А. А. Кецарис

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ НОВОЙ ФИЗИКИ

Том первый

Третье электронное издание

Москва

2022

УДК 539.1
ББК 22.311
К33

Кецарис А. А.

К33 Математические основания Новой Физики. Т.1. – М. 2022. – 347 с.

Монография относится к области обобщающих построений в современной физике, которые имеют различные названия: Единая Теория, Теория Всего и т.д. Здесь эта область названа Новой Физикой. Ключевым является алгебраическое обобщение двух пространств: пространства-времени и пространства действия, подобного пространству-времени. И пространство-время, и пространство действия наделяются свойствами универсальной алгебры. Это позволяет объяснить квантовые явления и дать новое понимание волновой функции. Кроме того, указанное обобщение позволяет объяснить иерархию фундаментальных элементарных частиц и сделать обобщения, касающиеся этих частиц. Частным случаем универсальной алгебры является алгебра Клиффорда, которая ставится в соответствие лептонам. Линейные и билинейные преобразования универсальной алгебры ставятся в соответствие промежуточным частицам. Эти преобразования позволяют описать взаимодействие фундаментальных и промежуточных частиц.

Монография предназначена для специалистов, занимающихся исследованиями в области теоретической и математической физики, физики элементарных частиц, теории гравитации и единой теории поля, а также для преподавателей, аспирантов и студентов этих специальностей.

A. A. Ketsaris

Mathematical foundations of New Physics.

This study concerns the field of fundamental generalizing concepts in present-day physics known as Unified Theory, Theory of Everything etc. Here we call it the New Physics. Our key approach is to make algebraic generalization of two spaces: the space-time and the space of the action similar to the space-time. We attribute the properties of the universal algebra to the space-time and the action space. This main concept allows us to explain quantum phenomena and give a new understanding of the wave function. Furthermore, it helps us to explain the hierarchy of fundamental elementary particles and make generalizations about them. A special case of universal algebra is Clifford's algebra assigned to leptons in our approach. Linear and bilinear transformations of universal algebra are set to match intermediate particles. These transformations make it possible to describe the interaction of fundamental and intermediate particles.

The book is intended for researchers in theoretical and mathematical physics, particle physics, gravitation theory and unified field theory, as well as for teachers, postgraduates and students of these specialties.

УДК 539.1
ББК 22.311

Предисловие к второму электронному изданию

По отношению к первому электронному изданию 2019 года монографии "Математические основания Новой Физики" второе электронное издание дополнено в Главе 4.6 Разделом VII.1, относящимся к искусственной шаровой молнии, Главой 5.2, относящейся к взаимодействию фундаментальных и промежуточных частиц, выполнено развернутое изложение Главы 6.1, что привело к ее преобразованию в две главы – 6.1 и 6.2.

Кроме того выполнены небольшие улучшения по изложению и обозначениям.

А. Кецарис. Москва, январь 2021.

Предисловие к третьему электронному изданию

В третьем электронном издании выполнены следующие дополнения:

1. Глава 1.1 дополнена Приложением, в котором дан вывод преобразования Лоренца и обсуждаются лоренцевы сокращения длины и времени.
2. В Разделе VIII Главы 5.3 выведено *левое квантовое уравнение*, дополнительное правому квантовому уравнению – уравнению Дирака. Описание электрона двумя квантовыми уравнениями – левым и правым – коррелирует с представлением Филипа У. Андерсона (Philip W. Anderson) об электроне как о двух частицах, одна из которых несет электрический заряд, а другая является носителем спина.
3. Дан полный вывод уравнений динамики для фундаментальных, промежуточных и вторых промежуточных объектов. Это дополнение коснулось Глав 6.2 и 6.4.
4. Глава 3.2 дополнена Приложением, посвященным *варьированию и дифференцированию* функций.
5. Глава 3.3 дополнена Разделом X.2, в котором дан вывод *правила Тициуса-Боде*.
6. Глава 4.3 дополнена Разделом VII, в котором рассматриваются динамические параметры подалгебр действия и пространства-времени, такие как *спин, электрический заряд* и *слабый заряд*.
7. В Разделе IV Главы 4.6 более детально рассматривается образование молекулы водорода H_2.

А. Кецарис. Москва, ноябрь 2021 – март 2022.

Посвящается моим родителям

Августину Александровичу Кецарису и
Татьяне Васильевне Кецарис (Колосовой)

Оглавление

Предисловие

Вниманию специалистов предлагается монография под названием *"Математические основания Новой Физики"*. Эта монография развивает концепции, изложенные ранее в

1) монографии *"Основания математической физики"*, изданной в 1997 году, и

2) лекциях по единой теории взаимодействий, опубликованных с 2002 года по 2014 год на сайте `https://toe-physics.org/ru/`

Новая Физика – это гипотетическая теория, которая должна включить в себя факты и устоявшиеся соображения, касающиеся всех взаимодействий, найти ответы на существующие вопросы, решить возникшие проблемы. Но, мало того, она должна выполнить эту работу, исходя из некоторых универсальных представлений, "единым" образом. Здесь пойдет речь о разрабатываемом нами варианте Новой Физики. Сначала перечислим наиболее существенные факты, суждения, вопросы и проблемы, которые, с нашей точки зрения, должны быть охвачены Новой Физикой, а затем сформулируем те ответы на поставленные вопросы, которые дает публикуемая монография.

1. Первый вопрос, который необходимо предъявить Новой Физике, таков. Можно ли объяснить тот факт, что взаимодействия носят квантовый характер, то есть величины, характеризующие взаимодействие, прежде всего импульс, энергия, приобретают дискретные значения? Многие основоположники квантовой теории считали такую постановку вопроса непродуктивной. С их точки зрения достаточно найти правила вычислений дискретных значений величин. Однако понятно, что внесение ясности в этот вопрос должно продвинуть вперед наше понимание физического мира, как минимум в концептуальном отношении. Поставленный вопрос порождает целую серию вопросов, относящихся к квантовой теории.

1.1. В чем смысл оператора, поставленного в соответствие физической величине? Как и почему он конструируется? Например, почему импульсу p ставится в соответствие оператор

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\ \ ? \tag{1}$$

Здесь i – мнимая единица, $\hbar$ – постоянная Планка, x – пространственная координата.

Если учесть, что импульс

$$p=-\frac{\partial S}{\partial x}\,,$$

где S – физическая величина, называемая *действием*, то было бы естественно поставить в соответствие импульсу оператор

$$-\frac{\partial}{\partial x}\,,$$

а объектом применения этого оператора считать скалярную физическую величину – действие. Отсюда возникают дополнительные вопросы.

1.2. В чем смысл мнимой единицы, участвующей в конструировании квантового оператора? Почему нужно использовать ее, а не какую либо другую числовую гипередининицу?

1.3. Почему в квантовый оператор входит постоянная Планка, имеющая размерность действия?

1.4. В чем смысл квантового постулата, состоящего в том, что значения физической величины есть собственные значения ее оператора?

1.5. В чем смысл *волновой функции* ψ – величины, по отношению к которой применяется квантовый оператор? Почему ее нужно рассматривать как вектор специального пространства над полем комплексных чисел – *гильбертова пространства*?

1.6. Почему возникает необходимость в *интерпретации* волновой функции, в то время как другие физические величины не требуют интерпретации? Они обозначают то, что призваны обозначать.

2. По сегодняшним представлениям существующие взаимодействия могут быть сведены к взаимодействию очень ограниченного числа элементарных частиц, которые мы будем называть *фундаментальными*. Они составляют две группы частиц – лептоны и кварки. В пределах каждой из этих групп имеет место замечательная симметрия. Каждая из групп разбивается на *три* подгруппы (*три поколения*) по *две* частицы в подгруппе (условно *верхнюю и нижнюю* частицы). Отсюда Новая Физика должна объяснить следующее.

2.1. Чем отличаются волновые функции каждой из фундаментальных частиц друг от друга?

2.2. Почему число групп частиц равно двум – лептоны и кварки?

2.3. Почему число поколений частиц равно трем?

2.4. Почему каждое поколение содержит две частицы? Например, первое поколение лептонов включает электрон e и электронное нейтрино ν_e?

Кроме того, установлено, что каждый вид (*аромат*) кварка существует в трех модификациях, обозначенных цветом – красный, желтый и синий. Отсюда возникают аналогичные вопросы.

2.5. Почему число цветов кварков равно трем?

2.6. Чем отличаются волновые функции кварков одного аромата, но разного цвета?

Кроме того, каждая из перечисленных фундаментальных частиц имеет *античастицу*. Отсюда следует, что

2.7. в Новой Физике должна присутствовать система понятий и операций, связанных не только с частицей, но и с античастицей.

3. Физика элементарных частиц связывает надежду на прорыв в неизведанную область материального мира с *суперсимметрией*. Согласно этой концепции каждой элементарной частице соответствует массивный суперпартнер, принадлежащий противоположной статистике. Так фундаментальным частицам, которые являются фермионами, соответствуют фундаментальные суперчастицы, представляющие собой бозоны. Отсюда следует, что

3.1. в Новой Физике должны содержаться средства для естественного присутствия суперсимметрии.

Без ответа остаются следующие вопросы.

3.2. Является ли соответствие суперчастиц частицам взаимнооднозначным (например, существует ли суперпартнер у нейтрино)?

3.3. Существуют ли квантовые явления в той области материального мира, которая образована суперчастицами?

4. Пространство-время специальной теории относительности есть та арена, на которой происходят взаимодействия. Те преобразования пространства-времени, которые оставляют инвариантными процессы взаимодействия, определены как группа Пуанкаре. Группа Пуанкаре включает пространственно-временные сдвиги, геометрические повороты и преобразования Лоренца. Скорость света является инвариантом этой группы. В связи с этим возникает вопрос: следует ли искать обобщение группы Пуанкаре при переходе к Новой Физике? Правомерность такой постановки вопроса вытекает из целого ряда рассуждений. Например, этот вопрос может быть инициирован следующим рассуждением. Движение световой частицы подчиняется уравнению

$$c^2dt^2 - dx^2 = 0.$$

Здесь x – координата, t – время движения световой частицы, c – скорость света. Отсюда следует, что в любой ситуации и, в частности, в момент излучения скорость световой частицы равна скорости света. Вместе с тем интуитивная точка зрения подсказывает, что в момент излучения скорость световой частицы равна нулю и существует такой промежуток времени, за который указанная скорость возрастает от нуля до c. Отсюда следует, что вышеприведенное соотношение должно быть модифицировано, а вместе с ним обобщена специальная теория относительности и группа Пуанкаре в том числе. Поставленный вопрос разделяется на два.

4.1. Следует ли искать обобщение пространства-времени специальной теории относительности при переходе к Новой Физике?

4.2. Следует ли искать обобщение группы геометрических поворотов и преобразований Лоренца?

Рассматривая обобщение пространства-времени, следует ответить на вопрос:

4.3. распространяются ли квантовые явления на обобщенное пространство-время?

5. Каждому типу взаимодействий соответствует *группа внутренней симметрии*, преобразующая координаты волновой функции, принадлежащие *внутреннему пространству.* Помимо этих координат, волновая функция содержит координаты, преобразуемые группой Пуанкаре. Существованием таких координат объясняется наличие спина у элементарных частиц. Пространство указанных координат назовем *внешним.* В этой терминологии группа Пуанкаре – это *группа внешней симметрии.* Отсюда возникают следующие вопросы.

5.1. В чем смысл внутренних пространств взаимодействий?

5.2. В чем смысл групп внутренних симметрий?

5.3. Существует ли связь между внешним и внутренними пространствами?

5.4. Следует ли искать пространство, охватывающее внешнее и внутренние пространства?

5.5. Существует ли связь между внутренними пространствами различных типов взаимодействий?

5.6. Следует ли искать пространство, охватывающее внутренние пространства различных типов взаимодействий и соответственно группу внутренней симметрии, охватывающую группы внутренних симметрий различных типов взаимодействий?

6. Согласно существующему мировоззрению взаимодействие фундаментальных частиц осуществляется посредством *поля.* Точнее, взаимодействие частицы 2 с частицей 1 сводится к взаимодействию частицы 2 с полем, *источником* которого является частица 1. Типам взаимодействий соответствуют типы полей. Квантами полей являются *промежуточные частицы.* Часто при перечислении частиц, из которых, по сегодняшним представлениям, составлена материя, фундаментальные и промежуточные частицы упоминаются совместно. При этом вуалируется существенное отличие промежуточных частиц от фундаментальных частиц, их особенное предназначение: быть посредником в осуществлении взаимодействий между фундаментальными частицами и ими самими. Отсюда следует, что

6.1. система понятий Новой Физики должна отражать обслуживающую функцию промежуточных частиц.

7. Новая Физика должна ответить на вопросы, касающиеся типов взаимодействий.

7.1. Чем объяснить, что в природе существует *четыре* типа взаимодействий:

- гравитационное,
- слабое,
- электромагнитное,
- сильное?

7.2. Чем объяснить, что круг элементарных частиц, участвующих в указанных взаимодействиях, сужается от гравитационного взаимодействия к сильному? Если в гравитационном взаимодействии участвуют все элементарные частицы, то сильное взаимодействие ограничено участием адронов.

7.3. Чем объяснить, что взаимодействия отличаются по своей силе?

8. Теория гравитационного взаимодействия стоит особняком от теорий электрослабого и сильного взаимодействий. На сегодняшний день неясно,

8.1. должна ли общая теория относительности представлять гравитацию в Новой Физике?

8.2. какая группа может рассматриваться как гравитационная группа симметрии?

Закончив на этом вопросы к Новой Физике, расскажем о том, как на эти вопросы отвечает публикуемая монография и какие проблемы она поднимает в свою очередь.

1. В публикуемой монографии первая группа вопросов получает свое разрешение после следующих обобщений.

- На векторах пространства-времени вводится операция умножения, благодаря которой пространство-время становится *алгеброй*, а точнее *универсальной* алгеброй. По отношению к *ковариантным* базисным векторам $\mathbf{E}^I$ закон умножения (композиции) записывается следующим образом:

$$\mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K = C^{IK}{}_L \cdot \mathbf{E}^L \,,$$

где $C^{IK}{}_L$ – структурные постоянные или структурные матрицы универсальной алгебры. В *регулярном (присоединенном) представлении* базисные векторы представляются структурными матрицами

$$\mathbf{E}^I \sim C^{IK}{}_L \,.$$

Номер структурной матрицы I есть индекс базисного вектора, который представлен этой матрицей. Отсюда обобщенный *оператор набла* записывается следующим образом:

$$\nabla = \mathbf{E}^I \cdot \frac{\partial}{\partial x^I} \sim C^{IK}{}_L \cdot \frac{\partial}{\partial x^I} \,, \tag{2}$$

где x^I – координаты вектора обобщенного пространства-времени.

- Скалярное действие обобщается до векторной величины; более того, полагается, что множество векторов действия $\mathbf{S}$ также составляет универсальную алгебру. Закон умножения векторов (точнее *правый* закон умножения) в этой алгебре запишем следующим образом:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{S^0}\, \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 \,. \tag{3}$$

S^0 есть постоянная величина, имеющая размерность действия и согласующая размерности правой и левой частей уравнения. В частном случае эта величина полагается равной постоянной Планка

$$S^0 = \hbar \,. \tag{4}$$

1.1. Соотношения (2), (3), (4) в простейшем случае так называемого *сжатого* представления приводят к классическим квантовым операторам физических величин, в частности к оператору импульса (1).

1.2. При вычислении структурных матриц, если исходить из правил умножения базисных векторов, получается, что в состав структурных матриц входят матричные блоки 2×2 вида

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\;.$$

Их можно отождествить с мнимой единицей i, учитывая что

$$i^2 = -\mathit{1} \,,$$

где через $\mathit{1}$ обозначена единичная матрица

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\;.$$

Таким образом, мнимая единица появляется в квантовой теории как результат алгебраического закона композиции на пространстве-времени и пространстве действия.

Заметим, что помимо указанных блоков в состав структурных матриц входят следующие блоки:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\;, \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\;.$$

Отождествляя эти матрицы с числами a и b соответственно, получим систему гиперчисел с единицами

$$\{\mathit{1}, a, b, i\}$$

и законом умножения

$$a^2 = b^2 = \mathit{1}\,, \qquad i^2 = -\mathit{1}\,, \qquad a\,b = -b\,a = i\,,$$
$$a\,i = -i\,a = b\,, \qquad i\,b = -b\,i = a\,.$$

1.3. Постоянная Планка переходит в квантовый оператор из закона композиции (3), что представляется довольно искусственным. Естественнее было бы записывать квантовый оператор в виде оператора набла (2), а постоянную Планка закрепить за законом композиции (3).

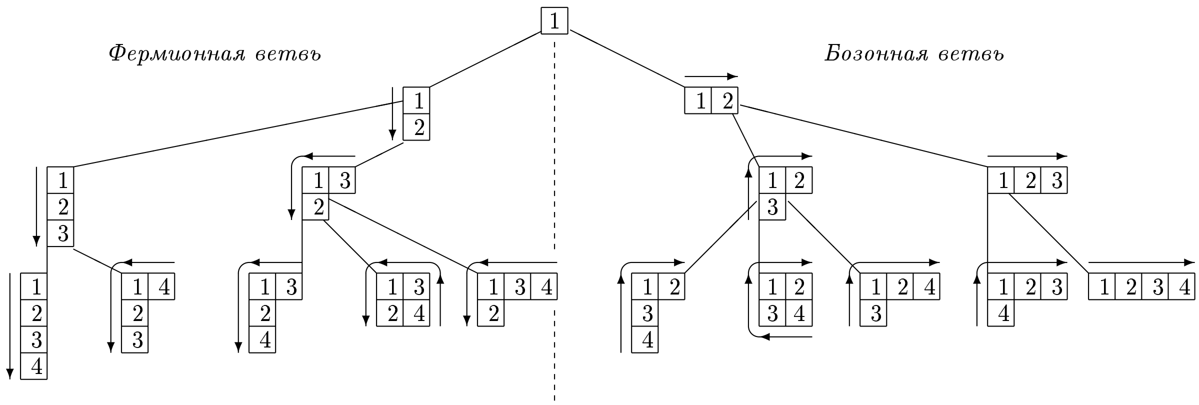


Рис. 1. Четырехуровневое дерево Юнга первого поколения

1.4. Продифференцируем закон композиции (3) дважды и вычислим $d_2 d_1 \mathbf{S}$, где $d_1\mathbf{S}$ – дифференциал по направлению вектора $\mathbf{S}_1$, а $d_2\mathbf{S}$ – дифференциал по направлению вектора $\mathbf{S}_2$. Получим

$$d_2 d_1 \mathbf{S} = \frac{1}{\hbar}\, d_1\mathbf{S} \circ d_2\mathbf{S}\,. \tag{5}$$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры действия в векторной форме.

В уравнении (5) введем обозначение

$$\psi = d_1\mathbf{S}\,.$$

Кроме того, введем обозначение d для дифференциала d_2. Уравнение структуры в новых обозначениях принимает вид

$$d\psi = \frac{1}{\hbar}\, \psi \circ d\mathbf{S}\,. \tag{6}$$

Это уравнение имеет вид задачи на собственные значения оператора дифференциала d. Итак, получен следующий результат: уравнение структуры алгебры действия может быть представлено как задача на собственные значения оператора дифференциала d. И, следовательно, квантовый постулат есть не что иное как закон композиции алгебры действия в дифференциальном виде.

1.5. Из уравнения (6) следует, что величина ψ, по отношению к которой применяется квантовый оператор, представляет собой дифференциал вектора действия и он должен быть отождествлен с *волновой функцией*, вводимой в квантовой теории. Пространство Гильберта надо рассматривать как универсальную алгебру действия.

1.6. Необходимость в интерпретации волновой функции является следствием неразвитости основ квантовой теории и отражает отсутствие объяснения квантовых явлений. Вышеуказанные соображения объясняют квантовые явления тем, что действие является алгебраической величиной.

2. Вторая группа вопросов получает свое разрешение из детального анализа универсальной алгебры действия. Разделение универсальной алгебры на подалгебры удобно проиллюстрировать диаграммой, называемой *деревом Юнга* (Рис. 1). Здесь фигуры обозначают тензоры, входящие в волновую функцию. Число клеток в фигуре означает ранг тензора. Каждой фигуре соответствует своя симметрия тензора при перестановке индексов. Вертикальному расположению клеток соответствует антисимметричная комбинация индексов, горизонтальному расположению клеток соответствует симметричная комбинация индексов. Линия, соединяющая одноклеточную фигуру и одну из четырехклеточных фигур (*ствол*), соответствует подалгебре тензорной алгебры. Таким образом, в каждую подалгебру входят тензоры от первого до четвертого ранга с определенной симметрией. Заметим, что самому левому стволу соответствует подалгебра, включающая только антисимметричные тензоры. Эта подалгебра есть алгебра Клиффорда $\mathbb{C}_4$. Если ограничиться антисимметричными тензорами рангов от одного до трех, то получим алгебру Клиффорда $\mathbb{C}_3$.

2.1. Фундаментальные частицы находятся в соответствии с подалгебрами универсальной алгебры. Точнее, волновые функции фундаментальных частиц являются векторами подалгебр универсальной алгебры и отличаются друг от друга симметриями тензоров, составляющих алгебру. Например, волновая функция электрона есть вектор алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_3$, а волновая функция лептонов одного поколения есть вектор алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_4$.

Все подалгебры универсальной алгебры на уровне тензора второго ранга и соответственно фундаментальные частицы делятся на два класса. Волновые функции частиц первого класса содержат *антисимметричный* тензор второго ранга, а волновые функции частиц второго класса содержат *симметричный* тензор второго ранга. Такому разделению волновых функций соответствует разделение фундаментальных частиц на два класса: частицы со спином $1/2$ – фермионы и частицы со спином 0 – бозоны. Последние частицы пока оставим в стороне и остановимся на фермионах. Рис. 1. также иллюстрирует подалгебры, относящиеся к фундаментальным фермионам.

2.2. Подалгебры фермионов на уровне тензоров третьего ранга разделяются на две группы. Одна из них включает в себя антисимметричный тензор третьего ранга и представляет собой алгебру Клиффорда, векторами которой согласно Дираку описываются лептоны. Отсюда естественно вторую группу подалгебр отнести к кваркам. Таким образом, в рамках классификации частиц в соответствии с подалгебрами тензорной алгебры находит объяснение деление фундаментальных частиц со спином на две группы – лептоны и кварки, а также алгебраическое толкование таких характеристик лептонов и кварков, как лептонный и барионный заряды.

2.3. Обратимся теперь к вопросу: почему число поколений частиц равно трем? Заметим, что для каждой подалгебры волновые функции могут отличаться *порядком*, установленным на базисных векторах геометрического пространства. Так порядку индексов 123 соответствует волновая функция частиц первого поколения. Именно для такого порядка индексов приведено дерево Юнга (Рис. 1). Порядку индексов 312 соответствует волновая функция частиц второго поколения, а порядку индексов 231 соответствует волновая функция частиц третьего поколения. Таким образом, волновые функции лептонов разных поколений отличаются друг от друга циклической перестановкой трех базисных векторов образующего геометрического пространства. Это правило выполняется и для волновых функций кварков разных поколений. Различие в массах частиц разных поколений, видимо, свидетельствует о неоднородности геометрического пространства фундаментальных частиц. Причина такой неоднородности остается неясной.

2.4. Выясним теперь, почему каждое поколение лептонов или кварков содержит две частицы.

Структура квантовых уравнений для свободных лептонов такова, что они разделяются на две независимые системы уравнений. Таким образом, мы имеем две частицы, одна из которых – это нижний лептон, а другая – соответствующее ему нейтрино. Следовательно, подалгебра лептонов каждого поколения относится к *двум* частицам: нижнему лептону и соответствующему ему нейтрино.

Структура квантовых уравнений для свободных кварков такова, что они также разделяются на две независимые системы уравнений. Таким образом, мы имеем две частицы, одна из которых – это верхний кварк, а другая – нижний кварк. Следовательно, подалгебра кварков каждого поколения относится к *двум* частицам: верхнему и нижнему кваркам.

Структура квантовых уравнений для свободных лептонов такова, что волновые функции лептонов разделяются на две компоненты – правую и левую. Структура квантовых уравнений для свободных кварков такова, что волновые функции кварков разделяются на две компоненты – правую и левую, подобно тому как это имеет место для лептонов. Такое разделение необходимо для описания электрослабого взаимодействия с участием лептонов и кварков.

2.5. Уровень тензоров четвертого ранга связан с привлечением времениподобного базисного вектора. Поэтому этот уровень назван *релятивистским.* На релятивистском уровне алгебра кварков разделяется на три подалгебры в соответствии с тремя симметриями тензора четвертого ранга. Каждой из этих подалгебр ставится в соответствие модификация кварка, обозначаемая цветом. Таким образом, в рамках классификации частиц в соответствии с подалгебрами универсальной алгебры находит объяснение деление кварков на три модификации – красные, желтые и синие кварки, а также алгебраическое толкование такой характеристики, как цвет.

2.6. Отсюда следует ответ на вопрос, чем отличаются волновые функции кварков одного аромата, но разного цвета. Они отличаются симметриями тензоров четвертого ранга, входящих в волновые функции цветных кварков.

Укажем здесь на интересное следствие алгебраической классификации фундаментальных частиц. Оно касается лептонов. Подобно алгебре кварков алгебра лептонов на релятивистском уровне делится на две подалгебры. Отсюда следует, что лептоны существуют в двух модификациях, которые, по аналогии с кварками, удобно обозначить цветом – белые и черные лептоны. Но тогда, исходя из аналогии с кварками, следует заключить, что белые и черные лептоны связаны короткодействующими силами цветового притяжения, превосходящими силы Кулона (для заряженных лептонов). В частности, эти силы проявляют себя при образовании электронных пар в таких явлениях, как

- заполнение электронами орбит атомов,
- ковалентная химическая связь,
- образование кристаллической решетки,
- сверхпроводимость.

