,.$$

С целью упрощения дальнейших преобразований перейдем к безразмерным координатам. Для этого квадрата интервала (14) разделим на R^2 и выполним следующие переобозначения

$$\frac{dx^0}{R} \to dx^0\,, \quad \frac{dt}{T} \to dt\,, \quad d\varphi \to d\varphi\,, \quad \frac{d\omega}{\Omega} \to d\omega\,.$$

Получим квадрат интервала в следующем виде

$$(dx^0)^2 = dt^2 + (d\varphi)^2 - (d\omega)^2\,.$$

Поворот в пространстве дифференциалов координат

$$||dx|| = \mathrm{U}\,||dx'|| \tag{62}$$

сохраняет квадрат интервала. Здесь подобно Разделу 1.1 выражение вида $||dx||$ это столбец из дифференциалов dt, $d\varphi$ и $d\omega$, а U – матрица поворота в некоторой плоскости рассматриваемого пространства. В частности, поворот в плоскости $(dt, d\varphi)$

$$\Omega = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\psi & -\sin\psi & \\ \hline \sin\psi & \cos\psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array}$$

соответствует равномерному вращению системы отсчета K'. Поворот в псевдоплоскости $(dt, d\omega)$

$$\mathrm{E} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\phi & & \sinh\phi \\ \hline & 1 & \\ \hline \sinh\phi & & \cosh\phi \\ \hline\end{array}$$

соответствует ускоренному вращению системы отсчета K'.

Поворот в псевдоплоскости $(d\varphi, d\omega)$

$$\mathrm{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \cosh\tau & \sinh\tau \\ \hline & \sinh\tau & \cosh\tau \\ \hline\end{array}$$

также сохраняет квадрат интервала.

Произвольное преобразование U, сохраняющее квадрат интервала, представляет собой поворот в произвольной плоскости в трехмерном пространстве $(dt, d\varphi, d\omega)$ на угол θ. Матрица поворота записывается в следующем виде [*]

$$\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta \cdot K_\theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\theta \cdot K_\theta) + \frac{1}{2!}\,(\theta \cdot K_\theta)^2 + \ldots\,, \tag{63}$$

где

$$K_\theta = \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\Big|_{\theta=0}$$

– генератор поворота. Матрица поворота удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [†]

$$\delta\mathrm{U}(\theta) = \delta\theta \cdot K_\theta \cdot \mathrm{U}(\theta)\,, \tag{64}$$

В частности вышеуказанным соотношениям удовлетворяют матрицы поворотов Ω, E, T. Им соответствуют следующие генераторы поворотов

$$K_\psi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,, \quad K_\phi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}\,, \quad K_\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array}$$

Для того, чтобы установить связь между углами ψ, ϕ и τ с одной стороны и угловой скоростью $\omega = d\varphi/dt$ и угловым ускорением $\varepsilon = d\omega/dt$ тела B с другой, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов в соответствии с уравнениями структуры группы преобразований:

$$\delta||dx|| = (\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1})\,||dx||\,. \tag{65}$$

Из соотношения (64) следует

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\theta \cdot K_\theta\,. \tag{66}$$

Выразим $\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}$ через матрицы поворотов в базисных плоскостях

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\Omega\,\Omega^{-1} + \delta\mathrm{E}\,\mathrm{E}^{-1} + \delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1}\,. \tag{67}$$

Здесь

$$\delta\Omega\,\Omega^{-1} = \delta\psi\,K_\psi = \delta\psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

$$\delta\mathrm{E}\,\mathrm{E}^{-1} = \delta\phi\,\mathrm{K}_\phi = \delta\phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}$$

$$\delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1} = \delta\tau\,K_\tau = \delta\tau \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array}$$

Рассматривая функции $\psi(\theta)$, $\phi(\theta)$, $\tau(\theta)$ как линейные, введем соотношения

$$\delta\psi = \delta\theta\,C^\psi\,, \quad \delta\phi = \delta\theta\,C^\phi\,, \quad \delta\tau = \delta\theta\,C^\tau\,. \tag{68}$$

[*] См. Раздел IB.