2.7. В представляемой Новой Физике переход от частицы к античастице связан с переходом от контравариантной алгебры действия к ковариантной. При этом в действительном представлении структурные матрицы переходят в транспонированные, а в комплексном представлении структурные матрицы переходят в эрмитово сопряженные. В частности, зарядовые матрицы меняют знак.

3. Рассмотрим теперь группу вопросов, относящихся к суперсимметрии. Вернемся снова к дереву Юнга и выделим из него бозонную ветвь. Из Рис. 1 видно, что каждой подалгебре фермионной ветви соответствует подалгебра бозонной ветви. Таким образом, каждой частице со спином $1/2$ соответствует частица со спином 0.

3.1. Отсюда видно, что в представляемой Новой Физике алгебраический подход к действию естественным образом приводит к концепции суперсимметрии. Частицы, суперсимметричные лептонам, мы называем *лептино*, частицы, суперсимметричные кваркам, – *кваркино*. Следует отметить, что представления о суперсимметрии, о которой идет речь, отличны от принятых представлений. Среди суперчастиц нет частиц ни с целым спином, ни с дробным. Спин суперчастиц следует считать равным нулю. Точнее нужно сказать так: такой характеристики, как спин, у суперчастиц нет, а его место занимает новый, в некотором смысле симметричный спину, динамический параметр. Этот параметр назван *инерцией*. В волновой функции суперчастиц инерция представлена *симметричным* тензором второго ранга. Фундаментальные суперчастицы не участвуют в тех взаимодействиях, в которых участвуют фундаментальные частицы, за исключением гравитации.

Если на дереве Юнга (Рис. 1) указать направление увеличения массы фундаментальных частиц от лептонов к кваркам, то есть слева направо, то следует считать, что кваркино тяжелее кварков, а лептино – это самые тяжелые частицы. А если учесть, что суперчастицы не участвуют в электромагнитном взаимодействии, то отсюда следует мысль о том, что, возможно, суперчастицы составляют так называемую *темную материю*, а суперполя составляют *темную энергию*.

3.2. На релятивистском уровне алгебра кваркино разбивается на три подалгебры, алгебра лептино разбивается на две подалгебры. Трем подалгебрам кваркино мы ставим в соответствие кваркино трех цветов – красные, желтые, синие. Необходимо также предположить, что лептино имеют две цветовые разновидности – черные и белые. Уравнения для свободных суперчастиц не разделяются на две системы уравнений. Таким образом, верхние и нижние суперчастицы не существуют (например, не существуют супераналоги электронного нейтрино и электрона), а существует одна суперчастица (в нашем примере это – суперлептино первого поколения) с верхней и нижней компонентами, смешанными между собой.

3.3. Из алгебраической структуры векторов действия суперчастиц следуют квантовые постулаты и теория квантовых явлений этих частиц. Роль мнимой единицы в квантовой теории, относящейся к области суперчастиц, выполняет единица, обозначенная нами ранее буквой a. В общем случае нет оснований считать, что квантовые явления с участием суперчастиц определяются постоянной Планка, а не другой постоянной величиной, имеющей размерность действия.

4. Рассматриваемой Новой Физике сопутствует обобщение группы Пуанкаре. Анализ уравнения Дирака заставляет считать, что каждой из фундаментальных частиц необходимо соотнести свое собственное пространство-время. Оно обобщает пространство-время специальной теории относительности.

4.1. Собственное пространство-время фундаментальной частицы является подалгеброй универсальной алгебры, образующим пространством которой служит пространство-время специальной теории относительности. В частности, обобщенным пространством-временем белых лептонов является алгебра Клиффорда $\mathbb{C}_4$. Указанные обобщения связаны с привлечением дополнительных координат в качестве независимых переменных пространства-времени. Помимо

- x^a – геометрических координат и
- t – координаты времени,

к ним относятся

- s^{ab} – координаты площади (угла поворота),
- v^a – координаты скорости,
- V^{abc} – координаты объема (телесного угла),
- ω^{ab} – координаты угловой скорости,
- Ω^{abc} – координаты телесной угловой скорости,
- s – длина вектора обобщенного пространства-времени.
  Здесь индексы a, b, c принимают значения 1, 2, 3.

Дополнительным координатам соответствуют дополнительные компоненты импульса. Помимо

- 3-х мерного импульса p_a,
- энергии $p_4 = \frac{E}{c}$,

к ним относятся

- 3-х мерный угловой момент импульса $p_{ab} = \frac{M_{ab}}{R}$,
- 3-х мерная сила $p_{a4} = T\,f_a$,
- 3-х мерный телесный момент импульса $p_{abc} = \frac{M_{abc}}{R}$,
- 3-х мерный угловой момент силы $p_{ab4} = \frac{F_{ab}}{c}$,
- телесный момент силы $p_{abc4} = \frac{F_{abc}}{c}$,
- импульс покоя p_0.
  Здесь R – фундаментальная постоянная длины, T – фундаментальная постоянная времени.

Специальная теория относительности в пространстве-времени фундаментальной частицы обобщает специальную теорию относительности в 4-х мерном пространстве-времени. В частности, движение световой частицы подчиняется уравнению

$$c^2 dt^2 - dx^2 - \frac{c^2}{A^2} dv^2 = 0.$$

Здесь v – скорость световой частицы, A – фундаментальная постоянная, так называемое *максимальное ускорение*. Из этого уравнения следует, что световая частица может не только двигаться прямолинейно со скоростью света, но и совершать колебательное движение. В макроотношении колеблющаяся световая частица воспринимается как неподвижная.

4.2. Геометрические повороты и преобразования Лоренца, входящие в группу Пуанкаре, обобщаются до поворотов относительно всех базисных векторов в обобщенном пространстве-времени.

Так как фундаментальной частице соответствует фундаментальная античастица, которой сопутствует ковариантное (сопряженное) пространство-время, то в инвариантные преобразования необходимо включить сопряженные преобразования пространства-времени античастицы.

Вышеуказанные преобразования объединяются в *общую кинематическую алгебру*, которая является обобщением классической группы инвариантных преобразований – группы Пуанкаре.

4.3. В отличие от пространства-времени специальной теории относительности собственное пространство-время фундаментальной частицы является алгеброй. Отсюда необходимо следует квантование этого пространства-времени. Исходные квантовые постулаты представляют собой уравнения структуры соответствующей алгебры.

5. Пятая группа вопросов получает свое разрешение по следующим соображениям. Представление о взаимодействии основывается на линейных преобразованиях пространства-времени и пространства действия. При этом, учитывая некоммутативность умножения линейных преобразований, необходимо различать *левые и правые* линейные преобразования.

5.1. Группа правых линейных преобразований отождествляется с группой внутренней симметрии. Обоснованием такому пониманию пространства внутренней симметрии служит то обстоятельство, что регулярное представление базисных векторов алгебры действия с *правым* умножением, поставленных в соответствие базисным векторам правых линейных преобразований, приводит к зарядовым матрицам.

5.2. В частном случае группы внутренних симметрий приобретают смысл правых поворотов векторов алгебры действия. Например, группа электромагнитных взаимодействий – это группа поворотов вокруг базисного вектора $\mathbf{e}_{21}$. Она изоморфна группе $U(1)$. Группа слабых взаимодействий – это группа поворотов вокруг базисных векторов $\mathbf{e}_4$ $\mathbf{e}_{123}$, $\mathbf{e}_{1324}$. Она изоморфна группе $SU(2)$.

5.3. Группа левых линейных преобразований отождествляется с группой внешней симметрии. Обоснованием такому пониманию пространства внешней симметрии служит то обстоятельство, что регулярное представление базисных векторов алгебры действия с *левым* умножением, поставленных в соответствие базисным векторам левых линейных преобразований, приводит к пространственно-временным матрицам, в частности матрицам Дирака.

5.4. Пространство, охватывающее пространства внутренней и внешней симметрий, представляет собой группу линейных преобразований в общем случае.

6. Шестая группа вопросов получает свое разрешение по следующим соображениям.

6.1. Действие промежуточной частицы есть оператор линейного преобразования, применяемый к векторам действия фундаментальных частиц. Действие промежуточной античастицы есть оператор линейного преобразования, применяемый к векторам действия фундаментальных античастиц. Векторы действия промежуточной частицы составляют алгебру. Векторы действия промежуточной античастицы также составляют алгебру. Пусть $\mathbf{e}_I$ – базисные векторы алгебры действия фундаментальной частицы, а $\mathbf{I}^K{}_L$ – базисные векторы алгебры действия промежуточной частицы. Тогда взаимодействию фундаментальной и промежуточной частиц соответствует алгебраический закон композиции

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{I}^K{}_L = \delta^K{}_I \cdot \mathbf{e}_L \,.$$

Здесь $\delta^K{}_I$ – символ Кронекера.

Ряд соображений заставляет постулировать существование промежуточных частиц *второго рода*. В связи с этим ранее указанные промежуточные частицы называются промежуточными частицами *первого рода*. Пусть $\mathbf{J}^{KL}{}_M$ – базисные векторы алгебры действия промежуточной частицы второго рода. Тогда взаимодействию фундаментальной частицы и промежуточной частицы второго рода соответствует алгебраический закон композиции

$$\mathbf{e}_I \circ \mathbf{J}^{KL}{}_M = \delta^K{}_I \cdot \mathbf{I}^L{}_M \,.$$

Он означает, что взаимодействие фундаментальных и промежуточных частиц второго рода приводит к рождению промежуточных частиц первого рода.

7. Седьмая группа вопросов по существу остается без ответа. Можно только высказать ряд общих соображений.

7.1. Гравитационное взаимодействие обусловлено группой внешней симметрии. Гравитационное поле является частным случаем поля внешней симметрии.

7.2. Электрослабое взаимодействие обусловлено группой внутренней симметрии. Электрослабое поле является частным случаем поля внутренней симметрии.

7.3. В основе сильных взаимодействий лежит алгебра (и соответственно группа), *охватывающая* цветные подалгебры универсальной алгебры.

8. Обособленность общей теории относительности как теории гравитационного взаимодействия вызвана тем, что ее математическая основа – риманово пространство – не является векторным пространством, снабженным скалярным произведением. А это недопустимо с физической точки зрения. Дело в том, что умножение вектора на число и скалярное умножение векторов представляют собой математический эквивалент процедуры измерения векторной величины. Отсюда

8.1. попытка рассмотреть с единых позиций гравитационное взаимодействие с одной стороны и электрослабое и сильное взаимодействия с другой стороны должна сопровождаться переформулировкой теории гравитации;

8.2. необходимо рассматривать гравитационную группу как группу левых преобразований пространства-времени.

Публикуемая монография содержит два тома и шесть частей.
В первый том входят три первые части:
1. ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. Система отсчета. Кинематика.
2. ЧАСТЬ ВТОРАЯ. Искривленное пространство.
3. ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ. Динамика. Действие. Фундаментальные физические объекты.

Во второй том входят следующие три части:
1. ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ. Фундаментальные частицы.
2. ЧАСТЬ ПЯТАЯ. Промежуточные физические объекты.
3. ЧАСТЬ ШЕСТАЯ. Уравнения динамики.

Замечания по редакции монографии:
1. Нумерация формул каждой Главы начинается заново. При ссылке на формулы другой Главы указывается номер Главы и номер формулы.
2. Нумерация сносок каждой Главы начинается заново.
3. В ссылках Предметного Указателя первая цифра означает номер тома, вторая цифра означает номер страницы этого тома.
4. В основном изложение выполняется в двухколоночном формате, но иногда для удобства выполняется переход на одноколоночный формат.
5. В электронном варианте монографии для удобства чтения векторы обозначены цветными буквами. Векторы системы отсчета обозначены буквами синего цвета. Векторы искривленного пространства обозначены буквами красного цвета.

Я благодарю своих сыновей Николая и Александра за неизменную поддержку и помощь.

А. Кецарис. Москва, февраль 2019.

Договоренности и обозначения

- Индексы I, K, $L, \dots$ нумеруют векторы обобщенного пространства.
- Индексы I_1, K_1, $L_1, \dots$ нумеруют векторы обобщенного пространства в первом сжатом представлении.
- Индексы I_2, K_2, $L_2, \dots$ нумеруют векторы обобщенного пространства во втором сжатом представлении.
- Индексы i, k, $l \dots$ нумеруют векторы пространства-времени СТО.
- Индексы a, b, $c, \dots$ нумеруют векторы геометрического пространства.
- Символ ${}_r$ в выражении ${}_rA$ означает, что объект A принадлежит правой алгебре или группе.
- Символ ${}_l$ в выражении ${}_lA$ означает, что объект A принадлежит левой алгебре или группе.
- Символ * в выражении A^* относится к объекту, сопряженному объекту A.
- Символ ${}^{-1}$ или $\tilde{}$ в выражениях l^{-1} и $\tilde{l}$ относится к линейному преобразованию, обратному линейному преобразованию l.
- Символ ^{t} в выражениях l^t относится к линейному преобразованию, транспонированному линейному преобразованию l.
- Черта в выражении $\bar{A}$ означает, что этот объект принадлежит пятимерному пространству.
- Названия фундаментальных суперчастиц образованы путем добавления к названиям фундаментальных частиц суффикса *ино*: лептон → лептино; кварк → кваркино.

A	постоянная ускорения (максимальное ускорение)
$\mathbb{A}$	множество вторых линейных преобразований
$\mathbf{a}(\ )$	оператор второго линейного преобразования
$A^I{}_{I_1K_2}$	потенциалы поля внутренней симметрии
$\mathbb{B}$	пространство действия фундаментальных бозонов
${}_rC^K{}_{K_1K_2}$	структурные постоянные правой универсальной контравариантной алгебры ${}_r\mathbb{X}$
${}_lC^K{}_{K_1K_2}$	структурные постоянные левой универсальной контравариантной алгебры ${}_l\mathbb{X}$
${}_rC^{K_2K_1}{}_K$	структурные постоянные правой универсальной ковариантной алгебры ${}_r\mathbb{X}^*$
${}_lC^{K_2K_1}{}_K$	структурные постоянные левой универсальной ковариантной алгебры ${}_l\mathbb{X}^*$
$\mathbb{C}$	пространство действия лептонов
$\mathbb{C}_w$	пространство действия белых лептонов
$\mathbb{C}_b$	пространство действия черных лептонов
$\mathbb{C}^s$	пространство действия лептино
$\mathbb{C}^s_b$	пространство действия черных лептино
$\mathbb{C}^s_w$	пространство действия белых лептино
D	искривленный дифференциал, дифференциал движущегося (искривленного) пространства
$\mathbf{e}_a$	базисные векторы геометрического ппространеества
$\mathbf{e}_i$	базисные векторы пространства-времени СТО
$\mathbf{E}^i$	базисные векторы сопряженного пространства-времени СТО
$\mathbf{e}_K$	базисные векторы контравариантного пространства-времени $\mathbb{X}$
$\mathbf{E}^K$	базисные векторы ковариантного пространства-времени $\mathbb{X}^*$
${}_l\mathbf{e}_K$	левые базисные векторы
${}_r\mathbf{e}_K$	правые базисные векторы
ε_I	базисные векторы в алгебре Клиффорда
$\mathcal{E}^I$	базисные векторы в сопряженной алгебре Клиффорда
E	постоянная углового ускорения
E_T	постоянная телесного углового ускорения
$\mathfrak{e}_i$	базисные векторы искривленного пространства Y

$\mathfrak{E}^i$	базисные векторы сопряженного искривленного пространства Y^*
$\mathfrak{e}_I$	базисные векторы искривленного пространства-времени $\mathbb{Y}$
$F^I{}_{I_1K_2K_3}$	объект поля внутренней симметрии
$\mathbb{F}$	пространство действия фундаментальных фермионов
g_{ab}	метрический тензор геометрического пространства
$g_{K_1K_2}$	метрический тензор обобщенного пространства-времени $\mathbb{X}$
g_{ik}	метрический тензор пространства-времени СТО
${}_r\mathbb{G}'$	правая группа, ассоциированная с правым умножением векторов
${}_l\mathbb{G}'$	левая группа, ассоциированная с правым умножением векторов
${}_l\mathbb{G}$	левая кинематическая группа
${}_r\mathbb{G}$	правая кинематическая группа
$\Gamma^K{}_{K_1K_2}$	коэффициенты связности поля внешней симметрии
$G_{I_1I_2}$	метрический тензор в искривленном пространстве-времени $\mathbb{Y}$
$g_{K_1K_2}$	метрический тензор представления
$G_{i_1i_2}$	метрический тензор в Y
$\mathbb{G}_1$	калибровочная группа
$\mathbb{G}$	кинематическая группа
${}_l\mathbb{G}_1$	калибровочная группа внешней симметрии
${}_l\mathbb{G}$	кинематическая группа внешней симметрии
${}_r\mathbb{G}_1$	калибровочная группа внутренней симметрии
${}_r\mathbb{G}$	кинематическая группа внутренней симметрии
$\mathbf{I}^I{}_M(\ )$	базисные операторы линейных преобразований
$\mathbf{I}^I{}_M$	базисные векторы линейных преобразований
${}_l\mathbf{I}^I{}_M$	базисные векторы левых линейных преобразований
${}_r\mathbf{I}^I{}_M$	базисные векторы правых линейных преобразований
$\mathbf{I}^K{}_I$	ток фундаментального объекта
$I^{KK_1}{}_I$	координаты тока фундаментального объекта
$\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I(\ )$	базисные операторы вторых линейных преобразований
$\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I$	базисные векторы вторых линейных преобразований
$\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I$	второй ток фундаментального объекта
$J^{KK_2K_1}{}_I$	координаты второго тока фундаментального объекта
$(\ )\mathbf{K}^I{}_K$	базисные операторы сопряженных линейных преобразований
$\mathbf{K}^I{}_K$	базисные векторы сопряженных линейных преобразований
L_0	постоянная длины; коэффициент, имеющий размерность длины
${}_r\mathbb{L}'$	правая алгебра, ассоциированная с правым умножением векторов
${}_l\mathbb{L}'$	левая алгебра, ассоциированная с правым умножением векторов
λ	волновая функция алгебры линейных преобразований
$\lambda^M{}_L$	координаты волновой функции алгебры линейных преобразований
$\mathbb{L}$	множество линейных преобразований
$\mathbb{L}^*$	множество сопряженных линейных преобразований
$\mathbf{l}(\ )$	оператор линейного преобразования
$(\ )\mathbf{l}^*$	оператор сопряженного линейного преобразования
$\mathbf{l}^*$	вектор сопряженного линейного преобразования
$l^M{}_I$	координаты линейного преобразования
$l^I{}_{K_1K_2}$, $a^I{}_{K_1K_2}$	координаты второго линейного преобразования
$l^{*K}{}_I$	координаты сопряженного линейного преобразования
$\mathbf{m}^{K_1}{}_I$	момент фундаментального объекта
$m^{KK_1}{}_I$	координаты момента фундаментального объекта
$\mathbf{p}_I$	импульс фундаментального объекта
$p^K{}_I$	координаты импульса фундаментального объекта

$\mathbf{Q}_I$	заряд фундаментального объекта
$Q^K{}_I$	координаты заряда фундаментального объекта
$\mathbb{Q}$	пространство действия кварков
$\mathbb{Q}_r$	пространство действия красных кварков
$\mathbb{Q}_y$	пространство действия желтых кварков
$\mathbb{Q}_b$	пространство действия синих кварков
$\mathbb{Q}^s$	пространство действия кваркино
$\mathbb{Q}^s_b$	пространство действия синих кваркино
$\mathbb{Q}^s_y$	пространство действия желтых кваркино
$\mathbb{Q}^s_r$	пространство действия красных кваркино
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$R^K{}_{K_1K_2K_3}$	объект поля внешней симметрии
S_0	постоянная действия
$\mathbf{S}$	вектор действия фундаментальных объектов
$\mathbb{S}$	множество векторов действия фундаментальных объектов
S	вектор действия промежуточных объектов
$\mathbb{S}_1$	множество векторов действия промежуточных объектов
$\mathfrak{S}$	вектор действия вторых промежуточных объектов
$\mathbb{S}_2$	множество векторов действия вторых промежуточных объектов
$\mathbf{S}^*$	вектор действия фундаментальных антиобъектов
$\mathbb{S}^*$	множество векторов действия фундаментальных антиобъектов
S^*	вектор действия промежуточных антиобъектов
$\mathbb{S}^*_1$	множество векторов действия промежуточных антиобъектов
$\mathfrak{S}^*$	вектор действия вторых промежуточных антиобъектов
$\mathbb{S}^*_2$	множество векторов действия вторых промежуточных антиобъектов
T	постоянная времени
$\mathbb{T}$	кинематическая алгебра
$\mathbb{T}_2$	вторая кинематическая алгебра
$\mathbb{T}_3$	третья кинематическая алгебра
$\mathbf{w}^{K_2K_1}{}_I$	второй момент фундаментального объекта
$w^{KK_2K_1}{}_I$	координаты второго момента фундаментального объекта
$\mathbf{x}$	вектор пространства-времени
$\mathbf{x}^*$	вектор сопряженного пространства-времени
X_3	геометрическое пространство
$X_4,\ X$	пространство-время СТО
X^*	сопряженное пространство-время СТО
$\mathbb{X}$	обобщенное пространство-время
$\mathbb{X}^*$	сопряженное обобщенное пространство-время
$\overset{n}{\otimes} X$	тензорная степень n-го порядка пространства X
$\overset{n}{\otimes} X^*$	тензорная степень n-го порядка пространства X^*
$\otimes X$	пространство контравариантных тензоров
$\otimes X^*$	пространство ковариантных тензоров
${}_r\mathbb{X}$	правая универсальная контравариантная алгебра
${}_l\mathbb{X}$	левая универсальная контравариантная алгебра
$\mathbb{X}_L$	пространство-время лептона
χ	волновая функция пространства-времени
χ^M	координаты волновой функции пространства-времени
Y	искривленное четырехмерное пространство-время

$\mathcal{Y}$	вектор искривленного пространства
$\mathbb{Y}$	обобщенное искривленное пространство-время
Ω	постоянная угловой скорости
Ω_T	постоянная телесной угловой скорости
ψ	волновая функция фундаментального объекта
ψ^K	координаты волновой функции фундаментального объекта
ψ_1	волновая функция промежуточного объекта
${\psi^I}_K$	координаты волновой функции промежуточного объекта
ψ_2	волновая функция промежуточного объекта второго рода
${\psi^I}_{KL}$	координаты волновой функции промежуточного объекта второго рода

Часть 1
Система отсчета. Кинематика

Глава 1.1 Пространство-время. Общие представления

I. ПЕРВИЧНЫЕ ПОНЯТИЯ, СУЖДЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Физическая реальность включает в себя пространственные и временные явления. Эти явления изучает раздел физики – кинематика.

1. Первичные понятия и суждения

Первичными понятиями кинематики являются *тело*, *процесс*, *движение*. Опыт предоставляет *множество* тел, процессов и движений. Первичным суждением, связывающим первичные понятия, является следующее: тела и процессы *движутся*. Эти понятия и суждение, по существу, подходят для описания самых разнообразных явлений. Под движением в общем случае можно понимать любое отношение нескольких тел, приводящее к их изменению. В физике, однако, изучается значительно более узкий круг явлений.

2. Тела и процессы

Прежде всего потребуем, чтобы оба множества тел и процессов составляли множества в математическом смысле. Тем самым на множества тел и процессов распространяются понятия, аксиомы и определения теории множеств. К ним, в частности, относится понятие *подмножества*. Для введения этого понятия снабдим тела и процессы *качеством*. *Качество* позволяет выделять из множества тел и процессов подмножества согласно определению: подмножеством E называется множество тел (или процессов), снабженных качеством e. Качество e не меняется при переходе от одного элемента подмножества к другому, в этом смысле оно может быть названо *инвариантом* подмножества.

Далее введем понятие *отображения* $f : A \to B$ или $B = f(A)$ подмножества тел (процессов) A в подмножество тел (процессов) B. Пусть подмножество тел (процессов) A, характеризуемое качеством a, отображается в подмножество тел (процессов) B, причем подмножество B также может быть охарактеризовано качеством a. Тогда качество a называется *инвариантом отображения* f. *Число* представляет собой инвариант взаимно однозначных отображений множеств.

Следующую конкретизацию множества тел и процессов свяжем с привлечением таких понятий, как *дальше*, *ближе* для тел и *раньше*, *позже* для процессов. Для этого на множествах пар тел и пар процессов введем *бинарные отношения* со свойствами *отношения порядка*. Под бинарным отношением понимается качество, свойственное парам тел или процессов, выделяющее эти пары в подмножество. Если x и y – тела, а $\leq$, $=$, $\geq$ – символы отношения порядка, то запись

$$x \geq y$$

означает, что тело x находится дальше тела y, а выражение

$$x \leq y$$

означает, что тело x находится ближе тела y; выражение

$$x = y$$

означает, что тело x находится там же, где и тело y. Если t и s – процессы, то запись

$$t \geq s$$

означает, что процесс t происходит позже процесса s, выражение

$$t \leq s$$

соответствует тому, что процесс t происходит раньше процесса s, а выражение

$$t = s$$

означает, что процессы t и s происходят одновременно. Необходимо отметить, что введение отношения порядка на множествах тел и процессов означает, что установлен способ определения близости между телами и способ определения одновременности процессов.

Свойства отношения порядка заключаются в следующем.

1. Если для тел (процессов) x и y имеет место $x \geq y$, а для тел (процессов) y и z выполняется $y \geq z$, то $x \geq z$.

2. Если $x \geq y$, а $y \geq x$, то $x = y$.

Множество тел, наделенное отношением порядка (упорядоченное множество), назовем *пространством*. Точнее нужно сказать так: *пространство* это *инвариантное содержание*[1] всякого упорядоченного множества тел. *Конкретное* упорядоченное множество тел это *форма представления* пространства.