[†] Как и прежде при дифференцировании по углу дифференциал будем обозначать δ.

Здесь C^ψ, C^ϕ, C^τ – "направляющие косинусы", постоянные величины, определяющие положение произвольной плоскости относительно базисных плоскостей. Они удовлетворяют условию

$$(C^\psi)^2 - (C^\phi)^2 - (C^\tau)^2 = 1\,. \tag{69}$$

Соотношения (66), (67) и (68) позволяют выразить генератор произвольного поворота через генераторы базисных поворотов

$$K_\theta = C^\psi\, K_\psi + C^\phi\, K_\phi + C^\tau\, K_\tau\,. \tag{70}$$

Используя это соотношение, запишем уравнение структуры (65) в следующем виде

$$\delta||dx|| = \delta \mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}\,||dx|| = \delta\theta \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -C^\psi & C^\phi \\ \hline C^\psi & & C^\tau \\ \hline C^\phi & C^\tau & \\ \hline \end{array} ||dx||$$

Используя эту матрицу, получим

$$\begin{aligned} \delta dt &= \delta\theta\,(-C^\psi\, d\varphi + C^\phi\, d\omega)\,, \\ \delta d\varphi &= \delta\theta\,(C^\psi\, dt + C^\tau\, d\omega)\,, \\ \delta d\omega &= \delta\theta\,(C^\phi\, dt + C^\tau\, d\varphi)\,. \end{aligned} \tag{71}$$

Для того, чтобы установить связь между углами ψ, ϕ и τ и угловой скоростью тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\omega = \delta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\delta d\varphi}{dt} - \omega\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя (71), получим

$$\delta\omega = \delta\theta\,\left(C^\psi\,(1+\omega^2) + C^\tau\,\varepsilon - C^\phi\,\omega\,\varepsilon\right)\,, \tag{72}$$

где введено обозначение $\varepsilon = d\omega/dt$.

Аналогично рассмотрим дифференциал

$$\delta\varepsilon = \delta\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta d\omega}{dt} - \varepsilon\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя (71), получим

$$\delta\varepsilon = \delta\theta\,\left(C^\phi\,(1-\varepsilon^2) + C^\tau\,\omega + C^\psi\,\omega\,\varepsilon\right)\,, \tag{73}$$

Кроме того рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{d\varphi}{d\omega} = \delta\frac{\omega}{\varepsilon}\,.$$

Используя соотношение

$$\omega = \varepsilon\, t\,,$$

его можно записать

$$\delta\frac{d\varphi}{d\omega} = \delta t\,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta t = \frac{\delta d\varphi}{d\omega} - t\,\frac{\delta d\omega}{d\omega}\,.$$

Используя (71), получим

$$\delta t = \delta\theta\,\left(C^\psi\,\tfrac{1}{\varepsilon} + C^\tau - t\,(C^\phi\,\tfrac{1}{\varepsilon} + C^\tau\, t)\right)\,, \tag{74}$$

Для равноускоренного движения должно выполняться

$$\delta\omega = \varepsilon\,\delta t\,, \qquad \delta\varepsilon = 0\,.$$

Подставляя в первое соотношение (72) и (74), получим

$$\begin{aligned} &C^\psi\,(1+\omega^2) + C^\tau\,\varepsilon - C^\phi\,\omega\,\varepsilon = \\ &\quad \varepsilon\,\left(C^\psi\,\tfrac{1}{\varepsilon} + C^\tau - t\,(C^\phi\,\tfrac{1}{\varepsilon} + C^\tau\, t)\right)\,, \end{aligned}$$

или

$$C^\phi\,(1-\varepsilon^2) + C^\tau\,\omega + C^\psi\,\varepsilon\,\omega = 0\,. \tag{75}$$