Упорядоченное множество процессов назовем *временем*. Точнее нужно сказать так: *время* это *инвариантное содержание*[2] всякого упорядоченного множества процессов. *Конкретное* упорядоченное множество процессов это *форма представления* времени.

Объединение пространства и времени назовем *пространством-временем*[3].

3. Движение тел и процессов

Перейдем к конкретизации представления о движении тел и процессов.

Назовем тела, составляющие некоторое подмножество, *неподвижными* друг относительно друга, если отношение порядка на этом подмножестве не меняется. И наоборот, тела называются *движущимися* друг относительно друга, если отношение порядка меняется. Назовем процессы, составляющие некоторое подмножество, *установившимися*, если отношение порядка на указанном подмножестве не меняется, и *неустановившимся*, если это условие не выполняется.

Уточним далее представление о пространстве-времени, потребовав, чтобы тела, составляющие пространство, были неподвижными друг относительно друга, а процессы, составляющие время, были установившимися.

Пусть даны два пространства-времени X и Y, каждое из которых состоит из неподвижных друг по отношению к другу тел и установившихся друг по отношению к другу процессов. Пусть после некоторого изменения отношения порядка на X образуется пространство-время Y. Указанное изменение будем называть *движением* пространства-времени X. Пространство-время X – это исходная конфигурация тел и процессов, приходящих в движение, а пространство-время Y – это конфигурация тел и процессов, возникающая в результате движения. Отображение $f : X \to Y$ или $Y = f(X)$, вызванное изменением отношения порядка на X, приводящим к пространству-времени Y, назовем *преобразованием* пространства-времени X в пространство-время Y. Будем считать, что движение определено, если определено преобразование f. Таким образом, мы отождествляем движение как физическое явление и преобразование $f\colon X \to Y$ $(Y = f(X))$ как элемент математики. Пространство-время X, по отношению к которому определяется движение[4], назовем *системой отсчета*. Пространство-время Y, появляющееся в результате движения, назовем *движущимся пространством*.

Пусть даны движения $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : Y \to Z$. Движение $f\colon X \to Z$ будем называть *композицией*, или *произведением движений* f_1 и f_2 и записывать закон композиции движений следующим образом:

$$f = f_2 \circ f_1 \,.$$

К описанию движения можно подойти иначе. Пусть после некоторого изменения отношения порядка на движущемся пространстве Y образуется система отсчета X. Такому изменению отношения порядка соответствует преобразование движущегося пространства Y в систему отсчета X, которое обозначим F:

$$X = F(Y) \,.$$

Пусть даны движения $F_2 : Z \to Y$ и $F_1 : Y \to X$. Движение $f\colon Z \to X$ будем называть *композицией*, или *произведением движений* F_2 и F_1 и записывать закон композиции движений следующим образом:

$$F = F_1 \circ F_2 \,.$$

Введем *единичное* движение e – движение, при котором отношение порядка на множестве тел и процессов не меняется. Очевидно, что

$$F \circ f = e \quad \text{и} \quad f \circ F = e \,.$$

Введем *обратное* движение f^{-1} согласно условию

$$f \circ f^{-1} = e \,.$$

Введем *обратное* движение F^{-1} согласно условию

$$F \circ F^{-1} = e \,.$$

Тогда из предыдущего следует

$$F = f^{-1} \quad \text{и} \quad f = F^{-1} \,.$$

В результате введенное таким образом множество движений составляет *группу*, которую будем называть *группой движений* обозначать символом $\mathcal{F}$. Далее, говоря о движениях тел и процессов, будем подразумевать группу преобразований $\mathcal{F}$ пространства-времени.

---

[1] Содержание, присущее всякому упорядоченному множеству тел.

[2] Содержание, присущее всякому упорядоченному множеству процессов.

[3] Объединение пространства и времени в один объект *пространство-время* на рассматриваемом этапе представляется искусственным. Однако с введением постулатов специальной теории относительности такое объединение приобретает конструктивный смысл.

[4] или, другими словами, результирующее пространство-время Y.

Заметим, что определение пространства-времени X как системы отсчета, а пространства-времени Y как движущегося пространства является условным. Можно, напротив, определить пространство-время Y как систему отсчета, тогда пространство-время X определится как движущееся пространство. В такой возможности заключается принцип отностельности движения: пространство-время Y движется относительно пространства-времени X, а пространство-время X движется относительно пространства-времени Y.

Иногда удобно ввести понятие *наблюдатель* из условия: если наблюдатель находится в пространстве X, то X – система отсчета, а Y – движущееся пространство и, напротив, если наблюдатель находится в пространстве Y, то Y – система отсчета, а X – движущееся пространство.

3.1. Движение как процесс

В частном случае *движение* как *изменение* отношения порядка на множестве тел можно рассматривать *как процесс*. На множестве таких движений можно ввести свое отношение порядка. Тогда указанное упорядоченное множество движений можно рассматривать как конкретное упорядоченное множество процессов, иначе говоря как форму представления времени. Например, движение стрелки часов относительно циферблата это форма представления времени.

II. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Пусть дано упорядоченное множество тел и процессов X, называемое нами пространством-временем, и некоторое упорядоченное подмножество тел и процессов A_1. Тогда для подмножества A_1 относительно пространства-времени X определяются верхняя и нижняя грани $\sup_x A_1$ и $\inf_x A_1$. Тела и процессы, выделенные верхней и нижней гранями, назовем *вложенными* в пространство-время X, а само X – *составным*. На множестве составных и вложенных тел и процессов введем дополнительное отношение порядка: если a и b тела этого множества и b вложено в a, то $a > b$ означает, что тело a больше вложенного тела b. Если t и s процессы и s вложено в t, то $t > s$, означает, что процесс t продолжительнее процесса s, или процесс s короче процесса t. $a = b$, $t = s$ означает, что тела a и b, процессы t и s одинаковы.

Обобщим представление о составном теле (процессе), положив, что каждое тело и процесс являются множеством *элементарных* тел и процессов. Элементарное тело назовем *точкой*, элементарный процесс – *событием*.

Следующий шаг в развитии понятий *тело*, *процесс*, *пространство-время* состоит в утверждении, что каждое тело и процесс представляет собой *топологическое пространство*. То есть, каждой точке (событию) x тела (процесса) A можно поставить в соответствие *фундаментальное семейство подмножеств $B(A)$ – базу открытых окрестностей*. Таким образом, пространство-время представляет собой упорядоченное топологическое множество. Вместе с понятием топологии в наше построение входят такие понятия как *внутренняя* и *внешняя* точки (события), *граничная* точка (событие), *предельная* точка (событие), *компактные*, *связные* множества точек и событий. Понятия порядка и топологии позволяют развить представление об отображении одного множества тел и процессов на другое. Отображение может быть снабжено дополнительными характеристиками. Оно может быть *монотонно возрастающим*, *монотонно убывающим*, *непрерывным*.

Заметим, что введенные столь общим образом отношение порядка и топология допускают множество конкретных реализаций.

Далее можно ввести общие представления о *сравнении* двух отношений порядка и двух топологий. А именно, можно говорить о *более* и *менее сильном* отношении порядка и о *более* и *менее сильной* топологии. По аналогии с понятием более сильной топологии назовем отношение порядка R_1 более сильным по сравнению с отношением порядка R_2, если для любых точек (событий) a и b, связанных отношением $a\,R_2\,b$, выполняется отношение $a\,R_1\,b$.

Заметим также, что свойства множества точек и событий зависят от выбранных отношений порядка и топологии. Например, одно и то же множество точек может быть компактным пространством по отношению к одной базе открытых окрестностей и некомпактным по отношению к другой. Понятие граничных точек и событий позволяет ввести понятия *касающиеся* тела и *касающиеся* процессы. Под касающимися телами подразумеваются тела, общие точки которых являются граничными. Под касающимися процессами подразумеваются процессы, общие события которых являются граничными. Далее будем считать, что пространство-время состоит только из касающихся тел и процессов.

III. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК АФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Из движений тел и процессов выделим те, которые составляют *просто транзитивную абелеву группу*.[5]

---

[5] Группа $\mathcal{F}$, действующая на пространстве, называется *транзитивной*, если любая точка пространства преобразуется в любую другую точку элементом группы. Если преобразование любой точки пространства в любую другую точку осуществляется единственным элементом группы $\mathcal{F}$, то такая группа называется *просто транзитивной*. Если любая точка пространства не может быть преобразована в любую другую точку пространства элементом группы, то такая группа

Назовем эти движения *сдвигами* и будем считать, что пространство-время снабжено группой сдвигов. А так как пространство-время является топологическим пространством, то, следовательно, группу сдвигов следует считать непрерывной. Сдвиги можно описать с помощью отображения пространства-времени, движущегося посредством сдвигов, на пространство-время, принятое за систему отсчета. Сдвиги позволяют построить пространство-время из некоторого набора тел и процессов. Для этого введем представление о *линии сдвигов*, под которой будем понимать множество точек-событий системы отсчета, в которое отображается точка-событие, совершающая движение под действием конечного непрерывного преобразования группы сдвигов. Пару точек-событий (A, A_1), где A точка-событие, которая под действием сдвига отображается в точку-событие A_1, и отрезок линии сдвигов, заключенный между этими точками-событиями, назовем *вектором* AA_1. Вектор, с одной стороны, – элемент (тело, процесс) пространства-времени, а, с другой, – образ сдвига. Закон композиции на группе сдвигов и в пространстве-времени можно записать как сложение векторов:

$$AA_2 = AA_1 + A_1A_2\,. \tag{1}$$

Вектор AA_1 называется нулевым, если точка A совпадает с точкой A_1. Для нулевого вектора имеют место соотношения

$$AA + AA_1 = AA_1 + A_1A_1 = AA_1\,.$$

Каждому вектору AA_1 соответствует *обратный* вектор A_1A, для которого выполняется

$$AA_1 + A_1A = AA\,.$$

Вышеуказанные соотношения представляют собой аксиомы *афинного* пространства. В результате пространство-время выступает как *афинное* пространство.

1. Пространство-время как четырехмерное векторное пространство

Определим равенство векторов афинного пространства-времени следующим образом: вектор AA_1, выходящий из точки-события A и вектор BB_1, выходящий из точки-события B, называются равными друг другу, если им соответствует одно преобразование группы сдвигов. Равные векторы целесообразно обозначать одним символом. Например,

$$AA_1 = BB_1 \equiv \mathbf{x}\,.$$

Определенное так равенство векторов позволяет представить группу сдвигов и пространство-время как векторное пространство. Действительно, пусть с точкой A связано соотношение (1) а с точкой B связано соотношение

$$BB_2 = BB_1 + B_1B_2\,.$$

И пусть

$$AA_2 = BB_2 \equiv \mathbf{x},$$
$$AA_1 = BB_1 \equiv \mathbf{x}_1,$$
$$A_1A_2 = B_1B_2 \equiv \mathbf{x}_2.$$

Тогда закон композиции векторов

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \tag{2}$$

можно рассматривать независимо от точки пространства-времени. Таким образом, пространство-время выступает как множество векторов, снабженных законом композиции (2). В силу ассоциативности и коммутативности группового закона группы сдвигов закон композиции векторов ассоциативен и коммутативен. Введенное равенство векторов позволяет определить не только закон композиции векторов, но и закон умножения вектора на число. Действительно, пусть задан вектор AB с началом в точке A и концом в точке B, а из точки B выходит вектор BD с концом в точке D, равный вектору AB. Тогда вектор AD составлен из двух равных друг другу векторов. И в общем случае произвольный вектор всегда можно составить из нескольких равных друг другу векторов. Тем самым на пространстве-времени введено умножение вектора на число:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e} \cdot x\,.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$ – множеству действительных чисел. Из ассоциативности и коммутативности группового закона композиции следуют соотношения

$$(a \cdot b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (b \cdot \mathbf{x})$$

и

$$a \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = a \cdot \mathbf{x}_1 + a \cdot \mathbf{x}_2,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$. Вышеприведенные соотношения составляют аксиомы векторного пространства. Заметим, что для простоты в пределах настоящей Главы векторы пространства-времени и координаты точек-событий рассматриваются как безразмерные величины.

называется *интранзитивной*. Группа преобразований называется абелевой, если ее элементы перестановочны.

Например, группа сдвигов и вращений на евклидовой плоскости является транзитивной, но не просто транзитивной, так как некоторые пары точек могут быть связаны между собой несколькими, а не единственным, элементами группы; группа вращений на евклидовой плоскости не является транзитивной, так как не всякие две произвольные точки связаны элементом группы.

Группа F, действующая на времени, называется *просто транзитивной*, если любое событие преобразуется в любое другое позднее событие единственным элементом группы.

С введением векторного пространства в рассмотрение входят такие понятия как *базисные векторы*

$$\mathbf{e}_1\,, \quad \mathbf{e}_2\,, \quad \mathbf{e}_3\,, \quad \tau\,,$$

число измерений пространства, *координаты* вектора

$$x^1\,, \quad x^2\,, \quad x^3\,, \quad t\,.$$

Система, состоящая из точки-события и базисных векторов, отнесенных к этой точке, называется *репером*. *Поле* реперов, полученное из исходного преобразованием группы сдвигов, представляет собой реализацию системы отсчета.

Числа x^i, поставленные в соответствие точкам-событиям пространства-времени при записи вектора через базисные векторы, назовем *нормальной системой координат*. Очевидно, что принятым базисным векторам однозначно соответствует нормальная система координат и наоборот. Заметим, что так же, как отношение порядка и топология, базисные векторы определяются неоднозначно, поэтому в выборе нормальной системы координат существует произвол. Однако каждая из нормальных систем координат обладает следующими инвариантными свойствами.

1. *Координатные* линии – линии, вдоль которых меняется только одна из координат,– являются линиями сдвигов.

2. Сложение сдвигов (векторов) записывается через сложение координат граничных точек и событий векторов, которые приводятся в соприкосновение в результате слагаемых движений:

$$x'^i = x^i + a^i.$$

1.1. Линии сдвигов в нормальной системе координат

Пусть $\mathbf{e}$ – базисный вектор вдоль некоторой линии сдвигов. Тогда уравнение этой линии сдвигов имеет вид

$$\mathbf{x}(x) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{e}\cdot x\,.$$

Здесь векторы $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{e}$ не зависят от нормальной координаты x. Отсюда имеем следующие уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}(x)}{dx} = \mathbf{e} \tag{3}$$

и

$$\frac{d^2\mathbf{x}(x)}{dx^2} = 0\,. \tag{4}$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение линии сдвигов. Оно носит инвариантный характер и не зависит от системы координат.

Пусть

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_i\cdot k^i\,,$$

где $k^i \in \mathbb{R}$ – проекции базисного вектора $\mathbf{e}$ на базисные векторы $\mathbf{e}_i$. Тогда

$$\mathbf{x}(x) = \mathbf{e}\cdot(x^i_0 + k^i\cdot x)$$

и уравнение линии сдвигов по отношению к нормальным координатам имеет вид

$$x^i(x) = x^i_0 + k^i\cdot x\,.$$

Отсюда дифференциальное уравнение линии сдвигов по отношению к нормальным координатам имеет вид

$$\frac{d^2x^i(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dk^i}{dx} = 0\,.$$

Это уравнение не является инвариантным и в указанной форме записывается только для нормальной системы координат.

1.2. Линии сдвигов в произвольной системе координат

Введем на пространстве-времени произвольную систему координат, выполнив отображение точек пространства-времени в числа y^α[6]. Так как координаты x и y определены на одних и тех же точках, то, следовательно, определены функции

$$x^i(y^\alpha)\,.$$

Уравнение (3) приобретает следующий вид[7]

$$\frac{d\mathbf{x}(x)}{dx} = \mathbf{e}_i\cdot x^i_{,\beta}\cdot\frac{dy^\beta}{dx} = \mathbf{e}_i\cdot k^i\,.$$

Отсюда уравнение (4) приобретает следующий вид

$$\mathbf{e}_i\cdot\left(x^i_{,\beta}\cdot\frac{d^2y^\beta}{dx^2} + \frac{dx^i_{,\beta}}{dx}\cdot\frac{dy^\beta}{dx}\right) = 0$$

или

$$x^i_{,\beta}\cdot\frac{d^2y^\beta}{dx^2} + x^i_{,\beta,\gamma}\cdot\frac{dy^\beta}{dx}\cdot\frac{dy^\gamma}{dx} = 0\,. \tag{5}$$

Введем производные

$$y^\alpha_{,i}$$

---

[6] С физической точки зрения введение такого отображения недопустимо, пока не определена процедура измерения пространственно-временных объектов, приводящая к указанной системе координат.

[7] Мы используем часто применяющееся обозначение: запятая перед индексом означает дифференцирование по координате с указанным индексом. Пример

$$x^i_{,\beta} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial y^\beta}\,.$$

и умножим на них выведенное уравнение (5), выполнив соответствующую свертку. При этом учтем, что

$$y^{\alpha}_{,i} \cdot x^{i}_{,\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \, .$$

Получим

$$\frac{d^2 y^{\alpha}}{dx^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \cdot \frac{dy^{\beta}}{dx} \cdot \frac{dy^{\gamma}}{dx} = 0 \, , \tag{6}$$

где введено обозначение

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = y^{\alpha}_{,i} \cdot x^{i}_{,\beta,\gamma} \, .$$

Это уравнение есть уравнение линии сдвигов в произвольной системе координат. Нужно отметить, что в произвольной системе координат уравнение линии сдвигов теряет свой наглядный смысл постоянства проекций k^i вдоль линии сдвигов. Кроме того, всегда нужно иметь в виду, что в записи (6) y – это произвольные координаты, а x – это нормальная координата на линии сдвигов.

IV. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

1. Геометрическое пространство как евклидово пространство

На геометрическом пространстве X_3 введем закон композиции, который каждой паре векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ ставит в соответствие число, обозначаемое следующим образом:

$$\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \, .$$

Пусть это число не зависит от порядка используемых сомножителей. И пусть этот закон композиции связан с законами векторного пространства[8] следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} (a \cdot \mathbf{x_2}) \cdot \mathbf{x_1} = \mathbf{x_2} \cdot (a \cdot \mathbf{x_1}) = a \cdot (\mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_1}) \, , \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_2 \, . \end{gathered} \tag{7}$$

Такой закон композиции называется *скалярным умножением* векторов, а соответствующее число *скалярным произведением* векторов.

Скалярное произведение с физической точки зрения представляет собой операцию *измерения*. Вектор $\mathbf{x}$ геометрического пространства X_3 представляет собой *измеряемый вектор*. Вектор $\mathbf{e}$ представляет собой *измерительный эталон*. Операция измерения (скалярного произведения) ставит в соответствие вектору $\mathbf{x}$ и эталону $\mathbf{e}$ число $x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}$ – *проекцию* вектора $\mathbf{x}$ на эталон $\mathbf{e}$ – результат измерения. Измерение, рассматриваемое как соответствие между векторами $\mathbf{x}$ и числами x^a, представляет собой отображение геометрического пространства X_3 в множество действительных чисел $\mathbb{R}^3$.

Пусть $\mathbf{x} = AB$ – вектор, соединяющий точки A и B. Пусть $\mathbf{e} = AE$ – вектор, соединяющий точки A и E, причем точка E находится на линии AB. И пусть вектор AE принят за измерительный эталон. Тогда

$$l_{\mathbf{x}} = l_{AB} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e} = \langle AB \, , AE \rangle$$

называется *расстоянием* между точками A и B.

Пусть векторы, участвующие в скалярном произведении, записаны через базисные векторы

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_a \cdot {x_1}^a \, , \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_b \cdot {x_2}^b \, .$$

Здесь $a \, , b = 1, 2, 3$. Тогда в силу (7) имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = (\mathbf{e}_a \cdot {x_2}^a) \cdot (\mathbf{e}_b \cdot {x_1}^b) = \\ = (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b) \cdot {x_2}^a \cdot {x_1}^b = g_{ab} \cdot {x_2}^a \cdot {x_1}^b \, . \end{gathered}$$

Величина

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b$$

называется *метрическим тензором*. Потребуем, чтобы базисные векторы $\mathbf{e}_a$ удовлетворяли условию *ортонормированности*:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \, , \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \, , \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \, , \\ \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = 0 \quad \text{для} \quad a \neq b \, . \end{gathered}$$

В этом случае метрический тензор имеет вид:

$$g_{ab} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Скалярное произведение вектора на себя называется *квадратом длины* вектора:

$$x^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{ab} \cdot x^a \cdot x^b \, .$$

Движение, отличное от сдвига и сохраняющее квадрат длины вектора, называется *поворотом*. Таким образом, для поворота имеет место

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 \, . \tag{8}$$

Здесь x^a – координаты поворачиваемого вектора в системе отсчета, x'^a – координаты повернутого вектора в системе отсчета.

2. Движение геометрического пространства. Поворот

Для простоты рассмотрим двумерное геометрическое пространство (плоскость) X_2. Оно здесь представляет собой систему отсчета. Вектор в этом пространстве имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \cdot x^1 + \mathbf{e}_2 \cdot x^2 \, .$$

[8] сложением векторов и умножением вектора на число.

Пусть при движении этот вектор преобразуется в вектор $\mathbf{x}'$ пространства X'_2 и пусть вектор $\mathbf{x}'$ записывается через базисные векторы в системе отсчета следующим образом

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}_1 \cdot x'^1 + \mathbf{e}_2 \cdot x'^2 .$$

Отсюда движение можно определить преобразованием $\mathcal{F} : X'_2 \to X_2$. В простейшем случае преобразование является линейным. При этом

$$\begin{aligned} x^1 &= u^1{}_1 \cdot x'^1 + u^1{}_2 \cdot x'^2 , \\ x^2 &= u^2{}_1 \cdot x'^1 + u^2{}_2 \cdot x'^2 . \end{aligned} \tag{9}$$

Из движений, задаваемых линейным преобразованием, выделим те, которые имеют инвариантом (сохраняют) квадрат длины вектора, то есть преобразования, для которых

$$(\mathbf{x}')^2 = (\mathbf{x})^2$$

или

$$g_{11} \cdot x'^1 \cdot x'^1 + g_{22} \cdot x'^2 \cdot x'^2 = g_{11} \cdot x^1 \cdot x^1 + g_{22} \cdot x^2 \cdot x^2$$

или

$$(x'^1)^2 + (x'^2)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 .$$

Подставляя сюда выражения (9), получим соотношения, накладываемые на коэффициенты линейного преобразования, при которых линейное преобразование является поворотом

$$\begin{aligned} &(u^1{}_1)^2 + (u^2{}_1)^2 = 1 , \\ &u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 = 0 , \\ &(u^1{}_2)^2 + (u^2{}_2)^2 = 1 . \end{aligned} \tag{10}$$

Из них следует, что коэффициенты преобразования являются функциями одного параметра, который обозначим φ

$$u = u(\varphi)$$

и который называется *углом поворота*. Решение соотношений (10) должно удовлетворять начальному условию, согласно которому при отсутствии движения вектор $\mathbf{x}'$ должен совпадать с вектором $\mathbf{x}$, то есть в этом случае должно выполняться

$$u^1{}_1 = u^2{}_2 = 1 , \quad u^1{}_2 = 0 , \quad u^2{}_1 = 0 .$$

Соотношения (10) выполняются для функций[9]

$$u^1{}_1(\varphi) = u^2{}_2(\varphi) = \cos(\varphi) , \quad u^1{}_2(\varphi) = -u^2{}_1(\varphi) = \sin(\varphi) .$$

Отсюда поворот представлен преобразованием

$$\begin{aligned} x^1 &= \cos(\varphi) \cdot x'^1 + \sin(\varphi) \cdot x'^2 , \\ x^2 &= -\sin(\varphi) \cdot x'^1 + \cos(\varphi) \cdot x'^2 . \end{aligned}$$

[9] Вычисление коэффициентов преобразования приведено в Главе 1.5, Раздел IV.4.

3. Движение пространства-времени

Для простоты рассмотрим двумерное пространство-время X_{1+1}, в котором одной из координат является геометрическая координата, а другой координатой является время. Здесь это пространство-время представляет собой систему отсчета. Вектор в этом пространстве имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \cdot x^1 + \tau \cdot t .$$

Пусть при движении пространства-времени этот вектор преобразуется в вектор $\mathbf{x}'$ пространства-времени X'_{1+1} и пусть вектор $\mathbf{x}'$ записывается через базисные векторы в системе отсчета следующим образом:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}_1 \cdot x'^1 + \tau \cdot t' .$$

Отсюда движение можно определить преобразованием $\mathcal{F} : X'_{1+1} \to X_{1+1}$. В простейшем случае преобразование является линейным. При этом

$$\begin{aligned} x^1 &= u^1{}_1 \cdot x'^1 + u^1{}_4 \cdot t' , \\ t &= u^4{}_1 \cdot x'^1 + u^4{}_4 \cdot t' . \end{aligned} \tag{11}$$

Из движений пространства-времени, задаваемых линейным преобразованием, выделим два фундаментальных случая в зависимости от принимаемого инварианта движения. Один из случаев назовем принципом относительности Галилея, а другой принципом специальной относительности Эйнштейна.

3.1. Принцип относительности Галилея

Из движений пространства-времени, задаваемых линейным преобразованием (11), выделяются те, которые имеют инвариантом (сохраняют) время, то есть преобразования, для которых

$$t = t' . \tag{12}$$

Время назовем инвариантом относительности Галилея.

Из равенства (12) следует $u^4{}_1 = 0$, $u^4{}_4 = 1$ и выражения (11) принимают вид

$$\begin{aligned} x^1 &= u^1{}_1 \cdot x'^1 + u^1{}_4 \cdot t' , \\ t &= t' . \end{aligned}$$

Преобразование должно удовлетворять начальному условию, согласно которому при отсутствии движения пространство-время X'_{1+1} должно совпадать с X_{1+1}, то есть в этом случае должно выполняться

$$u^1{}_1 = 1 .$$

Поэтому преобразование пространства-времени приобретает вид

$$\begin{aligned} x^1 &= x'^1 + u^1{}_4 \cdot t' , \\ t &= t' . \end{aligned}$$

В этом выражении переобозначим коэффициент ${u^1}_4$:

$$ {u^1}_4 \to v $$

и определим его как скорость движения пространства-времени X'_{1+1} относительно системы отсчета X_{1+1}. В результате рассматриваемое движение пространства-времени описывается преобразованием

$$ x^1 = x'^1 + v \cdot t' , \tag{13} $$
$$ t = t' . \tag{14} $$

Фундаментальное значение рассматриваемого движения пространства-времени состоит в том, что для него выполняется *принцип относительности Галилея*: физические явления инвариантны относительно движения пространства-времени, задаваемого преобразованием (13), (14).

3.2. Принцип специальной относительности Эйнштейна

Для системы отсчета X_{1+1} сформируем квадрат длины вектора

$$ (x)^2 = (x^1)^2 - (c \cdot t)^2 . \tag{15} $$

Коэффицтиент c – это физическая постоянная – *скорость света*. Аналогично для движущегося пространства-времени сформируем свой квадрат длины вектора

$$ (x')^2 = (x'^1)^2 - (c \cdot t')^2 . $$

Из движений пространства-времени, задаваемых линейным преобразованием (11), выделяются те, которые имеют инвариантом (сохраняют) квадрат длины вектора. То есть преобразования, для которых

$$ (x')^2 = (x)^2 $$

или

$$ (x'^1)^2 - (c \cdot t')^2 = (x^1)^2 - (c \cdot t)^2 . \tag{16} $$

Указанный квадрат длины вектора назовем инвариантом специальной относительности Эйнштейна.

Заметим, что

1) вместе с квадратом длины вектора инвариантом рассматриваемого движения пространства-времени является скорость света;

2) при $c \to \infty$

$$ (c \cdot t')^2 \gg (x'^1)^2 \text{ и } (c \cdot t)^2 \gg (x^1)^2 $$

и инвариант относительности Эйнштейна (16) сводится к инварианту относительности Галилея (12) и рассматриваемое в этом Разделе движение должно сводиться к уравнениям (13), (14).

Движение, сохраняющее квадрат длины вектора (16), называется *бустом*. Для инварианта (16) удобно переписать линейное преобразование (11) в следующем виде:

$$ \begin{aligned} x^1 &= {u^1}_1 \cdot x'^1 + {u^1}_4 \cdot (c \cdot t') , \\ (c \cdot t) &= {u^4}_1 \cdot x'^1 + {u^4}_4 \cdot (c \cdot t') . \end{aligned} \tag{17} $$

Подставляя выражения (17) в (16), получим соотношения, накладываемые на коэффициенты линейного преобразования, при которых линейное преобразование является бустом:

$$ \begin{aligned} &({u^1}_1)^2 - ({u^4}_1)^2 = 1 , \\ &{u^1}_1 \cdot {u^1}_4 - {u^4}_1 \cdot {u^4}_4 = 0 , \\ &({u^4}_4)^2 - ({u^1}_4)^2 = 1 . \end{aligned} \tag{18} $$

Отсюда следует, что коэффициенты преобразования являются функциями одного параметра, который обозначим ψ:

$$ u = u(\psi) . $$

Решение соотношений (18) должно удовлетворять начальному условию, согласно которому при отсутствии движения пространство X'_{1+1} должно совпадать с X_{1+1}, то есть в этом случае должно выполняться

$$ {u^1}_1 = {u^4}_4 = 1 , \quad {u^1}_4 = 0 , \quad {u^4}_1 = 0 . $$

Соотношения (18) выполняются для функций[10]

$$ {u^1}_1(\psi) = {u^4}_4(\psi) = \cosh(\psi), \quad {u^1}_4(\psi) = {u^4}_1(\psi) = \sinh(\psi). $$

Отсюда буст представлен преобразованием

$$ x^1 = \cosh(\psi) \cdot x'^1 + \sinh(\psi) \cdot (c \cdot t') , \tag{19} $$
$$ (c \cdot t) = \sinh(\psi) \cdot x'^1 + \cosh(\psi) \cdot (c \cdot t') . \tag{20} $$

Запишем уравнение (19) в следующем виде:

$$ x^1 = \cosh(\psi) \cdot (x'^1 + \tanh(\psi) \cdot (c \cdot t')) $$

и учтем, что при $c \to \infty$ оно должно совпадать с уравнением (13) относительности Галилея. Отсюда следует, что при $c \to \infty$

$$ \cosh(\psi) \to 1 $$

и

$$ \tanh(\psi) \to \frac{v}{c} . $$

[10] Вычисление коэффициентов преобразования приведено в Главе 1.5., Раздел IV.4.

Здесь необходимо сделать более сильное предположение, что[11]

$$\tanh(\psi) = \frac{v}{c} \tag{21}$$

не только для $c \to \infty$, но и для конечного значения скорости света. Это соотношение устанавливает связь между параметром буста ψ и скоростью движения в относительности Галилея. Из (21) следует

$$\cosh(\psi) = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(\psi)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

и

$$\sinh(\psi) = \frac{\tanh(\psi)}{\sqrt{1-\tanh^2(\psi)}} = \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Подставляя полученные выражения в (19) и (20), получим преобразования Лоренца, которые описывают движение пространства-времени в специальной относительности Эйнштейна,

$$x^1 = \frac{x'^1 + v\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{22}$$

$$t = \frac{\frac{v}{c^2}\cdot x'^1 + t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{23}$$

Фундаментальное значение рассматриваемого движения пространства-времени состоит в том, что для него выполняется *принцип специальной относительности Эйнштейна*: физические явления, включая электромагнитные явления, инвариантны относительно движения пространства-времени, задаваемого преобразованием (22), (23).

4. Пространство-время как евклидово пространство

Изложенное выше позволяет рассматривать пространство-время как евклидово пространство. Прежде всего, пространство-время X_4 является четырехмерным векторным пространством. Вектор этого пространства удобно записать в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1\cdot x^1 + \mathbf{e}_2\cdot x^2 + \mathbf{e}_3\cdot x^3 + \mathbf{e}_4\cdot x^4\,,$$

где введено обозначение $x^4 = c\cdot t$, а $\mathbf{e}_4$ – это базисный вектор вдоль времениподобной координаты. Векторное пространство X_4 выступает как евклидово пространство благодаря тому, что оно снабжено скалярным умножением векторов, которое каждой паре векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из X_4 ставит в соответствие число

$$\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1$$

– скалярное произведение – со свойствами (7).

Пусть векторы, участвующие в скалярном произведении, записаны через базисные векторы

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_i\cdot {x_1}^i\,,\quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_k\cdot {x_2}^k\,.$$

Здесь $i\,,k = 1,2,3,4$. Тогда в силу (9) имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1 &= (\mathbf{e}_i\cdot {x_2}^i)\cdot(\mathbf{e}_k\cdot {x_1}^k) = \\ &= (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k)\cdot {x_2}^i\cdot {x_1}^k = g_{ik}\cdot {x_2}^i\cdot {x_1}^k\,.\end{aligned}$$

Величина

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_i$$

по-прежнему называется *метрическим тензором*. Квадрат длины четырехмерного вектора запишется следующим образом:

$$x^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = x^i\cdot x^k\cdot g_{ik}\,.$$

Из сравнения этого выражения с соотношением (15) определяется скалярное произведение гипотетического базисного вектора $\mathbf{e}_4$ на себя

$$g_{44} = \mathbf{e}_4\cdot\mathbf{e}_4 = -1\,.$$

В результате условие ортонормированности обобщается следующим образом:

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = 1\,,\quad \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 1\,,\quad \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 = 1\,,\\ &\mathbf{e}_4\cdot\mathbf{e}_4 = -1\,,\quad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k = 0 \quad \text{для} \quad i\neq k\end{aligned} \tag{24}$$

и метрический тензор имеет вид

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}.$$

В ортонормированном базисе квадрат длины вектора приобретает вид

$$x^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (c\cdot t)^2\,,$$

обобщающий рассмотренный ранее квадрат длины вектора для X_3 и X_{1+1}.

Из движений пространства-времени, задаваемых линейными преобразованиями, выделим те, которые сохраняют квадрат длины вектора, то есть преобразования $X'_4 \to X_4$ (или $X_4 \to X'_4$), для которых имеет место

$$\begin{aligned}&(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (c\cdot t)^2 = \\ &= (x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 - (c\cdot t')^2\,.\end{aligned} \tag{25}$$

К ним относятся геометрические повороты в трех плоскостях и бусты вдоль трех геометрических направлений.

[11] Вывод этого соотношения дан в Главе 1.4., Раздел I.1.

Итак, пространство-время рассматривается как четырехмерное векторное пространство X, на котором определено скалярное произведение векторов и, в частном случае, квадрат длины вектора. Для преобразований, сохраняющих квадрат длины вектора, провозглашен принцип относительности Эйнштейна. Поэтому векторное пространство X с указанными дополнениями целесообразно называть пространством-временем *специальной теории относительности (СТО)*.

4.1. Замечание к инвариантности скорости света

Помимо электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света, в физике рассматриваются волновые процессы другой природы, например, распространение звука в воздушной среде, характеризуемое скоростью звука в воздухе. Однако только электромагнитной волне приписывается необыкновенное свойство: скорость ее распространения является инвариантной по отношению к движению тел. Иначе говоря, скорость света является физической константой, не зависящей от движения тела. Отсюда возникает естественный вопрос: чем звуковая волна "хуже" электромагнитной, почему скорость звука нельзя считать инвариантом движения тел? Можно поставить вопрос иначе: как должна выглядеть реальность, чтобы скорость звука сохраняла свое значение (была инвариантом) при движении тел?

Размышления на эту тему приводят к довольно туманному ответу, но содержащему, тем не менее, конструктивный смысл. Видимо, дело заключается в свойствах тел. Если бы тела были сконструированы из воздушной среды, то для таких тел скорость звука являлась инвариантом. И мы имели бы дело с преобразованиями Лоренца, в которые входила бы скорость звука в воздухе, а сама эта скорость была бы предельной для движения тел вышеуказанной природы.

А то, что мы вынуждены приписывать инвариантные свойства скорости света, означает, что тела, с которыми мы имеем дело, образованы из электромагнитной среды. Более того, если найдутся тела, выполненные не из электромагнитной среды, то движение со скоростями, большими, чем скорость света, возможно.

4.2. Замечание о лоренцевых сокращениях

Обратимся к преобразованиям Лоренца (22) и (23). Напомним, что координаты $(x^1,\, t)$ относятся к системе отсчета X, а координаты $(x'^1,\, t')$ относятся к движущемуся пространству X'.

Введем в системе отсчета геометрический отрезок с координатами концов x_2 и x_1. Обозначим длину этого отрезка

$$\Delta x = x_2 - x_1\,.$$

Пусть этот же отрезок имеет в движущемся пространстве координаты концов x'_2 и x'_1. Обозначим длину этого отрезка

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1\,.$$

В соответствии с преобразованием Лоренца (22) имеем

$$\Delta x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta x'\,. \tag{26}$$

Таким образом, с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе отсчета X длина геометрического отрезка в движущемся пространстве X' уменьшается в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Это заключение представляет собой *лоренцево сокращение длины*.

Введем в системе отсчета временной интервал с координатами граничных событий t_2 и t_1. Обозначим этот интервал

$$\Delta t = t_2 - t_1\,.$$

Пусть этот же временной интервал имеет в движущемся пространстве координаты граничных событий t'_2 и t'_1. Обозначим этот временной интервал

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1\,.$$

В соответствии с преобразованием Лоренца (23) имеем

$$\Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t'\,. \tag{27}$$

Таким образом, с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе отсчета X временной интервал в движущемся пространстве X' уменьшается в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Это заключение представляет собой *лоренцево сокращение времени*.

Пусть теперь наблюдатель находится в пространстве X'. Тогда пространство X' представляет собой систему отсчета, а X приобретает статус движущегося пространства. X движется относительно X' в противоположном направлении со скоростью $-v$. Для принятого положения наблюдателя преобразования Лоренца принимают вид:

$$x'^1 = \frac{x^1 - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{28}$$

$$t' = \frac{-\frac{v}{c^2} \cdot x^1 + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{29}$$

Отсюда следует, что для принятого положения наблюдателя геометрический отрезок имеет максимальную длину в пространстве X', а в пространстве X его длина уменьшается в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$:

$$\Delta x' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta x\,. \tag{30}$$

Также для принятого положения наблюдателя временной интервал в движущемся пространстве X уменьшается по отношению к временному интервалу в системе отсчета X' в $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ раз

$$\Delta t' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \Delta t\,. \tag{31}$$

Сравнивая формулы (26) и (30) а также формулы (27) и (31), заключаем, что лоренцевы сокращения это *видимость*, с которой сталкивается наблюдатель, рассматривая движущееся пространство. Отсюда следует, что лоренцевы сокращения не имеют реального (силового) содержания, а являются формой представления движущегося пространства, необходимой для сохранения скорости света как инварианта. Эту ситуацию можно сравнить с той, когда два наблюдателя X и X' рассматривают друг друга через кривое стекло и каждый из наблюдателей видит другого с искажениями. Каждый из наблюдателей видит другого худым и молодым. Кривым стеклом служат преобразования Лоренца. Если наблюдатели находятся по одну сторону от кривого стекла, то искажения отсутствуют.

Приведенные соображения свидетельствуют о том, что лоренцевы сокращения длины и времени являются субъективным фактором, что абсурдно. Подробнее вопрос о недоразумении в общепринятой интерпретации лоренцевых сокращений рассмотрен в Приложении к настоящей Главе.

5. Простейшая алгебра пространства-времени

Объединим евклидово пространство-время X_4 и множество действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{X} = \mathbb{R} + X_4\,.$$

Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ может быть записан следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0 \cdot x^0 + \mathbf{e}_1 \cdot x^1 + \mathbf{e}_2 \cdot x^2 + \mathbf{e}_3 \cdot x^3 + \mathbf{e}_4 \cdot x^4\,,$$

где x^0 – действительное число, а $\mathbf{e}_0$ – базисный вектор, отождествленный с действительной единицей.

Множество $\mathbb{X}$ является алгеброй, потому, что, во-первых, на нем определены аксиомы векторного пространства. Во-вторых, на множестве указанных векторов определена операция умножения, включающая в себя скалярное умножение векторов пространства-времени, умножение векторов пространства-времени на число и умножение действительных чисел. Для базисных векторов умножение определяется следующей таблицей:

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0\,,\\
\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_k\,,\\
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0\,,\\
\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_0\,,\\
\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_0\,,\\
\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_0\,,\\
\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 0 \quad \text{для} \quad i \neq k\,; \quad \text{здесь} \quad i\,, k = 1,\,2,\,3,\,4\,.
\end{gathered}$$

Алгебру $\mathbb{X}$ назовем *простейшей алгеброй пространства-времени*. Квадрат длины вектора в этой алгебре целесообразно положить равным нулю:

$$x^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0\,.$$

Тогда величина

$$(x^0)^2 = (x^4)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

приобретает смысл квадрата *интервала* специальной теории относительности – s. Таким образом, для простейшей алгебры пространства-времени с нулевым квадратом длины 5-векторов

$$(x^0)^2 \equiv s^2 \;-\; \text{квадрату длины 4-вектора}\,.$$

V. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК АФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

1. Пространство-время как афинное пространство 2-векторов

Рассмотрим пространство-время как четырехмерное афинное пространство. Пусть из точки-события A выходит два вектора AB и AC (Рис. 1).

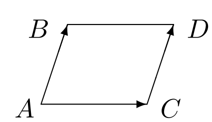


Рис. 1

Пусть под действием конечного непрерывного преобразования группы сдвигов вектор AB движется вдоль вектора AC, причем в результате вектор AB отображается в вектор CD, то есть

$$AB = CD\,.$$

Тогда два вектора AB и CD и поверхность, заключенная между ними, образуют объект, который назовем 2-вектором и обозначим его $ACDB$. Композиция сдвигов с участием вектора AB может быть записана как сложение 2-векторов (Рис. 2)

$$ACDB + CEFD = AEFB\,.$$

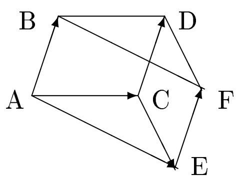


Рис. 2

Вектор $ACDB$ называется нулевым, если либо вектор AB, либо вектор AC равен нулю. Для нулевого вектора выполняется соотношение[12]

$$AABB + AEFB = AEFB\,.$$

Каждому вектору $ACDB$ соответствует *обратный* вектор $CABD$, для которого выполняется

$$ACDB + CABD = AABB\,.$$

Вышеуказанные соотношения представляют собой аксиомы *афинного* пространства. В результате пространство-время выступает как *афинное* пространство 2-векторов.

Определенное в Разделе III.1 настоящей Главы равенство векторов позволяет определить равенство 2-векторов и перейти к векторному пространству 2-векторов, не зависящему от точки-события пространства-времени. Это пространство обозначим X^2. С введением этого векторного пространства в рассмотрение входят такие понятия как 2-вектор, который обозначим $\overset{2}{\mathbf{x}}$, базисные векторы

$$\mathbf{e}_{ik}\,,$$

координаты 2-вектора

$$x^{ik}$$

и разложение 2-вектора по базисным векторам

$$\overset{2}{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_{ik} \cdot x^{ik}\,.$$

2. Пространство-время как афинное пространство n-векторов

Пусть к точке-событию A пространства-времени присоединен 2-вектор и вектор AD, и пусть под действием конечного непрерывного преобразования группы сдвигов 2-вектор движется вдоль вектора AD, причем в результате 2-вектор отображается в 2-вектор, присоединенный к точке-событию D. Тогда начальный 2-вектор (присоединенный к точке-событию A), конечный 2-вектор (присоединенный к точке-событию D) и объем, заключенный между указанными 2-векторами, образуют объект, который назовем 3-вектором. Преобразования группы сдвигов позволяют ввести на множестве 3-векторов операцию сложения, определить нулевой 3-вектор и обратный 3-вектор. Следовательно, пространство-время есть *афинное* пространство 3-векторов.

Определенное в Разделе III.1 настоящей Главы равенство векторов позволяет определить равенство 3-векторов и выделить векторное пространство 3-векторов, не зависящее от точки-события пространства-времени. Это пространство обозначим X^3. С введением этого векторного пространства в рассмотрение входят такие понятия, как 3-вектор, который обозначим $\overset{3}{\mathbf{x}}$, базисные векторы

$$\mathbf{e}_{ikl}\,,$$

координаты 3-вектора

$$x^{ikl}$$

и разложение 3-вектора по базисным векторам

$$\overset{3}{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_{ikl} \cdot x^{ikl}\,.$$

Обобщая по индукции, получим следующую канву рассуждений. Пусть к точке-событию A пространства-времени присоединен $(n-1)$-вектор и вектор AH, и пусть под действием конечного непрерывного преобразования группы сдвигов $(n-1)$-вектор движется вдоль вектора AH, причем в результате $(n-1)$-вектор отображается в $(n-1)$-вектор, присоединенный к точке-событию H. Тогда начальный $(n-1)$-вектор (присоединенный к точке-событию A), конечный $(n-1)$-вектор (присоединенный к точке-событию D) и гиперобъем, заключенный между указанными $(n-1)$-векторами, образуют объект, который назовем n-вектором. Преобразования группы сдвигов позволяют ввести на множестве n-векторов операцию сложения, определить нулевой n-вектор и обратный n-вектор. Следовательно, пространство-время есть *афинное* пространство n-векторов.

Определенное в Разделе III.1 настоящей Главы равенство векторов позволяет также определить равенство n-векторов и выделить векторное пространство n-векторов, не зависящее от точки-события пространства-времени. Это пространство обозначим X^n. С введением этого векторного пространства в наше рассмотрение входят такие понятия как n-вектор, который обозначим $\overset{n}{\mathbf{x}}$, базисные векторы

$$\mathbf{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n}\,,$$

координаты n-вектора

$$x^{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

и разложение n-вектора по базисным векторам

$$\overset{n}{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot x^{i_1 i_2 \ldots i_n}\,.$$

[12] В рассматриваемом случае $AC = 0$.

Максимальный порядок n-векторов равен числу измерений пространства-времени, то есть четырем.

Объединение векторных пространств n-векторов, где $n = 1, 2, 3, 4$, и множества $X^0 = \mathbb{R}$ приводит к векторному пространству

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + X^4\,,$$

которое, в частном случае, является пространством алгебры Клиффорда.

VI. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Первичными понятиями кинематики являются тело, процесс, движение.
- Пространство есть упорядоченное множество тел. Время есть упорядоченное множество процессов. Объединение этих множеств определяется как пространство-время.
- Движение – это преобразование пространства и времени, изменяющее порядок тел и порядок процессов. Движения составляют группу.
- Основополагающим понятием, относящимся к пространству-времени, является просто транзитивная абелева группа движений – группа сдвигов. Группа сдвигов позволяет рассматривать пространство-время как афинное пространство, а затем как векторное пространство.
- Из условия, что координаты в пространстве и времени есть результат измерения, следует, что пространство-время нужно рассматривать как векторное пространство, снабженное скалярным произведением векторов.
- Пространство-время необходимо рассматривать не только как множество точек-событий и направленных отрезков линий, но и множество ориентированных поверхностей, объемов и 4-объемов. Иначе говоря, как пространство алгебры Клиффорда.

VII. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЫВОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Существует два кинематических вывода преобразования Лоренца. Один вывод дан Эйнштейном в его основополагающей статье *"К электродинамике движущихся тел"* (Ann. Phys., 1905, v. 17, pp. 891-921.). Он основан на представлении об *одновременности* событий. Второй вывод восходит к Минковскому и опирается на гиперболическое преобразование координат в псевдоевклидовом пространстве, сохраняющее квадрат длины вектора в этом пространстве.

В настоящем Приложении мы дадим свой кинематический вывод преобразования Лоренца и коснемся недоразумений[13] в интерпретации лоренцевых сокращений длины и времени.

При выводе преобразования Лоренца мы исходим из двух условий:

1. *Условие Эйнштейна*: световая частица движется с одинаковой скоростью (скоростью света с) как относительно неподвижной системы отсчета, так и относительно движущейся системы отсчета. А это означает, что, измерив скорость света в некоторой системе отсчета, нельзя установить движется эта система отсчета или нет.
2. *Условие Минковского*: преобразование Лоренца удовлетворяет соотношению
$$X^2 - c^2 \cdot T^2 = x^2 - c^2 \cdot t^2\,.$$

То есть, квадрат пространственно-временного интервала, определенный в неподвижной системе отсчета, неотличим от квадрата пространственно-временного интервала, определенного в движущейся системе отсчета. А отсюда следует, что определив квадрат пространственно-временного интервала в некоторой системе отсчета, нельзя установить движется эта система отсчета или нет.

1. Неподвижная система отсчета K

Система отсчета представляет собой совокупность геометрического пространства и времени, *связанного* с этим геометрическим пространством.

1.1. *Геометрическое пространство неподвижной системы отсчета K*

В этом приложении геометрическое пространство неподвижной системы отсчета K будем рассматривать как *одномерное* векторное пространство на множестве *точек*. Вектором, обозначаемом X, в этом пространстве является отрезок прямой, снабженный направлением. Вектор ограничен начальной и конечной точками. На множестве векторов определена операция сложения

$$X = X_1 + X_2\,.$$

[13] Не так давно по нашему телевидению был показан американский фильм, в котором сравнительно молодой отец, вернувшись из космического путешествия, видит свою дочь глубокой старухой. Научное "обоснование" фабулы этого фильма его сценаристы нашли в так называемом "парадоксе близнецов". Настоящее приложение навеяно моей попыткой объяснить сыну, что "парадокс близнецов" как интерпретация лоренцевых сокращений и фабула фильма являются недоразумением.