Это же соотношение следует из условия $\delta\varepsilon = 0$. Оно представляет собой условие, накладываемое на "направляющие косинусы" для равноускоренного движения. Значения "направляющих косинусов" определяются значениями угловых скорости и ускорения. В частности для равномерного вращения, когда $\varepsilon = 0$, должно выполняться

$$C^\phi = 0\,, \quad C^\tau = 0\,, \quad C^\psi = 1\,.$$

Эти соотношения будут следствием (69) и (93), если положить

$$C^\phi = 0\,, \qquad C^\tau\,\omega + C^\psi\,\varepsilon\,\omega = 0\,.$$

Таким образом имеем следующую систему уравнений для определения C^τ и C^ψ.

$$\begin{gathered} C^\tau\,\omega + C^\psi\,\varepsilon\,\omega = 0 \\ (C^\psi)^2 - (C^\tau)^2 = 1\,. \end{gathered}$$

Она имеет следующее решение

$$C^\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,, \quad C^\tau = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,.$$

[*] результате мы определили "направляющие косинусы" и можем, используя выражение (70), вычислить генератор группы ускоренных движений

$$K_\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & -\varepsilon \\ \hline & -\varepsilon & \\ \hline \end{array}$$

Зная генератор K_θ, на основании (63) можно вычислить матрицу преобразования координат при ускоренном движении. Так как

$$(K_\theta)^3 = -K_\theta\,, \quad (K_\theta)^4 = -(K_\theta)^2\,,$$

[*] Другое решение отличается от указанного знаком.

то эта матрица выражается через тригонометрические функции

$$\mathrm{U} = \Delta + (K_\theta)^2 - (K_\theta)^2 \, \cos\theta + K_\theta \, \sin\theta \,. \tag{76}$$

Или

$$\mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \quad + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & & \varepsilon \\ \hline & -1+\varepsilon^2 & \\ \hline -\varepsilon & & \varepsilon^2 \\ \hline \end{array} \quad -$$

$$-\frac{1}{1-\varepsilon^2} \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & & \varepsilon \\ \hline & -1+\varepsilon^2 & \\ \hline -\varepsilon & & \varepsilon^2 \\ \hline \end{array} \cos\theta \quad +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & -\varepsilon \\ \hline & -\varepsilon & \\ \hline \end{array} \sin\theta$$

Теперь установим связь между параметрами ускоренного движения и углом θ. Для этого можно воспользоваться либо соотношением (73), либо (72). Мы остановимся на последнем. Имеем

$$\delta\omega = \delta\theta \, \left(C^\psi \, (1+\omega^2) + C^\tau \, \varepsilon \right) \,.$$

Отсюда получим

$$\delta \frac{\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \delta\theta \, \left(1 + \frac{\omega^2}{1-\varepsilon^2} \right) \,.$$

Из этого уравнения имеем

$$\frac{\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \tan\theta \,. \tag{77}$$

1. Преобразование дифференциалов координат

Соотношения (62), (76) и (77) определяют преобразования координат, обобщенные на случай ускоренных вращений тела B и системы отсчета K', и законы сложения угловых скоростей и ускорений. Из последнего соотношения следует

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \,, \\ \sin\theta &= \tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \,. \end{aligned}$$

Подставляя полученные величины в уравнение (62), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned} dt = {} & \left(1 - \tfrac{1}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} + \tfrac{1}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} \, \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right) \, dt' \\ & -\tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, d\varphi' + \\ & \left(\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} - \tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} \, \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right) \, d\omega' \,, \\ d\varphi = {} & \tfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, dt' + \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, d\varphi' \\ & -\tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, dv' \,, \\ d\omega = {} & \left(-\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} + \tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} \, \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right) \, dt' \\ & -\tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, d\varphi' \\ & + \left(1 + \tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} - \tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} \, \tfrac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right) \, d\omega' \,. \end{aligned} \tag{78}$$

Таким образом мы получили конкретный вид преобразований (62).

Для $\omega \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned} dt = {} & dt' - \boldsymbol{\omega} \, d\varphi' \,, \\ d\varphi = {} & \boldsymbol{\omega} \, dt' + d\varphi' - \boldsymbol{\omega} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, d\omega' \,, \\ d\omega = {} & \; - \boldsymbol{\omega} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, d\varphi' + d\omega' \,. \end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned} dt &= dt' - \tfrac{1}{\Omega^2} \, \boldsymbol{\omega} \, d\varphi' \,, \\ d\varphi &= \boldsymbol{\omega} \, dt' + d\varphi' - \tfrac{1}{\mathrm{E}^2} \, \boldsymbol{\omega} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, d\omega' \,, \\ d\omega &= -\tfrac{1}{\Omega^2} \, \boldsymbol{\omega} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, d\varphi' + d\omega' \,. \end{aligned}$$

В ньютоновском пределе (при $\Omega \to \infty$ и $\mathrm{E} \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dt &= dt' \,, \\ d\varphi &= \boldsymbol{\omega} \, dt' + d\varphi' \,, \\ d\omega &= d\omega' \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \, dt' \,. \end{aligned}$$

V. УСКОРЕННОЕ ТЕЛЕСНОЕ ВРАЩЕНИЕ

Рассмотрим частный вектор в пространстве–времени лептона

$$dx = \mathcal{E}_0 \, dx^0 + \mathcal{E}_4 \, c \, dt + \mathcal{E}_{123} \, R \, d\varphi^{123} + \mathcal{E}_{1324} \, \frac{R \, d\omega^{132}}{\Omega_T} \,.$$

Множество таких векторов составляет подалгебру алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$. Назовем ее алгеброй ускоренных телесных вращений. Для квадрата интервала этого вектора имеем

$$(dx^0)^2 = c^2 \, dt^2 + R^2 \, (d\varphi)^2 + \frac{R^2}{(\Omega_T)^2} \, (d\omega)^2 \,.$$

С целью упрощения дальнейших преобразований перейдем к безразмерным координатам. Для этого квадрата интервала (14) разделим на R^2 и выполним следующие переобозначения

$$\frac{dx^0}{R} \to dx^0 \,, \quad \frac{dt}{T} \to dt \,, \quad d\varphi \to d\varphi \,, \quad \frac{d\omega}{\Omega_T} \to d\omega \,.$$

Получим квадрат интервала в следующем виде

$$(dx^0)^2 = dt^2 + d\varphi^2 + d\omega^2 \,.$$

Поворот в пространстве дифференциалов координат

$$||dx|| = \mathrm{U}\,||dx'|| \tag{79}$$

сохраняет квадрат интервала. Здесь подобно Разделу 1.1 выражение вида $||dx||$ это столбец из дифференциалов dt, $d\varphi$ и $d\omega$, а U – матрица поворота в некоторой плоскости рассматриваемого пространства. В частности, поворот в плоскости $(dt, d\varphi)$

$$\Omega = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\psi & -\sin\psi & \\ \hline \sin\psi & \cos\psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array}$$

соответствует равномерному вращению системы отсчета K'. Поворот в плоскости $(dt, d\omega)$

$$\mathrm{E} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\phi & & \sin\phi \\ \hline & 1 & \\ \hline -\sin\phi & & \cos\phi \\ \hline\end{array}$$

соответствует ускоренному вращению системы отсчета K'.

Поворот в плоскости $(d\varphi, d\omega)$

$$\mathrm{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \cos\tau & -\sin\tau \\ \hline & \sin\tau & \cos\tau \\ \hline\end{array}$$

также приводит к сохранению квадрата интервала.

Отсюда следует, что группа ускоренных телесных вращений изоморфна группе поворотов в трехмерном пространстве $O(3)$. Это обстоятельство мы используем в Лекции 17 для формулировки электрослабого взаимодействия.