Эта операция предполагает введение операции *переноса* вектора вдоль принятого направления и процедуру фиксации *совпадения* граничных точек различных векторов. В результате операция сложения векторов позволяет ввести *составной* вектор и определить операцию умножения вектора на число

$$X = m \cdot X_1 \,.$$

В частности, операция сложения векторов позволяет ввести *базисный* вектор E и процедуру *измерения* вектора X с помощью базисного вектора E. Иначе говоря, операция сложения векторов позволяет ввести процедуру составления вектора X из нескольких базисных векторов, в результате которой вектору X ставится в соответствие число – *координата* X:

$$X = E \cdot X \,.$$

Координата X может использоваться в двух смыслах: 1) это точка геометрического пространства, 2) это вектор геометрического пространства[14]. Иногда необходимо ясно различать эти случаи. Мы будем использовать следующий формализм: символ $\bullet X$ означает точку с координатой X в отличие от координаты X, означающей вектор. Тогда, например, $\bullet 0_X$ это точка начала отсчета координат. Вектор между начальной точкой $\bullet X_1$ и конечной точкой $\bullet X_2$ обозначим $\{\bullet X_1, \bullet X_2\}$. Тогда, например,

$$\begin{aligned}
\{\bullet X_1, \bullet X_2\} &\equiv X_2 - X_1 \\
\{\bullet 0_X, \bullet X\} &\equiv X \\
\{\bullet X, \bullet(X + dX)\} &\equiv X + dX - X = dX \,.
\end{aligned}$$

1.2. Время неподвижной системы отсчета K

Время неподвижной системы отсчета K рассматривается как *одномерное* векторное пространство на множестве *событий* или *моментов времени*. Вектором, обозначаемым T, в этом пространстве является *процесс* или *интервал времени*, снабженный направлением (из прошлого в будущее). Интервал времени ограничен начальным и конечным моментами времени. На множестве интервалов времени определена операция сложения

$$T = T_1 + T_2 \,.$$

Эта операция предполагает введение операции *переноса* интервалов времени вдоль направления времени и процедуру фиксации *совпадения* граничных моментов различных интервалов времени. Иначе говоря, процедуру фиксации *одновременности* различных событий. В результате операция сложения интервалов времени позволяет ввести *составной* интервал времени и определить операцию умножения интервала времени на число

$$T = n \cdot T_1 \,.$$

В частности, операция сложения интервалов времени позволяет ввести *базисный* интервал времени τ и процедуру *измерения* интервала времени T с помощью базисного интервала времени τ. Иначе говоря, процедуру составления интервала времени T из нескольких базисных интервалов времени, в результате которой интервалу времени T ставится в соответствие число – *координата* T:

$$T = \tau \cdot T \,.$$

Координата T также может использоваться в двух смыслах: 1) – это момент времени, 2) – это интервал времени[15]. Иногда необходимо ясно различать эти случаи. Мы будем использовать следующий формализм: символ $\bullet T$ означает момент времени с координатой T в отличие от координаты T, означающей интервал времени[16]. Тогда, например, $\bullet 0_T$ это момент начала отсчета координаты времени. Интервал времени между начальным моментом $\bullet T_1$ и конечным моментом $\bullet T_2$ обозначим $\{\bullet T_1, \bullet T_2\}$. Тогда, например,

$$\begin{aligned}
\{\bullet T_1, \bullet T_2\} &\equiv T_2 - T_1 \,, \\
\{\bullet 0_T, \bullet T\} &\equiv T \,, \\
\{\bullet T, \bullet(T + dT)\} &\equiv T + dT - T = dT \,.
\end{aligned}$$

1.3. Движение точки относительно неподвижной системы отсчета K

Точку, движущуюся относительно неподвижной системы отсчета K, обозначим $\bullet a$. Исследованию движения точки относительно системы отсчета должно предшествовать введение двух процедур.

1. Процедуры фиксации *проекции* движущейся точки $\bullet a$ на точку системы отсчета, например, $\bullet X$. Это проецирование символически будем обозначать так $\bullet a \to \bullet X$, что, собственно, и означает: движущаяся точка $\bullet a$ *проецируется* на точку $\bullet X$ неподвижной системы отсчета.

[14] Заметим, что операция сложения относится к векторам. Поэтому в том случае, когда координаты используются в арифметических операциях, им придается смысл векторов.

[15] Заметим, что операция сложения относится к интервалам времени. Поэтому в том случае, когда координаты используются в арифметических операциях, им придается смысл интервалов времени .

[16] Кроме терминов процесс, интервал времени, для простоты будем использовать термин *время*. При этом нужно рассчитывать, что использование последнего термина не вызовет путанницы.

2. Процедуры определения момента времени $\bullet T$ неподвижной системы отсчета, когда движущаяся точка $\bullet a$ проецируется на точку $\bullet X$ неподвижной системы отсчета. Этот момент будем обозначать как $\bullet T|_{\bullet a \to \bullet X}$, что, собственно, и означает: момент времени $\bullet T$ неподвижной системы отсчета, когда движущаяся точка $\bullet a$ проецируется на точку $\bullet X$ неподвижной системы отсчета.

Движение точки $\bullet a$ устанавливается, если в момент времени $\bullet T'$ точка $\bullet a$ проецируется на другую точку $\bullet X'$ неподвижной системы отсчета $\bullet T'|_{\bullet a \to \bullet X'}$. Скорость движения точки $\bullet a$ относительно неподвижной системы отсчета определяется как обычно

$$V_{\bullet a} = \frac{X' - X}{T' - T} \left| \begin{matrix} \bullet T|_{\bullet a \to \bullet X} \\ \bullet T'|_{\bullet a \to \bullet X'} \end{matrix} \right.$$

В частном случае, при котором отсчет времени начинается в тот момент, когда движущаяся точка $\bullet a$ проецируется на точку $\bullet X$ системы отсчета, то есть $\bullet 0_T|_{\bullet a \to \bullet X}$, а движущаяся точка $\bullet a$ достигает точки $\bullet X'$ системы отсчета в момент времени $\bullet T'$, то есть $\bullet T'|_{\bullet a \to \bullet X'}$, скорость движения точки $\bullet a$ относительно неподвижной системы отсчета записывается следующим образом

$$V_{\bullet a} = \frac{X' - X}{T'} \left| \begin{matrix} \bullet 0_T|_{\bullet a \to \bullet X} \\ \bullet T'|_{\bullet a \to \bullet X'} \end{matrix} \right.$$

В другом частном случае, при котором отсчет времени начинается в тот момент, когда движущаяся точка $\bullet a$ проецируется на начало координат $\bullet 0_X$ неподвижной системы отсчета, то есть $\bullet 0_T|_{\bullet a \to \bullet 0_X}$, а движущаяся точка $\bullet a$ достигает точки $\bullet X'$ системы отсчета в момент времени $\bullet T'$, то есть $\bullet T'|_{\bullet a \to \bullet X'}$, скорость движения точки $\bullet a$ относительно неподвижной системы отсчета записывается следующим образом

$$V_{\bullet a} = \frac{X'}{T'} \left| \begin{matrix} \bullet 0_T|_{\bullet a \to \bullet 0_X} \\ \bullet T'|_{\bullet a \to \bullet X'} \end{matrix} \right.$$

2. Наблюдатель в неподвижной системе отсчета K

Введение понятий и суждений, относящихся к системе отсчета, сопровождается введением *дополнительных* операций, способов и процедур, начиная с переноса вектора и кончая процедурой определения момента времени, когда движущаяся точка проецируется на точку неподвижной системы отсчета. Все дополнительные операции, способы и процедуры удобно объединить в одном понятии – *наблюдатель*. Наблюдатель это субъект, отнесенный к системе отсчета, который осуществляет все необходимые дополнительные операции, способы и процедуры, обеспечивающие взаимосвязь между элементами этой системы отсчета. Та система отсчета, в которой находится наблюдатель, является неподвижной относительно него.

3. Движущаяся система отсчета k

Представим себе, что существует *другая*, пока не будем говорить *движущаяся*, система отсчета и связанный с ней *другой* наблюдатель. Обозначим эту систему отсчета k. Система отсчета k также представляет собой совокупность геометрического пространства и времени, *связанного* с этим геометрическим пространством.

3.1. Геометрическое пространство системы отсчета k

В этом приложении геометрическое пространство системы отсчета k также будем рассматривать как *одномерное* векторное пространство на множестве *точек*. Вектором, обозначаемым x, в этом пространстве является отрезок прямой, снабженный направлением. Вектор ограничен начальной и конечной точками. На множестве векторов определена операция сложения

$$x = x_1 + x_2 \,.$$

Операция сложения векторов позволяет ввести *составной* вектор и определить операцию умножения вектора на число

$$x = m \cdot x_1 \,.$$

В частности, операция сложения векторов позволяет ввести *базисный* вектор e и процедуру *измерения* вектора x с помощью базисного вектора e. Иначе говоря, операция сложения векторов позволяет ввести процедуру составления вектора x из нескольких базисных векторов, в результате которой вектору x ставится в соответствие число – *координата* x:

$$x = e \cdot x \,.$$

Координата x может использоваться в двух смыслах: 1) – это точка геометрического пространства, 2) – это вектор геометрического пространства. Для того, чтобы ясно различать эти случаи, мы будем использовать ранее указанный формализм: символ $\bullet x$ означает точку с координатой x в отличие от координаты x, означающей вектор. Тогда, например, $\bullet 0_x$ это точка начала отсчета геометрических координат. Вектор между начальной точкой $\bullet x_1$ и конечной точкой $\bullet x_2$ обозначим $\{\bullet x_1, \bullet x_2\}$. Тогда, например,

$$\begin{aligned} \{\bullet x_1, \bullet x_2\} &\equiv x_2 - x_1 \,, \\ \{\bullet 0_x, \bullet x\} &\equiv x \,, \\ \{\bullet x, \bullet (x + dx)\} &\equiv x + dx - x = dx \,. \end{aligned}$$

3.2. Время системы отсчета k

Время системы отсчета k также рассматривается как *одномерное* векторное пространство на множестве *моментов времени.* Вектором, обозначаемым t, в этом пространстве является *интервал времени*, снабженный направлением (из прошлого в будущее). Интервал времени ограничен начальным и конечным моментами времени. На множестве интервалов времени определена операция сложения

$$t = t_1 + t_2 \, .$$

Операция сложения интервалов времени позволяет ввести *составной* интервал времени и определить операцию умножения интервала времени на число

$$t = n \cdot t_1 \, .$$

В частности, операция сложения интервалов времени позволяет ввести *базисный* интервал времени $\mathrm{т}$ и процедуру *измерения* интервала времени t с помощью базисного интервала времени $\mathrm{т}$. Иначе говоря, процедуру составления интервала времени t из нескольких базисных интервалов времени, в результате которой интервалу времени t ставится в соответствие число – *координата* t:

$$t = \mathrm{т} \cdot t \, .$$

Координата t может использоваться в двух смыслах: 1) – это момент времени, 2) – это интервал времени. Для того, чтобы ясно различать эти случаи, мы будем использовать введенный ранее формализм: символ $\bullet t$ означает момент времени с координатой t в отличие от координаты t, означающей интервал времени. Тогда, например, $\bullet 0_t$ это момент начала отсчета координаты времени. Интервал времени между начальным моментом $\bullet t_1$ и конечным моментом $\bullet t_2$ обозначим $\{\bullet t_1, \bullet t_2\}$. Тогда, например,

$$\begin{aligned} \{\bullet t_1, \bullet t_2\} &\equiv t_2 - t_1 \, , \\ \{\bullet 0_t, \bullet t\} &\equiv t \, , \\ \{\bullet t, \bullet (t + dt)\} &\equiv t + dt - t = dt \, . \end{aligned}$$

3.3. Начальное условие

Пусть существуют такие обстоятельства, когда система отсчета k неотличима от системы отсчета K. Назовем эти обстоятельства *начальным условием.*

Необходимо положить, что при начальном условии точечное множество геометрического пространства системы отсчета k проецируется на точечное множество геометрического пространства системы отсчета K. Проецируются соответственно и векторы системы отсчета k на векторы системы отсчета K. Пусть вектор $x \in k$ проецируется на вектор $X \in K$. Это обстоятельство будем записывать следующим образом

$$x \to X \, .$$

Можно потребовать, чтобы при начальном условии базисный вектор системы отсчета k проецировался на базисный вектор системы отсчета K

$$e \to E \, ,$$

а коэффициент пропорциональности (координата x) при проекции не менялся. Отмеченное изобразим в виде следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} x & = & e & \cdot & x \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X & = & E & \cdot & x \end{array}$$

Таким образом, имеем $X = E \cdot x$. А так как $X = E \cdot X$, то имеем следующее соотношение между геометрическими координатами систем отсчета K и k при начальном условии

$$X = x \, .$$

Необходимо положить, что при начальном условии множество моментов времени системы отсчета k проецируется на множества моментов времени системы отсчета K. Проецируются соответственно и интервалы времени системы отсчета k на интервалы времени системы отсчета K. Пусть интервал времени $t \in k$ проецируется на интервал времени $T \in K$. Это обстоятельство будем записывать следующим образом

$$t \to T \, .$$

Можно потребовать, чтобы при начальном условии базисный интервал времени системы отсчета k проецировался на базисный интервал времени системы отсчета K

$$\mathrm{т} \to \tau \, ,$$

а коэффициент пропорциональности (координата t) при проекции не менялся. Отмеченное изобразим в виде следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} t & = & \mathrm{т} & \cdot & t \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ T & = & \tau & \cdot & t \end{array}$$

Таким образом, имеем $T = \tau \cdot t$. А так как $T = \tau \cdot T$, то имеем соотношение между координатами времени систем отсчета K и k при начальном условии

$$T = t \, .$$

4. Движение системы отсчета k относительно системы отсчета K

Движение системы отсчета k относительно системы отсчета K устанавливается и определяется на основании движения по крайней мере одной точки системы отсчета k, например, точки $\bullet x$. Скорость движения V системы отсчета k определим как скорость движения точки $\bullet x$, устанавливаемую в соответствии с Разделом 1.3.

$$V = V_{\bullet x}\,.$$

Начальным условием, определенным в Разделе 3.3, при котором системы отсчета k и K не отличимы друг от друга, является

$$V = 0\,.$$

4.1. *Связь между геометрическими координатами систем отсчета K и k для начала отсчета времени $\bullet 0_t$*

Рассмотрим геометрическое пространство неподвижной системы отсчета K и геометрическое пространство системы отсчета k, движущейся относительно системы отсчета K со скоростью V, в момент $\bullet 0_t$ - момент начала отсчета времени в системе отсчета k .

Необходимо положить, что в рассматриваемом случае, также как и при начальном условии, точечное множество геометрического пространства движущейся системы отсчета k проецируется на точечное множество геометрического пространства неподвижной системы отсчета K. Проецируются соответственно и векторы системы отсчета k на векторы системы отсчета K. Однако, у нас нет оснований полагать, что векторы движущейся системы отсчета k проецируются на те же векторы неподвижной системы отсчета, на которые они проецировались при начальном условии. То есть, нет оснований полагать, что

$$x \to X\,,$$
$$e \to E\,.$$

Не теряя общности, можно положить, что

$$x \to X_1 = m \cdot X\,,$$
$$e \to E_1 = m \cdot E\,,$$

где m это масштабный коэффициент при проекции векторов геометрического пространства движущейся системы отсчета k.

Указанные проекции можно пояснить следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & = & e & \cdot & x & \\ \downarrow & & & \downarrow & & & \\ X_1 & = m \cdot X & = & E_1 & \cdot & x & = m \cdot E \cdot x \end{array}$$

Таким образом, имеем

$$X_1 = m \cdot E \cdot x\,.$$

Учитывая, что $X_1 = E \cdot X_1$, получим следующее соотношение между геометрическими координатами систем отсчета K и k

$$X_1 = m \cdot x\,. \tag{32}$$

Необходимо предположить, что $m = m(V)$ и при начальном условии (при $V = 0$) $m = 1$.

Для последующих преобразований полезно записать

$$m = \frac{dX_1}{dx} \quad \text{и} \quad X_1 = \frac{dX_1}{dx} \cdot x\,. \tag{33}$$

4.2. *Связь между координатами времени систем отсчета K и k для нулевой точки $\bullet 0_x$*

Рассмотрим время неподвижной системы отсчета K и время системы отсчета k, движущейся относительно системы отсчета K со скоростью V, для точки $\bullet 0_x$ – нулевой точки в системе отсчета k.

Необходимо положить, что в рассматриваемом случае, также как и при начальном условии, множество моментов времени движущейся системы отсчета k проецируется на множество моментов времени неподвижной системы отсчета K. Проецируются соответственно и интервалы времени системы отсчета k на интервалы системы отсчета K. Однако, у нас нет оснований полагать, что интервалы времени движущейся системы отсчета k проецируются на те же интервалы времени неподвижной системы отсчета, на которые они проецировались при начальном условии. То есть, нет оснований полагать, что

$$t \to T\,,$$
$$\text{т} \to \tau\,.$$

Не теряя общности, можно положить, что

$$t \to T_1 = n \cdot T\,,$$
$$\text{т} \to \tau_1 = n \cdot \tau\,,$$

где n это масштабный коэффициент при проекции интервалов времени движущейся системы отсчета k.

Указанные проекции можно пояснить следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccccccc} t & & = & \text{т} & \cdot & t & \\ \downarrow & & & \downarrow & & & \\ T_1 & = n \cdot T & = & \tau_1 & \cdot & t & = n \cdot \tau \cdot t \end{array}$$

Таким образом, имеем

$$T_1 = n \cdot \tau \cdot t\,.$$

Учитывая, что $T_1 = \tau \cdot T_1$, получим следующее соотношение между координатами времени систем отсчета K и k

$$T_1 = n \cdot t\,. \tag{34}$$

Необходимо предположить, что $n = n(V)$ и при начальном условии (при $V = 0$) $n = 1$.

Для последующих преобразований полезно записать

$$n = \frac{dT_1}{dt} \quad \text{и} \quad T_1 = \frac{dT_1}{dt} \cdot t\,. \tag{35}$$

5. Преобразование Лоренца

Предварительно рассмотрим движение точки $\bullet 0_x$ относительно неподвижной системы отсчета K. Пусть за время T_1 точка смещается на вектор X_2. Тогда можно записать

$$X_2 = E \cdot \frac{X_2}{T_1} \cdot T_1 \,.$$

Величина

$$\frac{X_2}{T_1}$$

представляет собой скорость движения точки $\bullet 0_x$, а, следовательно, и скорость движения V системы отсчета k. Учитывая это обстоятельство и выражение для координаты интервала времени T_1 (34), получим

$$X_2 = E \cdot V \cdot n \cdot t \,. \tag{36}$$

5.1. *Преобразование координат системы отсчета k в геометрическую координату системы отсчета K*

Обозначим вектором X сумму

$$X = X_1 + X_2 \,.$$

Подставляя сюда выражения (32) и (36) для слагаемых векторов, получим преобразование координат системы отсчета k в геометрическую координату системы отсчета K

$$X = m \cdot x + V \cdot n \cdot t \,. \tag{37}$$

Нам также понадобится это выражение в другом виде, учитывающем соотношения (33) и (35),

$$X = \frac{dX_1}{dx} \cdot x + V \cdot \frac{dT_1}{dt} \cdot t \,. \tag{38}$$

5.2. *Условие Эйнштейна. Преобразование координат системы отсчета k в координату времени системы отсчета K*

Отметим, что координатам, входящим в выражения (37) и (38), можно придавать смысл координат, относящихся к некоторой точке, движущейся как относительно системы отсчета k, так и относительно системы отсчета K. В качестве такой точки примем световую частицу c. То обстоятельство, что соотношение (37) связывает координаты, относящиеся к световой частице, будем записывать следующим образом:

$$\{X = m \cdot x + V \cdot n \cdot t\}\,|_c \,. \tag{39}$$

Согласно Эйнштейну световая частица движется со скоростью света c как относительно неподвижной системы отсчета K, так и относительно движущейся системы отсчета k. Отсюда следуют соотношения

$$X = c \cdot T, \quad x = c \cdot t, \quad t = \frac{x}{c} \,,$$

используя которые в (39), получим

$$\left\{T = m \cdot t + V \cdot n \cdot \frac{x}{c^2}\right\}|_c \,. \tag{40}$$

Обратимся теперь к масштабным коэффициентам

$$m = \frac{dX_1}{dx}, \quad \text{и} \quad n = \frac{dT_1}{dt} \,.$$

Для координат, относящихся к световой частице

$$X_1 = c \cdot T_1, \quad x = c \cdot t \,.$$

Поэтому

$$m = \frac{dX_1}{dx} = \frac{dT_1}{dt} = n \,.$$

Полученное равенство является универсальным и не связано с тем способом, которым оно получено.

Далее выполним обратный переход: от соотношения (40), относящегося к координатам световой частицы, перейдем к преобразованию координат систем отсчета. Для этого достаточно снять соответствующее указание. В результате получим преобразование координат системы отсчета k в координату времени системы отсчета K

$$T = m \cdot (t + V \cdot \frac{x}{c^2}) \,. \tag{41}$$

5.3. *Условие Минковского. Определение масштабного коэффициента*

Соберем вместе полученные преобразования координат (37) и (41)

$$X = m \cdot (x + V \cdot t) \,, \tag{42}$$
$$T = m \cdot (t + V \cdot \frac{x}{c^2}) \,. \tag{43}$$

Масштабный коэффициент m, входящий в преобразования координат, определим из условия Минковского

$$X^2 - c^2 \cdot T^2 = x^2 - c^2 \cdot t^2 \,. \tag{44}$$

Подставляя преобразования (42) и (43) в левую часть условия Минковского, получим

$$X^2 - c^2 \cdot T^2 = m^2 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cdot (x^2 - c^2 \cdot t^2) \,.$$

Отсюда с учетом (44) получим значение масштабного коэффициента

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

Как и было предположено, $m = m(V)$ и при начальном условии (при $V = 0$) $m = 1$.

5.4. Преобразование Лоренца. Обратное преобразование Лоренца

В окончательном виде преобразование Лоренца имеет вид

$$X = m \cdot (x + V \cdot t)\,, \qquad (45)$$

$$T = m \cdot (t + V \cdot \frac{x}{c^2})\,, \qquad (46)$$

где

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,.$$

Напомним, что в представленной записи координаты X и T относятся к неподвижной системе отсчета K, а координаты x и t относятся к движущейся системе отсчета k, причем наблюдатель находится в системе отсчета K. Можно представить себе, что, напротив, наблюдатель перемещается в систему отсчета k и она рассматривается как неподвижная, а система отсчета K приобретает статус движущейся системы отсчета. Такому перемещению наблюдателя соответствует обратное преобразование Лоренца, которое получается из (45) и (46) выражением координат x и t через координаты X и T. В результате для обратного преобразования Лоренца имеем

$$x = m \cdot (X - V \cdot T)\,, \qquad (47)$$

$$t = m \cdot (T - V \cdot \frac{X}{c^2})\,, \qquad (48)$$

где

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(-V)^2}{c^2}}}\,.$$

Как и следовало ожидать, система отсчета K движется относительно системы отсчета k в обратную сторону со скоростью $-V$.

6. Диаграммы отрезков

Диаграммы отрезков предназначены для геометрического представления соотношений между геометрическими отрезками и интервалами времени в преобразовании Лоренца.

Неподвижная система отсчета K рассматривается как плоскость с осями координат X и icT (Рис.3), здесь и далее i это мнимая единица. Направление X – это направление геометрических отрезков в неподвижной системе отсчета. Направление icT назовем направлением световых отрезков в неподвижной системе отсчета.

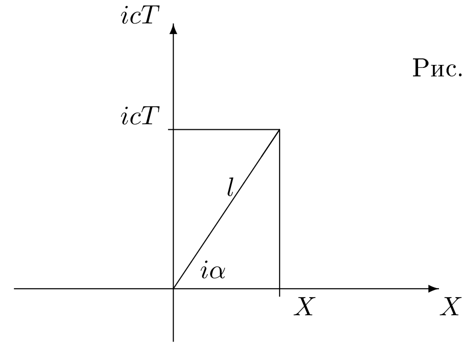


Рис.3

На указанной плоскости, то есть в неподвижной системе отчета, задается *двухмерный* отрезок l. Обозначение l будем использовать как для самого отрезка, так и для обозначения его *длины*. Отрезок l расположен под углом $i\alpha$ по отношении к координатной линии X. ***Проекция*** отрезка l на направление геометрических отрезков в неподвижной системе отсчета имеет вид

$$X = l \cdot \cos(i\alpha) = l \cdot \cosh(\alpha)\,.$$

$\cosh(\alpha) = m_\alpha$ – это обозначаемый ранее масштабный коэффициент, с которым осуществляется указанная проекция, поэтому перепишем

$$X = l \cdot m_\alpha\,.$$

Проекция отрезка l на направление световых отрезков в неподвижной системе отсчета имеет вид

$$icT = l \cdot \sin(i\alpha) = i \cdot l \cdot \sinh(\alpha) = i \cdot l \cdot \cosh(\alpha) \cdot \tanh(\alpha)\,.$$

Здесь

$$\tanh(\alpha) = \frac{V_\alpha}{c}\,,$$

где V_α – это скорость движения двухмерного отрезка относительно неподвижной системы отсчета K. В результате перепишем

$$cT = l \cdot m_\alpha \cdot \frac{V_\alpha}{c}\,.$$

Длина отрезка выражается через его координаты в неподвижной системе отсчета

$$\sqrt{X^2 + (icT)^2} = \sqrt{X^2 - c^2T^2} = \sqrt{l^2 {m_\alpha}^2 - l^2 {m_\alpha}^2 \frac{{V_\alpha}^2}{c^2}} = l\,.$$

Здесь учтено, что

$$m_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{V_\alpha}^2}{c^2}}}\,.$$

Движущаяся система отсчета k рассматривается как плоскость с осями координат x и ict (Рис.4), повернутыми относительно осей координат неподвижной системы отсчета на угол $i\psi$. Здесь направление x – это направление геометрических отрезков в движущейся системе отсчета. Направление ict – это направление световых отрезков в движущейся системе отсчета.

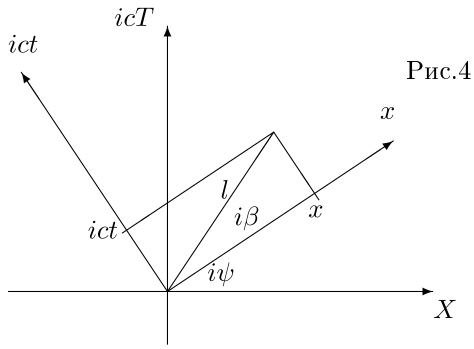


Рис.4

Отрезок l расположен под углом $i\beta$ по отношении к координатной линии x движущейся системы отсчета. *Проекция* отрезка l на направление геометрических отрезков в движущейся системе отсчета имеет вид

$$x = l \cdot \cos(i\beta) = l \cdot \cosh(\beta)\,. \tag{49}$$

$\cosh(\beta) = m_\beta$ – это масштабный коэффициент, с которым осуществляется указанная проекция, поэтому перепишем

$$x = l \cdot m_\beta\,.$$

Проекция отрезка l на направление световых отрезков в движущейся системе отсчета имеет вид

$$ict = l \cdot \sin(i\beta) = i \cdot l \cdot \sinh(\beta) = i \cdot l \cdot \cosh(\beta) \cdot \tanh(\beta)\,. \tag{50}$$

Здесь

$$\tanh(\beta) = \frac{V_\beta}{c}\,,$$

где V_β – это скорость движения двухмерного отрезка относительно движущейся системы отсчета k. В результате перепишем

$$ct = l \cdot m_\beta \cdot \frac{V_\beta}{c}\,.$$

Длина отрезка выражается через его координаты в движущейся системе отсчета

$$\sqrt{x^2 + (ict)^2} = \sqrt{x^2 - c^2t^2} = \sqrt{l^2{m_\beta}^2 - l^2{m_\beta}^2\frac{{V_\beta}^2}{c^2}} = l\,.$$

Здесь учтено, что

$$m_\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{V_\beta}^2}{c^2}}}\,.$$

То обстоятельство, что определение длины двухмерного отрезка по формуле $\sqrt{X^2 - c^2T^2}$ и по формуле $\sqrt{x^2 - c^2t^2}$ приводит к одному результату, можно оформить следующим утверждением: длина двухмерного отрезка не зависит от движения системы отсчета. По существу этот тезис выражен в условии Минковского.

Используем диаграмму отрезков (Рис.5) для вывода первого соотношения преобразования Лоренца (45).

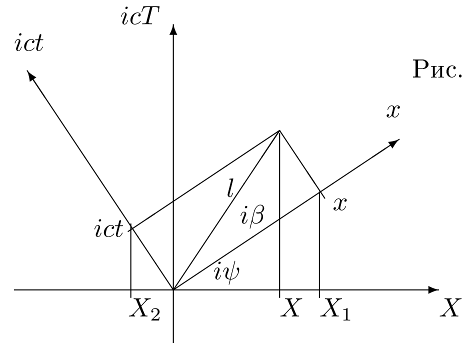


Рис.5

Вычислим проекцию X отрезка l, учитывая, что $i\alpha = i\beta + i\psi$. Получим

$$\begin{aligned} X &= l \cdot \cos(i\alpha) = l \cdot \cos(i\beta + i\psi) = \\ &= l \cdot \cos(i\beta) \cdot \cos(i\psi) - l \cdot \sin(i\beta) \cdot \sin(i\psi) = \\ &= l \cdot \cosh(\beta) \cdot \cosh(\psi) - l \cdot i \cdot \sinh(\beta) \cdot i \cdot \sinh(\psi)\,. \end{aligned}$$

Используя (49) и (50), получим

$$X = x \cdot \cosh(\psi) + c \cdot t \cdot \sinh(\psi)\,.$$

Далее, выполнив подстановку

$$\cosh(\psi) = m\,, \quad \sinh(\psi) = \cosh(\psi) \cdot \tanh(\psi) = m \cdot \frac{V}{c}\,, \tag{51}$$

где V – это скорость движущейся системы отсчета k относительно неподвижной системы отсчета K, получим первое соотношение преобразования Лоренца (45)

$$X = m \cdot (x + t \cdot V)\,.$$

Для геометрических отрезков X_1 и X_2, указанных на Рис.5, имеем

$$\begin{aligned} &X = X_1 + X_2\,, \\ &X_1 = m \cdot x, \quad X_2 = m \cdot t \cdot V\,. \end{aligned}$$

Используем диаграмму отрезков (Рис.6) для вывода второго соотношения преобразования Лоренца (46).

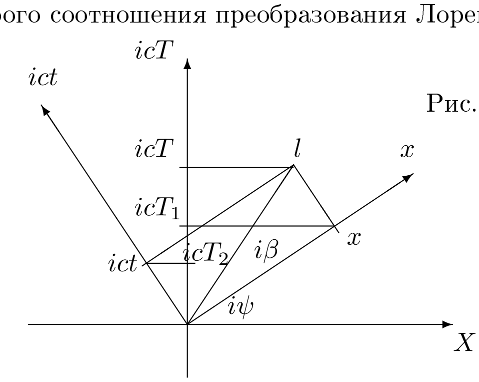


Рис.6

Вычислим проекцию icT отрезка l, учитывая, что $i\alpha = i\beta + i\psi$. Получим

$$\begin{aligned} icT &= l \cdot \sin(i\alpha) = l \cdot \sin(i\beta + i\psi) = \\ &= l \cdot \sin(i\beta) \cdot \cos(i\psi) + l \cdot \cos(i\beta) \cdot \sin(i\psi) = \\ &= l \cdot i\sinh(\beta) \cdot \cosh(\psi) + l \cdot \cosh(\beta) \cdot i\sinh(\psi)\,. \end{aligned}$$

Используя (49) и (50), получим

$$icT = ict \cdot \cosh(\psi) + x \cdot i\sinh(\psi)\,.$$

Далее, выполнив подстановку (51), получим второе соотношение преобразования Лоренца (46)

$$cT = ct \cdot m + x \cdot m \cdot \frac{V}{c}\,.$$

Для отрезков icT_1 и icT_2, указанных на Рис.6, имеем

$$\begin{aligned} &icT = icT_1 + icT_2\,, \\ &icT_1 = ict \cdot m, \quad icT_2 = ix \cdot m \cdot \frac{V}{c}\,. \end{aligned}$$

7. Лоренцево сокращение длины

Обратимся к движущейся системе отсчета k. И рассмотрим находящийся в ней между точками $\bullet x_1$ и $\bullet x_2$ геометрический отрезок в фиксированный момент времени $\bullet t$. И пусть точки $\bullet x_1$ и $\bullet x_2$ проецируются на точки неподвижной системы отсчета $\bullet X_1$ и $\bullet X_2$ соответственно. Тогда из первого соотношения преобразования Лоренца (45) следуют соотношения для координат указанных точек

$$\begin{aligned} X_1 &= m \cdot x_1 + m \cdot V \cdot t\,, \\ X_2 &= m \cdot x_2 + m \cdot V \cdot t\,. \end{aligned}$$

Вычитая из последнего соотношения первое и вводя обозначение длины геометрического отрезка в неподвижной системе отсчета $\Delta X = X_2 - X_1$ и обозначение длины геометрического отрезка в движущейся системе отсчета $\Delta x = x_2 - x_1$, получим равенство

$$\Delta X = m \cdot \Delta x\,. \tag{52}$$

Если учесть, что

1) при $V \to 0 \quad m \to 1$ и $\Delta X \to \Delta x$;

2) при $V \neq 0 \quad m > 1$,

то соотношение (52) означает, что длина геометрического отрезка в неподвижной системе отсчета больше длины *этого* отрезка, если он находится в движущейся системе отсчета. Иначе говоря, движение геометрического отрезка приводит к уменьшению его длины – явлению, называемому *лоренцевым сокращением длины*. Однако такой вывод противоречит здравому смыслу и логике. Например, пусть речь идет о металлическом стержне, которому сообщается скорость V. Пока стержень находится в неподвижной системе отсчета, сократить его длину (сжать) можно, приложив усилие. Но, сообщив скорость стержню, получим сокращение его длины без каких либо усилий, причем это сокращение никак не связано со свойствами металла.

Другой пример противоречия. Неподвижность системы отсчета K подтверждается наблюдателем, который в ней находится. Но если наблюдатель находится в системе отсчета k, то эта система является неподвижной, а система отсчета K является движущейся. Но тогда из соотношения (47) обратного преобразования Лоренца следует

$$\Delta x = m \cdot \Delta X\,,$$

то есть длина геометрического отрезка больше в той системе отсчета, в которой находится наблюдатель. То есть, уменьшение длины геометрического отрезка является субъективным фактором, что абсурдно.

Возникающие противоречия свидетельствуют об ошибке или о недоразумении. В чем состоит недоразумение лучше всего объяснить с помощью диаграммы отрезков.

7.1. Длина геометрического отрезка не зависит от скорости движения

Пусть сначала система отсчета k неподвижна и, по существу, тождественна системе отсчета K (Рис.7). Введем в системе отсчета k геометрический отрезок, заключенный между точками с координатами L_1 и L_2. Длину этого отрезка обозначим $\Delta L = L_2 - L_1$.

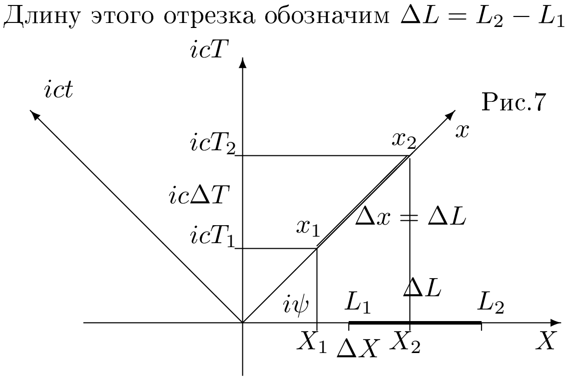


Рис.7

Пусть теперь и системе отсчета k и геометрическому отрезку ΔL сообщается скорость V. В этом случае движущийся отрезок расположен между точками x_1 и x_2 движущейся системы отсчета k, а его длина в собственной системе отсчета равна

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \Delta L\,.$$

Из диаграммы отрезков следует, что длина проекции ΔX движущегося отрезка Δx равна

$$\Delta X = m \cdot \Delta x \quad \text{или} \quad \Delta X = m \cdot \Delta L\,,$$

то есть, длина проекции ΔX больше длины движущегося отрезка. Иначе говоря, движение геометрического отрезка приводит не к уменьшению его длины, а к увеличению длины одной его проекции ΔX на неподвижную систему отсчета. Но движущийся геометрический отрезок проецируется на *два* направления в неподвижной системе отсчета и представлен как проекцией на направление геометрических отрезков

$$\Delta X = m \cdot \Delta L\,,$$

так и проекцией на направление световых отрезков

$$i \cdot c \cdot \Delta T = i \cdot m \cdot \Delta L \frac{V}{c}\,.$$

Длина движущегося геометрического отрезка ΔL в неподвижной системе отсчета определяется не одной проекцией ΔX, а обеими проекциями

$$\sqrt{(\Delta X)^2 + (i \cdot c \cdot \Delta T)^2} = \sqrt{m^2 \Delta L^2 - m^2 \Delta L^2 \frac{V^2}{c^2}} = \Delta L\,.$$

Таким образом, движение геометрического отрезка не приводит к изменению его длины, как при определении этой длины в собственной (движущейся) системе отсчета, так и при определении ее в неподвижной системе отсчета[17]

Заключая, можно сказать, что ошибка в интерпретации лоренцева сокращения длины состоит в том, что длиной движущегося геометрического отрезка, определяемой в неподвижной системе отсчета, считается длина *одной* его проекции на неподвижную систему отсчета.

8. Диаграммы интервалов

Диаграммы интервалов, как и диаграммы отрезков, предназначены для геометрического представления соотношений между геометрическими отрезками и интервалами времени в преобразовании Лоренца.

Изложение предыдущего Раздела полезно повторить, используя диаграммы интервалов. Диаграммы интервалов удобно использовать при анализе лоренцевых сокращений времени.

Неподвижная система отсчета K рассматривается как плоскость с осями координат T и $i\frac{X}{c}$ (Рис.8). T – это направление интервалов времени в неподвижной системе отсчета. Направление $i\frac{X}{c}$ назовем направлением световых интервалов в неподвижной системе отсчета.

[17] По существу, этот тезис есть следствие условия Минковского.

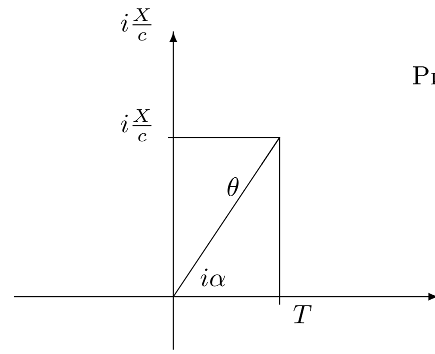


Рис.8

На указанной плоскости, то есть в неподвижной системе отчета, задан *двухмерный* интервал θ. Обозначение θ будем использовать как для самого интервала, так и для обозначения его длины. Интервал θ расположен под углом $i\alpha$ по отношении к координатной линии T. ***Проекция*** интервала θ на направление интервалов времени в неподвижной системе отсчета имеет вид

$$T = \theta \cdot \cos(i\alpha) = \theta \cdot \cosh(\alpha)\,.$$

$\cosh(\alpha) = m_\alpha$ – это обозначаемый ранее масштабный коэффициент, с которым осуществляется указанная проекция, поэтому перепишем

$$T = \theta \cdot m_\alpha\,.$$

Проекция интервала θ на направлением световых интервалов в неподвижной системе отсчета имеет вид

$$i\frac{X}{c} = \theta \cdot \sin(i\alpha) = i \cdot \theta \cdot \sinh(\alpha) = i \cdot \theta \cdot \cosh(\alpha) \cdot \tanh(\alpha)\,.$$

Здесь

$$\tanh(\alpha) = \frac{V_\alpha}{c}\,,$$

где V_α – это скорость движения двухмерного интервала относительно неподвижной системы отсчета K. В результате перепишем

$$i\frac{X}{c} = i \cdot \theta \cdot m_\alpha \cdot \frac{V_\alpha}{c}\,.$$

Длина интервала выражается через его координаты в неподвижной системе отсчета

$$\sqrt{T^2 + \left(i\frac{X}{c}\right)^2} = \sqrt{T^2 - \frac{X^2}{c^2}} = \sqrt{\theta^2 {m_\alpha}^2 - \theta^2 {m_\alpha}^2 \frac{{V_\alpha}^2}{c^2}} = \theta.$$

Движущаяся система отсчета k рассматривается как плоскость с осями координат t и $i\frac{x}{c}$ (Рис.9), повернутыми относительно осей координат неподвижной системы отсчета на угол $i\psi$. Здесь направление t – это направление интервалов времени в движущейся системе отсчета. Направление $i\frac{x}{c}$ – это направление световых интервалов в движущейся системе отсчета.

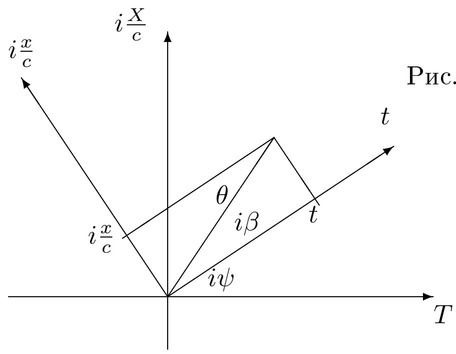


Рис.9

Интервал θ расположен под углом $i\beta$ по отношении к координатной линии t движущейся системы отсчета. *Проекция* интервала θ на направление интервалов времени в движущейся системе отсчета имеет вид

$$t = \theta \cdot \cos(i\beta) = \theta \cdot \cosh(\beta)\,. \tag{53}$$

$\cosh(\beta) = m_\beta$ – это масштабный коэффициент, с которым осуществляется указанная проекция, поэтому перепишем

$$t = \theta \cdot m_\beta\,.$$

Проекция интервала θ на направление световых интервалов в движущейся системе отсчета имеет вид

$$i\frac{x}{c} = \theta \cdot \sin(i\beta) = i \cdot \theta \cdot \sinh(\beta) = i \cdot \theta \cdot \cosh(\beta) \cdot \tanh(\beta)\,. \tag{54}$$

Здесь

$$\tanh(\beta) = \frac{V_\beta}{c}\,,$$

где V_β – это скорость движения двухмерного интервала относительно движущейся системы отсчета k. В результате перепишем

$$i\frac{x}{c} = i \cdot \theta \cdot m_\beta \cdot \frac{V_\beta}{c}\,.$$

Длина интервала выражается через его координаты в движущейся системе отсчета

$$\sqrt{t^2 + \left(i\frac{x}{c}\right)^2} = \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}} = \sqrt{\theta^2 {m_\beta}^2 - \theta^2 {m_\beta}^2 \frac{{V_\beta}^2}{c^2}} = \theta.$$

То обстоятельство, что определение длины двухмерного интервала по формуле $\sqrt{T^2 - \frac{X^2}{c^2}}$ и по формуле $\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}}$ приводит к одному результату, можно оформить следующим утверждением: длина двухмерного интервала не зависит от движения системы отсчета. По существу этот тезис выражен в условии Минковского.

Используем диаграмму интервалов (Рис.10) для вывода второго соотношения преобразования Лоренца (46).

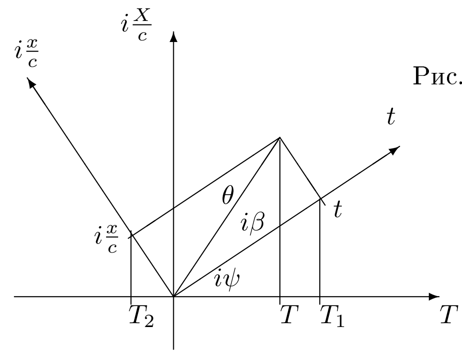


Рис.10

Вычислим проекцию T, учитывая, что $i\alpha = i\beta + i\psi$. Получим

$$\begin{aligned}&T = \theta \cdot \cos(i\alpha) = \theta \cdot \cos(i\beta + i\psi) = \\ &\theta \cdot \cos(i\beta) \cdot \cos(i\psi) - \theta \cdot \sin(i\beta) \cdot \sin(i\psi) = \\ &\theta \cdot \cosh(\beta) \cdot \cosh(\psi) - \theta \cdot i\sinh(\beta) \cdot i\sinh(\psi)\,.\end{aligned}$$

Используя (53) и (54), получим

$$T = t \cdot \cosh(\psi) + \frac{x}{c} \cdot \sinh(\psi)\,.$$

Далее, выполнив подстановку

$$\cosh(\psi) = m\,, \quad \sinh(\psi) = \cosh(\psi) \cdot \tanh(\psi) = m \cdot \frac{V}{c}\,, \tag{55}$$

где V – это скорость движущейся системы отсчета k относительно неподвижной системы отсчета K, получим второе соотношение преобразования Лоренца (46)

$$T = m \cdot t + m \cdot \frac{x \cdot V}{c^2}\,.$$

Для интервалов времени T_1 и T_2, указанных на Рис.10, имеем

$$T = T_1 + T_2\,,$$

$$T_1 = m \cdot t, \quad T_2 = m \cdot \frac{x \cdot V}{c^2}\,.$$

Используем диаграмму интервалов (Рис.11) для вывода первого соотношения преобразования Лоренца (45).

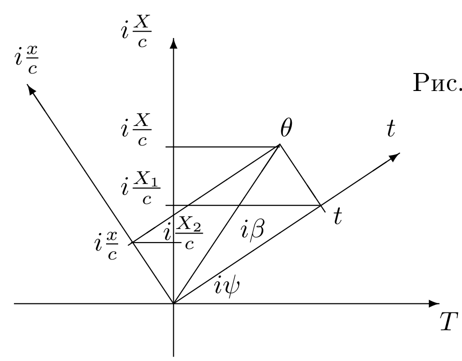


Рис.11

Вычислим проекцию $i\frac{X}{c}$, учитывая, что $i\alpha = i\beta + i\psi$. Получим

$$\begin{aligned}&i\frac{X}{c} = \theta \cdot \sin(i\alpha) = \theta \cdot \sin(i\beta + i\psi) = \\ &= \theta \cdot \sin(i\beta) \cdot \cos(i\psi) + \theta \cdot \cos(i\beta) \cdot \sin(i\psi) = \\ &= \theta \cdot i\sinh(\beta) \cdot \cosh(\psi) + \theta \cdot \cosh(\beta) \cdot i\sinh(\psi)\,.\end{aligned}$$

Используя (53) и (54), получим

$$i\frac{X}{c} = i\frac{x}{c} \cdot \cosh(\psi) + t \cdot i\sinh(\psi)\,.$$

Далее, выполнив подстановку (55), получим первое соотношение преобразования Лоренца (45)

$$X = x \cdot m + t \cdot m \cdot V\,.$$

Для отрезков $i\frac{X_1}{c}$ и $i\frac{X_2}{c}$, указанных на Рис.11, имеем

$$i\frac{X}{c} = i\frac{X_1}{c} + i\frac{X_2}{c}\,,$$
$$i\frac{X_1}{c} = i\frac{x}{c} \cdot m, \quad i\frac{X_2}{c} = i \cdot t \cdot m \cdot \frac{V}{c}\,.$$

9. Лоренцево сокращение времени

Обратимся к движущейся системе отсчета k. И рассмотрим находящийся в ней интервал времени между моментами времени $\bullet t_1$ и $\bullet t_2$ в фиксированной точке $\bullet x$. И пусть моменты времени $\bullet t_1$ и $\bullet t_2$ проецируются на моменты времени неподвижной системы отсчета $\bullet T_1$ и $\bullet T_2$ соответственно. Тогда из второго соотношения преобразования Лоренца (46) следуют соотношения для координат указанных моментов времени

$$T_1 = m \cdot t_1 + m \cdot V \cdot \frac{x}{c^2}\,,$$
$$T_2 = m \cdot t_2 + m \cdot V \cdot \frac{x}{c^2}\,.$$

Вычитая из последнего соотношения первое и вводя обозначение длины интервала времени в неподвижной системе отсчета $\Delta T = T_2 - T_1$ и обозначение длины интервала времени в движущейся системе отсчета $\Delta t = t_2 - t_1$, получим равенство

$$\Delta T = m \cdot \Delta t\,. \qquad (56)$$

Если учесть, что
1) при $V \to 0 \quad m \to 1$ и $\Delta T \to \Delta t$;
2) при $V \neq 0 \quad m > 1$,
то соотношение (56) означает, что длина интервала времени в неподвижной системе отсчета больше длины *этого* интервала, если он находится в движущейся системе отсчета. Иначе говоря, движение интервала времени приводит к уменьшению его длины – явлению, называемому *лоренцевым сокращением времени*. Следствием этого сокращения является "парадокс близнецов". Однако такой вывод противоречит здравому смыслу и логике.

Приведем пример такого противоречия. Неподвижность системы отсчета K подтверждается наблюдателем, который в ней находится. Но если наблюдатель находится в системе отсчета k, то эта система является неподвижной, а система отсчета K является движущейся. Но тогда из соотношения (48) обратного преобразования Лоренца следует

$$\Delta t = m \cdot \Delta T\,,$$

то есть длина интервала времени больше в той системе отсчета, в которой находится наблюдатель. То есть, уменьшение длины интервала времени является субъективным фактором, что абсурдно.

Возникающие противоречия свидетельствуют об ошибке или о недоразумении. В чем состоит недоразумение лучше всего объяснить с помощью диаграммы интервалов.

9.1. *Длина интервала времени не зависит от скорости движения*

Пусть сначала система отсчета k неподвижна и, по существу, тождественна системе отсчета K (Рис.12). Введем в системе отсчета k интервал времени, заключенный между моментами времени с координатами Θ_1 и Θ_2. Длину этого интервала времени обозначим $\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$.

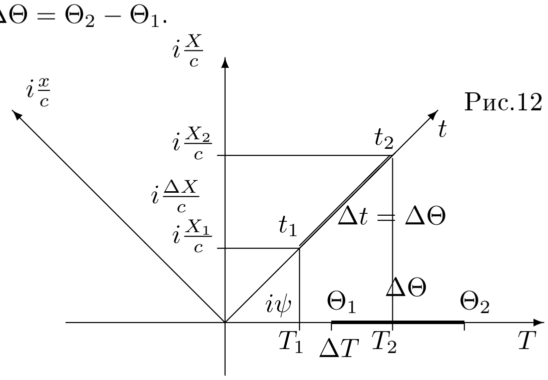


Рис.12

Пусть теперь и системе отсчета k и интервалу времени $\Delta\Theta$ сообщается скорость V. В этом случае движущийся интервал расположен между моментами времени t_1 и t_2 движущейся системы отсчета k, а его длина в собственной системе отсчета равна

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta\Theta\,.$$

Из диаграммы интервалов следует, что длина проекции ΔT движущегося интервала времени Δt равна

$$\Delta T = m \cdot \Delta t \quad \text{или} \quad \Delta T = m \cdot \Delta\Theta\,,$$

то есть, длина проекции ΔT больше длины движущегося интервала времени. Иначе говоря, движение интервала времени приводит не к уменьшению его длины, а к увеличению длины одной его проекции ΔT на неподвижную систему отсчета. Но движущийся интервал времени проецируется на *два* направления в неподвижной системе отсчета и представлен как проекцией на направление интервалов времени

$$\Delta T = m \cdot \Delta\Theta\,,$$

так и проекцией на направление световых интервалов

$$i \cdot \frac{\Delta X}{c} = i \cdot m \cdot \Delta\Theta \frac{V}{c}\,.$$

Длина движущегося интервала времени $\Delta\Theta$ в неподвижной системе отсчета определяется не одной проекцией ΔT, а обеими проекциями

$$\sqrt{(\Delta T)^2 + \left(i \cdot \frac{\Delta X}{c}\right)^2} = \sqrt{m^2 \Delta\Theta^2 - m^2 \Delta\Theta^2 \frac{V^2}{c^2}} = \Delta\Theta\,.$$

Таким образом, движение интервала времени не приводит к изменению его длины, как при определении этой длины в собственной (движущейся) системе отсчета, так и при определении ее в неподвижной системе отсчета[18].

Заключая, можно сказать, что ошибка в интерпретации лоренцева сокращения времени состоит в том, что длиной движущегося интервала времени, определяемой в неподвижной системе отсчета, считается длина *одной* его проекции на неподвижную систему отсчета.

[18] По существу, этот тезис есть следствие условия Минковского.

Глава 1.2 Пространство-время как универсальная алгебра

I. СИСТЕМООБРАЗУЮЩИЕ ПОСТУЛАТЫ

1. Постулируем существование физических объектов, которые назовем *фундаментальные физические объекты.* Отличительная особенность фундаментальных физических объектов состоит в том, что в том виде, в котором фундаментальные физические объекты участвуют в пространственно-временных явлениях, они тождественны *обобщенному пространству-времени.* В качестве обобщенного пространства-времени принимается *универсальная контравариантная алгебра* $\mathbb{X}$, которая рассматривается в этой Главе.