Произвольное преобразование U, сохраняющее квадрат интервала, представляет собой поворот в произвольной плоскости в трехмерном пространстве $(dt, d\varphi, d\omega)$ на угол θ. Матрицу поворота можно записать в следующем виде

$$\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta \cdot K_\theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\theta \cdot K_\theta) + \frac{1}{2!}\,(\theta \cdot K_\theta)^2 + \dots, \tag{80}$$

где

$$K_\theta = \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}_{\,\theta=0}$$

– генератор поворота. Матрица поворота удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\delta\mathrm{U}(\theta) = \delta\theta \cdot K_\theta \cdot \mathrm{U}(\theta)\,, \tag{81}$$

В частности вышеуказанным соотношениям удовлетворяют матрицы поворотов Ω, E, T. Им соответствуют следующие генераторы поворотов

$$K_\psi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,, \quad K_\phi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline -1 & & \\ \hline\end{array}\,, \quad K_\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline\end{array}$$

Для того, чтобы установить связь между углами ψ, ϕ и τ с одной стороны и телесной угловой скоростью $\omega = dx/dt$ и телесным угловым ускорением $\varepsilon = d\omega/dt$ тела B с другой стороны, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов ψ, ϕ и τ, обусловленное уравнениями структуры группы преобразований

$$\delta||dx|| = (\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1})\,||dx||\,. \tag{82}$$

Из соотношения (81) следует

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\theta \cdot K_\theta\,. \tag{83}$$

Выразим $\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}$ через матрицы поворотов в базисных плоскостях

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\Omega\,\Omega^{-1} + \delta\mathrm{E}\,\mathrm{E}^{-1} + \delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1}\,. \tag{84}$$

Здесь

$$\delta\Omega\,\Omega^{-1} = \delta\psi\,K_\psi = \delta\psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

$$\delta\mathrm{E}\,\mathrm{E}^{-1} = \delta\phi\,\mathrm{K}_\phi = \delta\phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}$$

$$\delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1} = \delta\tau\,K_\tau = \delta\tau \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline\end{array} \tag{85}$$

Рассматривая функции $\psi(\theta)$, $\phi(\theta)$, $T(\theta)$ как линейные, введем соотношения

$$\delta\psi = \delta\theta\,C^\psi\,, \quad \delta\phi = \delta\theta\,C^\phi\,, \quad \delta\tau = \delta\theta\,C^\tau\,.$$

Здесь C^ψ, C^ϕ, C^τ – "направляющие косинусы", постоянные величины, определяющие положение произвольной плоскости относительно базисных плоскостей. Они удовлетворяют условию

$$(C^\psi)^2 + (C^\phi)^2 + (C^\tau)^2 = 1\,. \tag{86}$$

Соотношения (83), (84) и (85) позволяют выразить генератор произвольного поворота через генераторы базисных поворотов

$$K_\theta = C^\psi\,K_\psi + C^\phi\,K_\phi + C^\tau\,K_\tau\,. \tag{87}$$

Используя это соотношение, запишем выражение (82) в следующем виде

$$\delta||dx|| = \delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}\,||dx|| = \delta\theta \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -C^\psi & C^\phi \\ \hline C^\psi & & -C^\tau \\ \hline -C^\phi & C^\tau & \\ \hline\end{array}\,||dx||\,.$$

Используя эту матрицу, получим

$$\begin{aligned} \delta dt &= \delta\theta\,(-C^{\psi}\,d\varphi + C^{\phi}\,d\omega)\,, \\ \delta d\varphi &= \delta\theta\,(C^{\psi}\,dt - C^{\tau}\,d\omega)\,, \\ \delta d\omega &= \delta\theta\,(-C^{\phi}\,dt + C^{\tau}\,d\varphi)\,. \end{aligned} \tag{88}$$

Для того, чтобы установить связь между углами ψ и ϕ и скоростью тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\omega = \delta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\delta d\varphi}{dt} - \omega\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя (88), получим

$$\delta\omega = \delta\theta\,\left(C^{\psi}\,(1+\omega^2) - C^{\tau}\,\varepsilon - C^{\phi}\,\omega\,\varepsilon\right)\,, \tag{89}$$

где введено обозначение $\varepsilon = d\omega/dt$.