Фундаментальными физическими объектами являются, прежде всего, фундаментальные частицы. Для описания физики точечных образований достаточно рассматривать пространство-время как четырехмерное векторное пространство специальной теории относительности X. Этим пространством можно ограничиться, например, при описании электромагнитных явлений, в которых участвуют точечные образования. При описании фундаментальных частиц возникает необходимость в привлечении универсальной контравариантной алгебры $\mathbb{X}$ в качестве обобщенного пространства-времени. Другими словами, при описании фундаментальных частиц возникает необходимость в привлечении не только точечных и векторных образований первого порядка, но и образований более высокого порядка. В дальнейшем покажем, что, например, описание лептонов основывается на частном случае универсальной контравариантной алгебры – алгебре Клиффорда.

2. Постулируем существование физических объектов, которые назовем *фундаментальные физические антиобъекты.* Отличительная особенность фундаментальных физических антиобъектов состоит в том, что в том виде, в котором фундаментальные физические антиобъекты участвуют в пространственно-временных явлениях, они тождественны *обобщенному сопряженному пространству-времени.* В качестве обобщенного сопряженного пространства-времени принимается *универсальная ковариантная алгебра* $\mathbb{X}^*$, которая рассматривается в этой Главе.

Фундаментальными физическими антиобъектами являются, прежде всего, фундаментальные античастицы. Для описания физики точечных образований достаточно рассматривать сопряженное пространство-время как четырехмерное векторное сопряженное пространство специальной теории относительности X^*. Этим пространством можно ограничиться, например, при описании электромагнитных явлений, в которых участвуют точечные образования. При описании фундаментальных античастиц возникает необходимость в привлечении универсальной ковариантной алгебры $\mathbb{X}^*$ в качестве обобщенного сопряженного пространства-времени. Другими словами, при описании фундаментальных античастиц возникает необходимость в привлечении не только точек и сопряженных векторов, но и сопряженных векторных образований более высокого порядка. В дальнейшем покажем, что, например, описание антилептонов основывается на частном случае универсальной ковариантной алгебры – сопряженной алгебре Клиффорда.

II. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК ТЕНЗОРНАЯ КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА

В этом Разделе рассмотрим обобщение пространства-времени специальной теории относительности (СТО). Таким обобщением служит тензорная контравариантная алгебра пространства-времени.

1. Образующее пространство

Векторное пространство СТО X является исходным при построении тензорной контравариантной алгебры пространства-времени. В этом смысле векторное пространство X называется *образующим* пространством тензорной контравариантной алгебры пространства-времени. Соответственно базисные векторы пространства X называются *образующими* базисных векторов тензорной алгебры.

Здесь, прежде всего, важно, что пространство-время СТО X является четырехмерным векторным пространством. Вектор этого пространства $\mathbf{x}$ записывается через базисные векторы следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot x^k\,,$$

где индекс k принимает значения 1, 2, 3, 4. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – это базисные векторы геометрического пространства, а $\mathbf{e}_4$ – базисный вектор времени.

В отличие от предыдущей Главы здесь и далее вектор $\mathbf{x}$ и координаты вектора x^k имеют размерность длины.[1] Базисные векторы рассматриваются как безразмерные величины, определяющие только *направление* вектора.

В ряде случаев в качестве образующего пространства будем использовать геометрическое пространство СТО. Будем обозначать его X_3. В этом случае

---

[1] Воспользуемся следующим условным обозначением: заключенная в квадратные скобки величина означает размерность указанной величины. В нашем случае

$$[\mathbf{x}] = [x^k] = \text{м} \quad (\text{метр})\,.$$

вектор $\mathbf{x} \in X_3$ будем записывать через базисные векторы следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_a \cdot x^a \,.$$

Здесь индекс a принимает значения 1, 2, 3.

2. Тензорное произведение двух векторов образующего пространства

Тензорное произведение векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \,.$$

Здесь коэффициент L_0 имеет размерность длины и его назначение состоит в том, чтобы привести размерность тензорного произведения двух векторов к размерности одного вектора, то есть к длине.

Билинейное отображение векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ *общего вида*[2] запишем следующим образом

$$\frac{1}{L_0}F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2)\,.$$

По определению тензорное произведение двух векторов отождествляется с билинейным отображением-этих векторов общего вида

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \equiv \frac{1}{L_0}F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2)\,.$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что билинейное отображение в конкретное векторное пространство, например

$$G(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2)\,,$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{L_0}L(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2)\,.$$

[2] Напомним, что отображение F является *билинейным*, если оно подчиняется соотношениям:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a},\, \mathbf{x}_2) &= F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2) + F(\mathbf{a},\, \mathbf{x}_2)\\ F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2 + \mathbf{b}) &= F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2) + F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{b})\\ F(\alpha\cdot\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2) &= \alpha\cdot F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2)\\ F(\mathbf{x}_1,\, \alpha\cdot\mathbf{x}_2) &= \alpha\cdot F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2)\,, \end{aligned}$$

где $\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, \mathbf{a},\, \mathbf{b} \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Вследствие билинейности можно записать

$$\frac{1}{L_0}F(\mathbf{x}_1\,,\; \mathbf{x}_2) = \frac{1}{L_0}F(\mathbf{e}_{k_1}\, {x_1}^{k_1}\,,\; \mathbf{e}_{k_2}\, {x_2}^{k_2}) =$$
$$= F(\mathbf{e}_{k_1}\,,\; \mathbf{e}_{k_2})\,\frac{1}{L_0}{x_1}^{k_1}\, {x_2}^{k_2}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = F(\mathbf{e}_{k_1}\,,\; \mathbf{e}_{k_2})\,\frac{1}{L_0}{x_1}^{k_1}\, {x_2}^{k_2}\,.$$

Отсюда следует, что тензорное произведение двух векторов можно рассматривать как вектор, принадлежащий множеству векторов вида

$$\overset{2}{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_{k_1 k_2}\cdot x^{k_1 k_2}\,.$$

Здесь

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} = F(\mathbf{e}_{k_1}\,,\; \mathbf{e}_{k_2})\,.$$

Указанное множество векторов называется тензорной степенью второго порядка образующего пространства X и обозначается

$$\overset{2}{\otimes}\, X\,.$$

Векторы $\mathbf{e}_{k_1 k_2}$ рассматриваются как базисные векторы в $\overset{2}{\otimes}\, X$. Числа $x^{k_1 k_2}$ представляют собой координаты вектора $\overset{2}{\mathbf{x}}$, они имеют размерность длины.

3. Тензорное произведение n векторов образующего пространства

Тензорное произведение n векторов $\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, \ldots, \mathbf{x}_n$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{(L_0)^{n-1}}\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_n\,.$$

Здесь коэффициент L_0 имеет размерность длины, а назначение множителя

$$\frac{1}{(L_0)^{n-1}}$$

состоит в том, чтобы привести размерность тензорного произведения n векторов к размерности одного вектора, то есть к длине.

Полилинейное отображение общего вида n векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots, \mathbf{x}_n$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{(L_0)^{n-1}}F(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2, \ldots,\, \mathbf{x}_n)\,.$$

По определению тензорное произведение n векторов отождествляется с полилинейным отображением общего вида этих векторов

$$\frac{1}{(L_0)^{n-1}}\mathbf{x}_1\otimes\mathbf{x}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{x}_n\equiv\frac{1}{(L_0)^{n-1}}F(\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2,\ldots,\,\mathbf{x}_n)\,.$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что полилинейное отображение в конкретное векторное пространство, например

$$G(\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2,\ldots,\,\mathbf{x}_n)\,,$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G(\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2,\ldots,\,\mathbf{x}_n)=\frac{1}{(L_0)^{n-1}}L(\mathbf{x}_1\otimes\mathbf{x}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{x}_n)\,.$$

Вследствие полилинейности можно записать

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(L_0)^{n-1}}F(\mathbf{x}_1\,,\ \mathbf{x}_2,\ldots,\,\mathbf{x}_n)=\\&=\frac{1}{(L_0)^{n-1}}F(\mathbf{e}_{k_1}\,{x_1}^{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2}\,{x_2}^{k_2}\,,\ldots,\ \mathbf{e}_{k_n}\,{x_n}^{k_n})=\\&=F(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2}\,,\ldots,\ \mathbf{e}_{k_n})\,\frac{1}{(L_0)^{n-1}}{x_1}^{k_1}\,{x_2}^{k_2}\ldots{x_n}^{k_n}\,.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(L_0)^{n-1}}\mathbf{x}_1\otimes\mathbf{x}_2\otimes\ldots\otimes\mathbf{x}_n=\\&=F(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2}\,,\ldots,\ \mathbf{e}_{k_n})\,\frac{1}{(L_0)^{n-1}}{x_1}^{k_1}\,{x_2}^{k_2}\ldots{x_n}^{k_n}\,.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что тензорное произведение n векторов можно рассматривать как вектор, принадлежащий множеству векторов вида

$$\overset{n}{\mathbf{x}}=\mathbf{e}_{k_1k_2\ldots k_n}\cdot x^{k_1k_2\ldots k_n}\,.$$

Здесь

$$\mathbf{e}_{k_1k_2\ldots k_n}=\mathbf{e}_{k_1}\otimes\mathbf{e}_{k_2}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{k_n}=F(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2}\,,\ldots,\ \mathbf{e}_{k_n})\,.$$

Указанное множество векторов называется тензорной степенью n-го порядка образующего пространства X и обозначается

$$\overset{n}{\otimes}X\,.$$

Векторы $\mathbf{e}_{k_1k_2\ldots k_n}$ рассматриваются как базисные векторы в $\overset{n}{\otimes}X$. Числа $x^{k_1k_2\ldots k_n}$ представляют собой координаты вектора $\overset{n}{\mathbf{x}}$, они имеют размерность длины.

4. Пространство-время как тензорная контравариантная алгебра

Помимо пространств тензорных степеней порядка 2 и более введем пространство тензорной степени 0, полагая[3]

$$\overset{0}{\otimes}X=\mathbb{R}\cdot L_0\,,$$

и пространство тензорной степени 1, полагая

$$\overset{1}{\otimes}X=X\,.$$

Рассмотрим векторное пространство, представленное суммой всех тензорных степеней. Это пространство обозначим $\otimes X$ и назовем *пространством контравариантных тензоров*. Таким образом,

$$\otimes X\ =\overset{0}{\otimes}X+\overset{1}{\otimes}X+\overset{2}{\otimes}X\ +\ldots$$

Пространство $\otimes X$ является не только векторным пространством[4], но и алгеброй, в которой умножение векторов представлено тензорным умножением и умножением тензоров на число. Поэтому $\otimes X$ называется также *тензорной контравариантной алгеброй*. Вектор тензорной контравариантной алгебры записывается следующим образом:

$$\mathbf{x}=\mathbf{e}_0\cdot x^0+\mathbf{e}_{k_1}\cdot x^{k_1}+\mathbf{e}_{k_1k_2}\cdot x^{k_1k_2}+\ldots\,.$$

Здесь $\mathbf{e}_0$ – действительная единица. Этот вектор удобно записать, используя *собирательный* индекс

$$K\sim\ 0\,,\ \ k_1\,,\ \ k_1k_2\,,\ \ k_1k_2k_3\,,\ \ \ldots\,,$$

обобщенный базисный вектор

$$\mathbf{e}_K=\mathbf{e}_0,\,\mathbf{e}_{k_1},\,\mathbf{e}_{k_1k_2},\,\ldots$$

и обобщенные координаты

$$x^K=x^0,\,x^{k_1},\,x^{k_1k_2},\,\ldots\,,$$

в компактном виде

$$\mathbf{x}=\mathbf{e}_K\cdot x^K\,.$$

Напомним, что векторы и координаты тензорной контравариантной алгебры имеют размерность длины.

---

[3] Напомним, что $\mathbb{R}$ – это множество действительных чисел, а L_0 множитель размерности длины.

[4] Отметим, что векторное пространство контравариантных тензоров бесконечномерно.

5. Симметрии тензоров. Разложение тензоров на симметрии

Разложение тензоров на *симметрии* начнем с тензоров второго порядка и конкретнее с базисных тензоров второго порядка

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \,.$$

Запишем этот тензор в виде суммы

$$\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} = [\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}] + \langle \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \rangle \,, \tag{1}$$

где

$$[\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}] = \frac{1}{2!}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} - \mathbf{e}_{k_2} \otimes \mathbf{e}_{k_1})$$

и

$$\langle \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \rangle = \frac{1}{2!}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} + \mathbf{e}_{k_2} \otimes \mathbf{e}_{k_1}) \,.$$

Тензор $[\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}]$ антисимметричен при перестановке сомножителей, а тензор $\langle \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \rangle$ симметричен при перестановке сомножителей. Выражение $[\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}]$ обозначим $(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2})_1$ и назовем *первой симметрией*, а выражение $\langle \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \rangle$ обозначим $(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2})_2$ и назовем *второй симметрией*. Отсюда соотношение (1) представляет собой разложение тензора второго порядка на две симметрии

$$\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} = (\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2})_1 + (\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2})_2 \,.$$

Рассмотрим теперь разложение тензора третьего порядка

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2 k_3} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \otimes \mathbf{e}_{k_3} \,.$$

Предварительно заметим, что для изложения существа вопроса нет необходимости указывать ни базисные векторы, ни их индексы, достаточно указывать только номера индексов. Для того, чтобы не путать номера индексов с числами, будем обозначать номера индексов жирными цифрами. В принимаемых обозначениях предыдущее разложение тензора второго порядка на симметрии выглядит следующим образом:

$$\mathbf{12} = (\mathbf{12})_1 + (\mathbf{12})_2$$

$$(\mathbf{12})_1 \equiv [\mathbf{12}] = \frac{1}{2}(\mathbf{12} - \mathbf{21}) \,,$$

$$(\mathbf{12})_2 \equiv \langle \mathbf{12} \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{12} + \mathbf{21}) \,.$$

После сказанного вернемся к тензору третьего порядка, который с учетом предыдущего замечания запишем так

$$\mathbf{123} \,.$$

Прежде всего, заметим, что если положить, что перестановка каждой пары сомножителей антисимметрична, то есть

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21} \,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31} \,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32} \,, \tag{2}$$

$$\text{или } \langle \mathbf{12} \rangle = 0 \,, \quad \langle \mathbf{13} \rangle = 0 \,, \quad \langle \mathbf{23} \rangle = 0 \,,$$

то можно построить антисимметричный тензор третьего порядка

$$[\mathbf{123}] = \frac{1}{3!}(\mathbf{123} - \mathbf{213} + \mathbf{231} - \mathbf{321} + \mathbf{312} - \mathbf{132}) \,.$$

Подобным образом, полагая, что перестановка каждой пары сомножителей симметрична, то есть

$$\mathbf{12} = \mathbf{21} \,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31} \,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32} \,, \tag{3}$$

$$\text{или } [\mathbf{12}] = 0 \,, \quad [\mathbf{13}] = 0 \,, \quad [\mathbf{23}] = 0 \,,$$

можно построить симметричный тензор третьего порядка

$$\langle \mathbf{123} \rangle = \frac{1}{3!}(\mathbf{123} + \mathbf{213} + \mathbf{231} + \mathbf{321} + \mathbf{312} + \mathbf{132}) \,.$$

Сумма

$$[\mathbf{123}] + \langle \mathbf{123} \rangle = \frac{1}{3}(\mathbf{123} + \mathbf{231} + \mathbf{312}) \neq \mathbf{123} \tag{4}$$

и отсюда следует, что симметрии $[\mathbf{123}]$ и $\langle \mathbf{123} \rangle$ не исчерпывают весь необходимый набор симметрий. Для построения оставшихся симметрий заметим, что помимо антисимметричных соотношений (2) и симметричных соотношений (3) возможны смешанные перестановочные соотношения.

1.

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21} \,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31} \,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32} \tag{5}$$

(два антисимметричных и одно симметричное соотношения).

2.

$$\mathbf{12} = \mathbf{21} \,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31} \,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32} \tag{6}$$

(два симметричных и одно антисимметричное соотношения).

Перестановочным соотношениям (5) соответствует симметрия, которую обозначим

$$(\mathbf{123})_2 = \frac{1}{3!}(\mathbf{123} - \mathbf{213} - \mathbf{231} + \mathbf{321} - \mathbf{312} - \mathbf{132}) \,.$$

Перестановочным соотношениям (6) соответствует симметрия, которую обозначим

$$(\mathbf{123})_3 = \frac{1}{3!}(\mathbf{123} + \mathbf{213} - \mathbf{231} - \mathbf{321} - \mathbf{312} + \mathbf{132}) \,.$$

Их сумма

$$(\mathbf{123})_2 + (\mathbf{123})_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312}) \,.$$

Сравнивая это выражение с соотношением (4), замечаем, что разложение тензора третьего порядка на симметрии имеет вид

$$\mathbf{123} = \frac{3}{2}\left((\mathbf{123})_1 + (\mathbf{123})_2 + (\mathbf{123})_3 + (\mathbf{123})_4\right) \,,$$

где введено обозначение

$$(\mathbf{123})_1 = [\mathbf{123}]\,, \quad (\mathbf{123})_4 = \langle \mathbf{123} \rangle\,.$$

Подробнее симметрии тензора третьего порядка, а также симметрии тензора четвертого порядка будут рассмотрены в Главе 3.4, относящейся к классификации фундаментальных частиц.

III. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК УНИВЕРСАЛЬНАЯ КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА

Наряду с тензорным произведением векторов образующего пространства X будем рассматривать *скалярное* и *векторное* произведения векторов. Напомним, что скалярное произведение для пространства X как пространства-времени СТО уже было введено в предыдущей Главе 1.1 (Раздел IV).

1. Скалярное произведение векторов образующего пространства

Скалярное произведение векторов, в отличие от предыдущей Главы, будем записывать следующим образом[5]:

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2\,.$$

Оно представляет собой билинейное отображение

$$\frac{1}{L_0}F_0(\mathbf{x}_1\,,\ \mathbf{x}_2)$$

векторов в множество действительных чисел $\mathbb{R} \cdot L_0$

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \equiv \frac{1}{L_0}F_0(\mathbf{x}_1\,,\ \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R} \cdot L_0\,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$F_0(\mathbf{x}_1\,,\ \mathbf{x}_2) = F_0(\mathbf{e}_{k_1}\, {x_1}^{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2}\, {x_2}^{k_2}) = \\ = F_0(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2})\, {x_1}^{k_1}\, {x_2}^{k_2}\,.$$

Числовая величина

$$g_{k_1 k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} \equiv F_0(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2})\,.$$

называется *метрическим тензором.*

По-прежнему будем полагать, что скалярное произведение не зависит от порядка используемых сомножителей. Отсюда

$$g_{k_1 k_2} = g_{k_2 k_1}\,.$$

[5] определенное таким образом скалярное произведение имеет размерность длины.

2. Векторное произведение векторов образующего пространства

Векторное произведение векторов образующего пространства будем записывать следующим образом:

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\,.$$

Оно представляет собой билинейное отображение

$$\frac{1}{L_0}F_1(\mathbf{x}_1\,,\ \mathbf{x}_2)$$

векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ в векторное пространство X

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \equiv \frac{1}{L_0}F_1(\mathbf{x}_1\,,\ \mathbf{x}_2) \in X\,.$$

В силу билинейности

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = F_1(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2})\,\frac{1}{L_0}{x_1}^{k_1}\, {x_2}^{k_2}\,.$$

Векторное произведение базисных векторов

$$\mathbf{e}_{k_1} \times \mathbf{e}_{k_2} = F_1(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2})$$

также является вектором образующего пространства X. Поэтому

$$\mathbf{e}_{k_1} \times \mathbf{e}_{k_2} = \mathbf{e}_k \cdot {C^k}_{k_1 k_2}\,,$$

где постоянные коэффициенты ${C^k}_{k_1 k_2}$ – это координаты вектора $\mathbf{e}_{k_1} \times \mathbf{e}_{k_2}$.

3. Универсальное произведение векторов. Пространство-время как универсальная контравариантная алгебра

Произведение двух векторов образующего пространства $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, составленное из скалярного, векторного и тензорного произведений, назовем *универсальным* и запишем следующим образом:

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2\,.$$

По отношению к базисным векторам универсальное произведение принимает вид

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} + \mathbf{e}_{k_1} \times \mathbf{e}_{k_2} + \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} = \\ = g_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_k \cdot {C^k}_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_{k_1 k_2}\,. \tag{7}$$

Алгебру, построенную на универсальном произведении, назовем *универсальной* контравариантной и будем обозначать $\mathbb{X}$. Вектор универсальной контравариантной алгебры записывается так же, как вектор тензорной контравариантной алгебры

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0 \cdot x^0 + \mathbf{e}_{k_1} \cdot x^{k_1} + \mathbf{e}_{k_1 k_2} \cdot x^{k_1 k_2} + \ldots\,.$$

Начиная с этого момента будем рассматривать универсальную контравариантную алгебру $\mathbb{X}$ как *обобщенное* пространство-время, обобщающее пространство-время специальной теории относительности X. Определение *обобщенное* по отношению к $\mathbb{X}$ для краткости будем в дальнейшем опускать.

3.1. Ассоциативность универсального умножения

Покажем, что универсальное умножение является ассоциативным. Для этого установим, что

$$(\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = \mathbf{e}_{k_1} \circ (\mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3}) \,. \tag{8}$$

Сначала вычислим левую часть:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = \\ = \; & (g_{k_1k_2} + \mathbf{e}_k \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = \\ = \; & g_{k_1k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_3} + \mathbf{e}_k \circ \mathbf{e}_{k_3} \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3} = \\ = \; & g_{k_1k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_3} + \\ + \; & g_{kk_3} \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{kk_3} \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{kk_3} \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \\ + \; & \mathbf{e}_{k_1} \cdot g_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3} \,. \end{aligned}$$

Раскрывая предпоследнее слагаемое, получим

$$\begin{aligned} & (\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = g_{k_1k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_3} + \\ + \; & g_{kk_3} \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{kk_3} \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{kk_3} \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \\ + \; & \mathbf{e}_{k_1} \cdot c_{k_2k_3} + g_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_5} \cdot C^{k_5}{}_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3} + \\ + \; & \mathbf{e}_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3} \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь вычислим правую часть:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_{k_1} \circ (\mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3}) = \\ = \; & \mathbf{e}_{k_1} \circ (g_{k_2k_3} + \mathbf{e}_k \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_2k_3}) = \\ = \; & \mathbf{e}_{k_1} \cdot g_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_k \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2k_3} = \\ = \; & \mathbf{e}_{k_1} \cdot g_{k_2k_3} + \\ + \; & g_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \\ + \; & g_{k_1k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_3} + \mathbf{e}_{k_4} \circ \mathbf{e}_{k_3} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3} \,. \end{aligned}$$

Раскрывая предпоследнее слагаемое, получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_{k_1} \circ (\mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3}) = \mathbf{e}_{k_1} \cdot g_{k_2k_3} + \\ + \; & g_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \\ + \; & g_{k_1k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_3} + g_{k_4k_3} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_5} \cdot C^{k_5}{}_{k_4k_3} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2} + \\ + \; & \mathbf{e}_{k_4k_3} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3} \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Сравнивая выражения (9) и (10), убеждаемся в выполнении условия (8) и ассоциативности универсального умножения в целом.

4. Единичные числовые тензоры

Универсальное произведение n тензоров проецируется на сумму тензоров порядка от нуля до n. Например, для произведения двух базисных векторов

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = g_{k_1k_2} + \mathbf{e}_k \cdot C^k{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1k_2} \,.$$

Для произведения трех базисных векторов из соотношения (10) следует:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3} = (g_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + g_{k_4k_3} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2}) + \\ & + \big(\mathbf{e}_{k_1} \cdot g_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \\ & + \mathbf{e}_{k_5} \cdot C^{k_5}{}_{k_4k_3} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_3} \cdot g_{k_1k_2}\big) + \\ & + (\mathbf{e}_{k_1k} \cdot C^k{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_4k_3} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2}) + \\ & + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3} \,. \end{aligned}$$

Это произведение можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3} = g_{k_1k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2k_3} + \\ & + \mathbf{e}_{k_4k_5} \cdot C^{k_4k_5}{}_{k_1k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3} \,. \end{aligned}$$

Таким образом, универсальное умножение вводит набор числовых тензоров

$$\begin{aligned} & g_{k_1k_2} \,, \; C^{k_3}{}_{k_1k_2} \,, \\ & g_{k_1k_2k_3} \,, \; C^{k_4}{}_{k_1k_2k_3} \,, \; C^{k_4k_5}{}_{k_1k_2k_3} \,, \\ & g_{k_1k_2k_3k_4} \,, \; C^{k_5}{}_{k_1k_2k_3k_4} \,, \; C^{k_5k_6}{}_{k_1k_2k_3k_4} \,, \; C^{k_5k_6k_7}{}_{k_1k_2k_3k_4} \,, \\ & \ldots \end{aligned}$$

Конкретизация числовых тензоров связана с двумя действиями:

1) разложением числовых тензоров по симметриям;

2) введением условий, позволяющих рассматривать числовые тензоры как *единичные*, то есть таких, компоненты которых принимают значения либо +1, либо -1, либо 0.

Например, для *нормированных* базисных векторов образующего пространства $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ выполняется равенство

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1 \,,$$

а для *ортогональных* базисных векторов имеем[6]

$$g_{k_1k_2} = 0 \text{ при } k_1 \neq k_2 \,.$$

Другой пример: в теории векторного поля[7]

$$C^a{}_{bc} = \varepsilon_{abc} \,,$$

где ε_{abc} - антисимметричный единичный числовой тензор.