Аналогично рассмотрим дифференциал

$$\delta\varepsilon = \delta\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta d\omega}{dt} - \varepsilon\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя (89), получим

$$\delta\varepsilon = \delta\theta\,\left(-C^{\phi}\,(1+\varepsilon^2) + C^{\tau}\,\omega + C^{\psi}\,\omega\,\varepsilon\right)\,, \tag{90}$$

Кроме того рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{d\varphi}{d\omega} = \delta\frac{\omega}{\varepsilon}\,.$$

Используя соотношение

$$\omega = \varepsilon\,t\,,$$

его можно записать

$$\delta\frac{d\varphi}{d\omega} = \delta t\,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta t = \frac{\delta d\varphi}{d\omega} - t\,\frac{\delta d\omega}{d\omega}\,.$$

Используя (88), получим

$$\delta t = \delta\theta\,\left(C^{\psi}\,\frac{1}{\varepsilon} + +C^{\tau} + t\,(-C^{\phi}\,\frac{1}{\varepsilon} + C^{\tau}\,t)\right)\,, \tag{91}$$

Для равноускоренного движения должно выполняться

$$\delta\omega = \varepsilon\,\delta t\,, \qquad \delta\varepsilon = 0\,.$$

Подставляя в первое соотношение (89) и (91), получим

$$\begin{gathered} C^{\psi}\,(1+\omega^2) - C^{\tau}\,\varepsilon - C^{\phi}\,\omega\,\varepsilon = \\ \varepsilon\,\left(C^{\psi}\,\tfrac{1}{\varepsilon} - C^{\tau} + t\,(C^{\phi}\,\tfrac{1}{\varepsilon} - C^{\tau}\,t)\right)\,, \end{gathered}$$

или

$$-C^{\phi}\,(1+\varepsilon^2) + C^{\tau}\,\omega + C^{\psi}\,\varepsilon\,\omega = 0\,. \tag{92}$$

Это же соотношение следует из условия $\delta\varepsilon = 0$.

Таким образом, для равноускоренного движения вытекает условие, накладываемое на "направляющие косинусы". Значения "направляющих косинусов" определяются значениями угловых скорости и ускорения. В частности для равномерного вращения, когда $\varepsilon = 0$, должно выполняться

$$C^{\phi} = 0\,, \quad C^{\tau} = 0\,, \quad C^{\psi} = 1\,.$$

Эти соотношения будут следствием (86) и (92), если положить

$$C^{\phi} = 0\,, \qquad C^{\tau}\,\omega + C^{\psi}\,\varepsilon\,\omega = 0\,.$$

Таким образом имеем следующую систему уравнений для определения C^{τ} и C^{ψ}.

$$\begin{gathered} C^{\tau} + C^{\psi}\,\varepsilon = 0 \\ (C^{\psi})^2 + (C^{\tau})^2 = 1\,. \end{gathered}$$

Она имеет следующее решение

$$C^{\psi} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,, \quad C^{\tau} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,.$$

* Таким образом, мы определили "направляющие косинусы" и можем, используя выражение (87), вычислить генератор группы ускоренных движений

$$K_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -1 & \\ \hline 1 & & \varepsilon \\ \hline & -\varepsilon & \\ \hline \end{array}$$

Зная генератор K_{θ}, на основании (80) можно вычислить матрицу преобразования координат при ускоренном движении. Так как

$$(K_{\theta})^3 = -K_{\theta}\,, \quad (K_{\theta})^4 = -(K_{\theta})^2\,,$$

то эта матрица выражается через тригонометрические функции

$$\mathrm{U} = \Delta + (K_{\theta})^2 - (K_{\theta})^2\,\cos\theta + K_{\theta}\,\sin\theta\,.$$

Или

$$\mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \quad - \frac{1}{1+\varepsilon^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \varepsilon \\ \hline & 1+\varepsilon^2 & \\ \hline \varepsilon & & \varepsilon^2 \\ \hline \end{array} \quad +$$

$$+\frac{1}{1+\varepsilon^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \varepsilon \\ \hline & 1+\varepsilon^2 & \\ \hline \varepsilon & & \varepsilon^2 \\ \hline \end{array}\,\cos\theta \quad +$$

---

*Другое решение отличается от указанного знаком.

$$+\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & \varepsilon \\ \hline & -\varepsilon & \\ \hline\end{array}\sin\theta$$

Теперь установим связь между параметрами ускоренного движения и углом θ. Для этого можно воспользоваться либо соотношением (89), либо (91). Мы остановимся на (89). Имеем

$$\delta\omega = \delta\theta\,\left(C^{\psi}\,(1+\omega^2) + C^{\tau}\,\varepsilon\right)\,.$$

Отсюда получим

$$\delta\frac{\omega}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \delta\theta\,\left(1+\frac{\omega^2}{1+\varepsilon^2}\right)\,.$$

Из этого уравнения имеем

$$\frac{\omega}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \tan\theta\,.$$

1. Преобразование дифференциалов координат

Из последнего соотношения следует

$$\begin{aligned}\cos\theta\ &= \tfrac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,,\\ \sin\theta\ &= \tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,.\end{aligned}$$

Подставляя полученные величины в уравнение (79), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned}dt = &\left(1-\tfrac{1}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}+\tfrac{1}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}\,\tfrac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right)\,dt'\\ &-\tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\tfrac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,d\varphi'+\\ &\left(-\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}+\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\tfrac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right)\,d\omega'\,,\\ d\varphi = &\tfrac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,dt'+\tfrac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,d\varphi'\\ &+\tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,d\omega'\,,\\ d\omega = &\left(-\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}+\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}\,\tfrac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right)\,dt'\\ &-\tfrac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,d\varphi'\\ &+\left(1-\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}+\tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}\,\tfrac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right)\,d\omega'\,.\end{aligned}\qquad(93)$$

Таким образом мы получили конкретный вид преобразований (79).

Для $\omega \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned}dt =&\ dt' - \boldsymbol{\omega}\,d\varphi'\,,\\ d\varphi =&\ \boldsymbol{\omega}\,dt' + d\varphi' + \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\omega'\,,\\ d\omega =&\ -\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\varphi' + d\omega'\,.\end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned}dt\ &= dt' - \tfrac{1}{(\Omega_T)^2}\,\boldsymbol{\omega}\,d\varphi'\,,\\ d\varphi\ &= \boldsymbol{\omega}\,dt' + d\varphi' + \tfrac{1}{(\mathrm{E_T})^2}\,\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\omega'\,,\\ d\omega\ &= -\tfrac{1}{(\Omega_T)^2}\,\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\varphi' + d\omega'\,.\end{aligned}$$

В ньютоновском пределе (при $\Omega_T \to \infty$ и $\mathrm{E_T} \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}dt\ &= dt'\,,\\ d\varphi\ &= \boldsymbol{\omega}\,dt' + d\varphi'\,,\\ d\omega\ &= d\omega' \equiv \boldsymbol{\varepsilon}\,dt'\,.\end{aligned}$$

VI. ВЫВОДЫ

- Специальная теория относительности в пространстве-времени лептона обобщает специальную теорию относительности в 4-х мерном пространстве-времени.
- Из линейных преобразований в пространстве-времени лептона можно выделить повороты, которые описывают
  1. прямолинейное ускоренное движение,
  2. равномерное плоское вращение,
  3. ускоренное плоское вращение,
  4. ускоренное телесное вращение.
- Группа ускоренных телесных вращений изоморфна группе $O(3)$. Это обстоятельство следует иметь в виду при формулировке электрослабого взаимодействия лептонов.