IV. ЛЕВАЯ И ПРАВАЯ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОНТРАВАРИАНТНЫЕ АЛГЕБРЫ

Так же, как для тензорной алгебры $\otimes X$, вектор универсальной контравариантной алгебры $\mathbb{X}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0 \cdot x^0 + \mathbf{e}_{k_1} \cdot x^{k_1} + \mathbf{e}_{k_1k_2} \cdot x^{k_1k_2} + \ldots \,. \tag{11}$$

удобно записать, используя обобщенный базисный вектор

$$\mathbf{e}_K = \mathbf{e}_0, \, \mathbf{e}_{k_1}, \, \mathbf{e}_{k_1k_2}, \, \ldots$$

---

[6] Заметим, что понятие ортонормированности определено только по отношению к собственному пространству, в данном случае по отношению к системе отсчета. По отношению к другому пространству эти же базисные векторы могут иметь другую длину и другие углы между собой. То есть понятия *длина вектора* и *угол между векторами* являются относительными.

[7] Индексы a ,b ,c , принимают значения 1 ,2 ,3 .

и обобщенные координаты

$$x^K = x^0,\, x^{k_1},\, x^{k_1 k_2},\, \dots\,;$$

в компактном виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot x^K\,.$$

Обратимся к умножению векторов. Пусть *сначала* рассматривается вектор $\mathbf{x}_1$, а *затем* вектор $\mathbf{x}_2$. С этой точки зрения вектор $\mathbf{x}_1$ будем называть *начальным*, а вектор $\mathbf{x}_2$ - *последующим*. Возможны два варианта умножения указанных векторов:

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *справа*, и

$$\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *слева*. В общем случае умножение векторов некоммутативно, поэтому

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1\,.$$

Введем обозначение для правого произведения

$$_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2\,. \qquad (12)$$

Здесь коэффициент L_0 имеет размерность длины и согласует размерности правой и левой частей уравнения. Левое произведение, соответственно, запишем так:

$$_l\mathbf{x} = \frac{1}{L_0}\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1\,. \qquad (13)$$

Алгебру, основанную на умножении (12), назовем *правой* и обозначим $_r\mathbb{X}$.

Алгебру, основанную на умножении (13), назовем *левой* и обозначим $_l\mathbb{X}$. Единицей алгебр является вектор, равный числу L_0.

Предыдущие построения повторим для умножения базисных векторов. Пусть базисные векторы $\mathbf{e}_{K_1}$ являются начальными, а базисные векторы $\mathbf{e}_{K_2}$ являются последующими.Тогда правое произведение базисных векторов запишем следующим образом:

$$\mathbf{e}_{K_1} \circ \mathbf{e}_{K_2} = \mathbf{e}_K \cdot {}_rC^K{}_{K_1 K_2}\,, \qquad (14)$$

где ${}_rC^K{}_{K_1 K_2}$ - *структурные постоянные* правой универсальной контравариантной алгебры $_r\mathbb{X}$.

Левое произведение базисных векторов, соответственно, запишем следующим образом:

$$\mathbf{e}_{K_2} \circ \mathbf{e}_{K_1} = \mathbf{e}_K \cdot {}_lC^K{}_{K_1 K_2}\,, \qquad (15)$$

где ${}_lC^K{}_{K_1 K_2}$ - *структурные постоянные* левой универсальной контравариантной алгебры $_l\mathbb{X}$.

Очевидно, что

$${}_rC^K{}_{K_1 K_2} = {}_lC^K{}_{K_2 K_1}\,. \qquad (16)$$

Для того, чтобы не возникала путаница между формулами (14) и (15), удобно ввести разное обозначение для базисных векторов левой и правой алгебр соответственно[8]

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{e}_K &\ - \ \text{левые базисные векторы}\,, \\ {}_r\mathbf{e}_K &\ - \ \text{правые базисные векторы}\,. \end{aligned}$$

Тогда умножение левых базисных векторов задается структурными постоянными $_lC$:

$${}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_1} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lC^K{}_{K_1 K_2}\,,$$

а умножение правых базисных векторов задается структурными постоянными $_rC$

$${}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_2} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rC^K{}_{K_1 K_2}\,.$$

Учитывая равенства

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_{K_1} \cdot x_1^{K_1}\,, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_{K_2} \cdot x_2^{K_1}$$

и соотношения (14) и (15), из (12) и (13) получим

$${}_rx^K = \frac{1}{L_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1 K_2} \cdot x_1^{K_1} \cdot x_2^{K_2} \qquad (17)$$

и

$${}_lx^K = \frac{1}{L_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1 K_2} \cdot x_1^{K_1} \cdot x_2^{K_2}\,. \qquad (18)$$

Формулы (17) и (18) задают умножение векторов по отношению к координатам векторов.

Рассмотрим частные случаи умножения векторов вблизи единицы алгебры. Имеем

при $x_1^{K_1} \to x_1^0 = L_0$

$$\begin{aligned} {}_rx^K &= x_2^K\,, \qquad {}_rC^K{}_{0K_2} = \delta^K{}_{K_2}\,, \\ {}_lx^K &= x_2^K\,, \qquad {}_lC^K{}_{0K_2} = \delta^K{}_{K_2}\,; \end{aligned}$$

при $x_2^{K_2} \to x_2^0 = L_0$

$$\begin{aligned} {}_rx^K &= x_1^K\,, \qquad {}_rC^K{}_{K_1 0} = \delta^K{}_{K_1}\,, \\ {}_lx^K &= x_1^K\,, \qquad {}_lC^K{}_{K_1 0} = \delta^K{}_{K_1}\,. \end{aligned}$$

---

[8] Такое различие теряет смысл, когда умножение векторов и соответственно алгебраические свойства множеств векторов не рассматриваются.

1. Алгебры и группы линейных преобразований, ассоциированные с умножением контравариантных векторов

Умножение вектора $\mathbf{x}_1$ (справа или слева) на вектор $\mathbf{x}_2$ сводится к линейному преобразованию этого вектора. Действительно, введем матрицу линейного преобразования

$$ {}_r l^K{}_{K_1} = \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot x_2^{K_2} = $$
$$ = \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 0} \cdot x_2^0 + \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 \alpha} \cdot x_2^\alpha \,. $$

Тогда (17) запишется как линейное преобразование

$$ {}_r x^K = {}_r l^K{}_{K_1} \cdot x_1^{K_1} \,. $$

Будем рассматривать линейное преобразование ${}_r l^K{}_{K_1}$ как элемент алгебры, которую обозначим ${}_r\mathbb{L}'$, некоторой *непрерывной* группы, которую обозначим ${}_r\mathbb{G}'$. Назовем ${}_r\mathbb{L}'$ и ${}_r\mathbb{G}'$ соответственно правыми алгеброй и группой, *ассоциированными с правым умножением векторов*[9]. Преобразование (элемент) ${}_r L^K{}_{K_1}$ этой группы строится по элементу ${}_r l^K{}_{K_1}$ алгебры ${}_r\mathbb{L}'$ следующим образом:

$$ {}_r L^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp({}_r l^K{}_{K_1}) \quad \text{или} $$

$$ {}_r L^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp\left(\frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot x_2^{K_2}\right) . \tag{19} $$

В малом элемент группы должен сводиться к элементу алгебры. В нашем случае имеем[10]

$$ {}_r dL^K{}_{K_1}\Big|_{\left(\substack{x^0 = L_0 \\ x^\alpha = 0}\right)} = {}_r dl^K{}_{K_1} = \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot dx_2^{K_2} \,. $$

Также используем матрицу

$$ {}_l l^K{}_{K_1} = \frac{1}{L_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot x_2^{K_2} = $$
$$ = \frac{1}{L_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 0} \cdot x_2^0 + \frac{1}{L_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 \alpha} \cdot x_2^\alpha \,. $$

и запишем (18) как линейное преобразование

$$ {}_l x^K = {}_l l^K{}_{K_1} \cdot x_1^{K_1} \,. $$

Аналогичным образом будем рассматривать линейное преобразование ${}_l l^K{}_{K_1}$ как элемент алгебры ${}_l\mathbb{L}'$ некоторой группы ${}_l\mathbb{G}'$. Назовем ${}_l\mathbb{L}'$ и ${}_l\mathbb{G}'$ соответственно левыми алгеброй и группой, *ассоциированными с левым умножением векторов*[11]. Преобразование (элемент) ${}_l L^K{}_{K_1}$ этой группы строится по элементу ${}_l l^K{}_{K_1}$ алгебры ${}_l\mathbb{L}'$ следующим образом:

$$ {}_l L^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp({}_l l^K{}_{K_1}) \quad \text{или} $$

$$ {}_l L^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp\left(\frac{1}{L_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot x_2^{K_2}\right) . \tag{20} $$

В малом элемент группы должен сводиться к элементу алгебры. В нашем случае имеем[12]

$$ {}_l dL^K{}_{K_1}\Big|_{\left(\substack{x^0 = L_0 \\ x^\alpha = 0}\right)} = {}_l dl^K{}_{K_1} = \frac{1}{L_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot dx_2^{K_2} \,. $$

V. ПОДАЛГЕБРЫ УНИВЕРСАЛЬНОЙ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ

Из универсальной контравариантной алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$ выделим подалгебру, накладывая на произведение базисных векторов (7) следующие условия:

1) условие евклидовости, в которое включим два требования:

a) при $k_1 = k_2$

$$ \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} \,, $$

причем

$$ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1\,,\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1\,,\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1\,,\ \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = -1\,. $$

b) при $k_1 \neq k_2$

$$ \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \,, $$

2) условие соседней перестановки
при $k_1 \neq k_2$

$$ \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = \mathrm{sign}(k_1, k_2) \cdot \mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_1} \,. $$

Здесь $\mathrm{sign}(k_1, k_2)$ – знак соседней перестановки, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов[13].

Из вышеуказанных условий вытекает, что векторное произведение базисных векторов образующего

---

[9] К группе, подобной ${}_r\mathbb{G}'$, принадлежат группы электрического заряда и слабого заряда частиц (см. Глава 4.2. Раздел II.1 и Глава 4.3. Раздел II.1).

[10] При дифференцировании необходимо учесть, что ${}_r C^K{}_{K_1 0} = \delta^K{}_{K_1}$ и $\exp(\delta^K{}_{K_1}) = \exp(1) \cdot \delta^K{}_{K_1}$.

[11] К группе, подобной ${}_l\mathbb{G}'$, принадлежат группы нерелятивистского и релятивистского спина частиц (см. Глава 4.2. Раздел II.2 и Глава 4.3. Раздел II.2).

[12] При дифференцировании необходимо учесть, что ${}_l C^K{}_{K_1 0} = \delta^K{}_{K_1}$ и $\exp(\delta^K{}_{K_1}) = \exp(1) \cdot \delta^K{}_{K_1}$.

[13] Конкретное значение $\mathrm{sign}(k_1, k_2)$ определяет подалгебру универсальной контравариантной алгебры пространства-времени.

пространства в подалгебре не рассматривается. Кроме того, из них следует, что произведение четного количества одинаковых базисных векторов образующего пространства сводится к базисному вектору $\mathbf{e}_0$. Например,

$$\mathbf{e}_{1111} = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0 \,.$$

Совокупность подалгебр, снабженных умножением в соответствии с вышеуказанными условиями, назовем *алгеброй пространства-времени фундаментальных объектов.* Давая такое определение, мы исходим из постулата о том, что физическая реальность включает в себя *фундаментальные объекты*, примером которых служат фундаментальные частицы, а обобщенное пространство-время – это окружение, в котором существуют фундаментальные объекты.

1. Конечное число измерений пространства подалгебры

Условия соседней перестановки и евклидовости приводят к тому, что пространство подалгебры $\mathbb{X}$ имеет конечное число измерений (конечное число базисных векторов). Для того, чтобы пояснить это, рассмотрим пространство тензоров порядка p – X^p. Базисные векторы этого пространства имеют вид

$$\mathbf{e}_{i_1} \circ \mathbf{e}_{i_2} \circ \ldots \circ \mathbf{e}_{i_p} \,.$$

В эти выражения не могут входить два одинаковых образующих базисных вектора. Если такое имеет место, то с помощью условия соседней транспозиции и условия евклидовости такой базисный вектор может быть сведен к базисному вектору, в произведении которого одинаковые образующие базисные векторы отсутствуют. То есть такой базисный вектор $\mathbf{e}_{i_1} \circ \mathbf{e}_{i_2} \circ \ldots \circ \mathbf{e}_{i_p}$ не является линейно независимым вектором и не является базисным вектором по определению.

Отсюда следует, что порядок p пространства тензоров X^p не превышает число измерений образующего пространства n. А так как образующее пространство X^1 – это четырехмерное пространство-время СТО, то $p \le 4$. Таким образом, в крайнем случае

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + X^4 \,.$$

Если число измерений образующего пространства X^1 обозначить через n[14]

$$\dim X^1 = n \,,$$

то число измерений пространства X^p равно числу сочетаний из n элементов по p

$$\dim X^p = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{p!} = \mathrm{C}_n^p \,.$$

Отсюда следует что

$$\dim X^p = \dim X^{n-p} \,, \quad \dim X^n = 1 \,, \quad \dim X^{n-1} = n \,.$$

Подалгебра пространства-времени $\mathbb{X}$ в общем случае представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + \ldots + X^n \,.$$

Число измерений подалгебры пространства-времени

$$N = \dim \mathbb{X} = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

В нашем случае образующее пространство – это четырехмерное пространство-время СТО, то есть

$$\dim X^1 = 4 \,,$$

поэтому

$$\dim X^2 = 6 \,, \quad \dim X^3 = 4 \,, \quad \dim X^4 = 1 \,,$$

$$\dim \mathbb{X} = 2^4 = 16 \,.$$

Вектор пространства-времени (11) в нашем случае имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0\, x^0 + \mathbf{e}_i\, x^i + \mathbf{e}_{ij}\, x^{ij} + \mathbf{e}_{ijk}\, x^{ijk} + \mathbf{e}_{1324}\, x^{1324} \,.$$

Будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$I\,, J\,, K\,, L\,, \sim (0, i, ij, ijk\,, 1324),$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_I\, x^I \,.$$

Если образующее пространство представляет собой трехмерное геометрическое пространство[15], то

$$\dim X^2 = 3 \,, \quad \dim X^3 = 1 \,,$$

$$N = \dim \mathbb{X}_3 = 2^3 = 8 \,.$$

Вектор пространства универсальной подалгебры (11) в этом случае имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0\, x^0 + \mathbf{e}_a\, x^a + \mathbf{e}_{ab}\, x^{ab} + \mathbf{e}_{123}\, x^{123} \,.$$

Будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$A\,, B\,, C\,, D\,, \sim (0, a, ab, 123),$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_A\, x^A \,.$$

[14] Выражение $\dim A$ означает *число измерений* векторного пространства A.

[15] Иногда будем использовать обозначение $\mathbb{X}_n$ для подалгебры пространства-времени, подчеркивая размерность n образующего пространства X^1.

2. Скалярное произведение. Метрический тензор

Условие соседней перестановки и условие евклидовости позволяют обобщить скалярное произведение в образующем пространстве до скалярного произведения в подалгебре $\mathbb{X}$.

Для $K_1 = K_2$

$$\mathbf{e}_{K_1} \circ \mathbf{e}_{K_2} = \mathbf{e}_{K_1} \cdot \mathbf{e}_{K_2} = g_{K_1K_2} \,.$$

Здесь $g_{K_1K_2}$ – *метрический тензор* в подалгебре пространства-времени $\mathbb{X}$. Указанное скалярное произведение определяется через скалярные произведения образующих базисных векторов. Очевидно, что определенный таким образом метрический тензор не зависит от порядка умножения базисных векторов, то есть

$$g_{K_1K_2} = g_{K_2K_1} \,.$$

Вместе с тем скалярное умножение является частным случаем универсального умножения. Для правой универсальной подалгебры ${}_r\mathbb{X}$ из (14) для $K_1 = K_2$ имеем

$$\mathbf{e}_{K_1} \cdot \mathbf{e}_{K_2} = \mathbf{e}_0 \cdot {}_rC^0{}_{K_1K_2} \,.$$

Отсюда

$$g_{K_1K_2} = {}_rC^0{}_{K_1K_2} \,.$$

Также для левой универсальной подалгебры ${}_l\mathbb{X}$ из (15) для $K_1 = K_2$ имеем

$$\mathbf{e}_{K_2} \cdot \mathbf{e}_{K_1} = \mathbf{e}_0 \cdot {}_lC^0{}_{K_1K_2} \,.$$

Отсюда

$$g_{K_1K_2} = {}_lC^0{}_{K_1K_2} \,.$$

Если учесть, что

$${}_rC^K{}_{K_1K_2} = {}_lC^K{}_{K_2K_1} \,,$$

то получим: в правой и левой подалгебрах пространства-времени $\mathbb{X}$ имеет место один и тот же метрический тензор.

Установим еще одну связь между метрическим тензором и структурными постоянными подалгебры. Для этого воспользуемся ассоциативностью умножения в правой подалгебре ${}_r\mathbb{X}$ по отношению к базисным векторам

$$({}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_2}) \circ {}_r\mathbf{e}_{K_3} = {}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ ({}_r\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_3}) \,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (14),получим

$${}_rC^K{}_{K_1K_2}\,({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_{K_3}) = ({}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_K)\;{}_rC^K{}_{K_2K_3} \,.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (14), получим

$${}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot {}_rC^{K_4}{}_{KK_3} = {}_rC^{K_4}{}_{K_1K} \cdot {}_rC^K{}_{K_2K_3} \,. \qquad (21)$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам K_4 и K_1. Получим

$${}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot {}_rC^{K_1}{}_{KK_3} = {}_rC^{K_1}{}_{K_1K} \cdot {}_rC^K{}_{K_2K_3} \,. \qquad (22)$$

Так как произведение базисного вектора $\mathbf{e}_K$ на базисный вектор, отличный от $\mathbf{e}_0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^M{}_{L0}$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (22) имеет вид

$${}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot {}_rC^{K_1}{}_{KK_3} = {}_rC^{K_1}{}_{K_10} \cdot {}_rC^0{}_{K_2K_3} \,.$$

Отсюда получим

$$g_{K_2K_3} = \frac{1}{N} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot {}_rC^{K_1}{}_{KK_3} \,,$$

где N–число измерений подалгебры ${}_r\mathbb{X}$.

Аналогичное соотношение получим для структурных постоянных левой подалгебы ${}_l\mathbb{X}$. Для этого воспользуемся ассоциативностью умножения в левой подалгебре ${}_l\mathbb{X}$ по отношению к базисным векторам

$$({}_l\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_2}) \circ {}_l\mathbf{e}_{K_3} = {}_l\mathbf{e}_{K_1} \circ ({}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_3}) \,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (15), получим

$${}_lC^K{}_{K_2K_1}\,({}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_{K_3}) = ({}_l\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_l\mathbf{e}_K)\;{}_lC^K{}_{K_3K_2} \,.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (15), получим

$${}_lC^K{}_{K_2K_1} \cdot {}_lC^{K_4}{}_{K_3K} = {}_lC^{K_4}{}_{KK_1} \cdot {}_lC^K{}_{K_3K_2}$$

или иначе

$${}_lC^{K_4}{}_{KK_1} \cdot {}_lC^K{}_{K_3K_2} = {}_lC^{K_4}{}_{K_3K} \cdot {}_lC^K{}_{K_2K_1} \,. \qquad (23)$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам K_4 и K_1. Получим

$${}_lC^{K_1}{}_{KK_1} \cdot {}_lC^K{}_{K_3K_2} = {}_lC^{K_1}{}_{K_3K} \cdot {}_lC^K{}_{K_2K_1} \,. \qquad (24)$$

Так как произведение базисного вектора $\mathbf{e}_K$ на базисный вектор, отличный от $\mathbf{e}_0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^M{}_{0L}$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (24) имеет вид

$${}_lC^{K_1}{}_{0K_1} \cdot {}_lC^0{}_{K_3K_2} = {}_lC^{K_1}{}_{K_3K} \cdot {}_lC^K{}_{K_2K_1} \,.$$

Отсюда получим

$$g_{K_3K_2} = \frac{1}{N} \cdot {}_lC^{K_1}{}_{K_3K} \cdot {}_lC^K{}_{K_2K_1} \,,$$

где N–число измерений подалгебры ${}_l\mathbb{X}$.

Скалярное произведение вектора пространства-времени на себя определяет его квадрат длины

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{IK} \cdot x^I \cdot x^K \,.$$

Подалгебру пространства-времени $\mathbb{X}$ необходимо подчинить условию: *квадрат длины вектора* $\mathbf{x}$ *равен нулю*[16]:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\equiv g_{IK}\cdot x^I\cdot x^K=0\,.$$

По существу это условие позволяет рассматривать координаты x^0 как обобщение *интервала* пространства-времени СТО.

3. Деление в подалгебрах $\mathbb{X}$

Подалгебры пространства-времени $\mathbb{X}$ являются алгебрами с делением. Для каждого вектора $\mathbf{x}\in\mathbb{X}$, за исключением нулевого, определен *обратный* вектор $\mathbf{x}^{-1}$.

По определению обратный вектор $\mathbf{x}^{-1}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{x}^{-1}=\mathbf{e}_0\,, \tag{25}$$
$$\mathbf{x}^{-1}\circ\mathbf{x}=\mathbf{e}_0\,. \tag{26}$$

Из уравнения (25) следует

$${}_rC^0{}_{K_1K_2}\cdot(x^{-1})^{K_1}\cdot x^{K_2}=1\,, \tag{27}$$
$${}_rC^\alpha{}_{K_1K_2}\cdot(x^{-1})^{K_1}\cdot x^{K_2}=0\,. \tag{28}$$

Здесь индекс α принимает значения

$$\alpha\sim\ k\,,\ k_1k_2\,,\ k_1k_2k_3\,,\ \ldots$$

или иначе с учетом (16)

$${}_lC^0{}_{K_1K_2}\cdot(x^{-1})^{K_2}\cdot x^{K_1}=1\,, \tag{29}$$
$${}_lC^\alpha{}_{K_1K_2}\cdot(x^{-1})^{K_2}\cdot x^{K_1}=0\,. \tag{30}$$

В уравнениях (28) и (30) индекс $\alpha\neq0$.

Из уравнения (26) следует

$${}_rC^0{}_{K_1K_2}\cdot(x^{-1})^{K_2}\cdot x^{K_1}=1\,, \tag{31}$$
$${}_rC^\alpha{}_{K_1K_2}\cdot(x^{-1})^{K_2}\cdot x^{K_1}=0 \tag{32}$$

или иначе с учетом (16)

$${}_lC^0{}_{K_1K_2}\cdot(x^{-1})^{K_1}\cdot x^{K_2}=1\,, \tag{33}$$
$${}_lC^\alpha{}_{K_1K_2}\cdot(x^{-1})^{K_1}\cdot x^{K_2}=0\,. \tag{34}$$

Вычислим полусуммы уравнений (27), (33) и (28), (34):

$$\frac{1}{2}\cdot(\,{}_rC^0{}_{K_1K_2}+\,{}_lC^0{}_{K_1K_2})\cdot(x^{-1})^{K_1}\cdot x^{K_2}=1\,, \tag{35}$$
$$\frac{1}{2}\cdot(\,{}_rC^\alpha{}_{K_1K_2}+\,{}_lC^\alpha{}_{K_1K_2})\cdot(x^{-1})^{K_1}\cdot x^{K_2}=0\,. \tag{36}$$

Кроме того, вычислим полусуммы уравнений (29), (31) и (30), (32):

$$\frac{1}{2}\cdot(\,{}_lC^0{}_{K_1K_2}+\,{}_rC^0{}_{K_1K_2})\cdot(x^{-1})^{K_2}\cdot x^{K_1}=1\,, \tag{37}$$
$$\frac{1}{2}\cdot(\,{}_lC^\alpha{}_{K_1K_2}+\,{}_rC^\alpha{}_{K_1K_2})\cdot(x^{-1})^{K_2}\cdot x^{K_1}=0\,. \tag{38}$$

Уравнение (37) сводится к уравнению (35). Для этого необходимо в (37) сделать перестановку индексов и учесть, что

$${}_lC^0{}_{K_2K_1}=\,{}_rC^0{}_{K_1K_2}\ \text{ и }$$
$${}_rC^0{}_{K_2K_1}=\,{}_lC^0{}_{K_1K_2}\,.$$

Также уравнение (38) сводится к уравнению (36). Таким образом, имеем систему из N уравнений:

$$g_{K_1K_2}\cdot x^{K_2}\cdot(x^{-1})^{K_1}=1\,, \tag{39}$$
$$\frac{1}{2}\cdot(\,{}_rC^\alpha{}_{K_1K_2}+\,{}_lC^\alpha{}_{K_1K_2})\cdot x^{K_2}\cdot(x^{-1})^{K_1}=0\,, \tag{40}$$

которая позволяет по координатам x^I вектора $\mathbf{x}$ определить N координат $(x^{-1})^K$ обратного вектора $\mathbf{x}^{-1}$.

Из соотношения (12) следует, что обратный вектор правого произведения записывается через умножение обратных векторов таким образом:

$${}_r\mathbf{x}^{-1}=L_0\cdot\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1^{-1}\,. \tag{41}$$

Действительно, вычисляя

$${}_r\mathbf{x}\circ\,{}_r\mathbf{x}^{-1}\,,$$

получим

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1\circ\mathbf{x}_2\circ L_0\cdot\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1^{-1}=\mathbf{e}_0\,.$$

Такой же результат получим, вычисляя

$${}_r\mathbf{x}^{-1}\circ\,{}_r\mathbf{x}\,.$$

Аналогично из (13) следует, что обратный вектор левого произведения записывается через умножение обратных векторов таким образом:

$${}_l\mathbf{x}^{-1}=L_0\cdot\mathbf{x}_1^{-1}\circ\mathbf{x}_2^{-1}\,. \tag{42}$$

Рассматривая выражение (41), обратим внимание на то, что в правой части записано левое умножение обратных векторов, то есть

$$L_0\cdot\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1^{-1}=\,{}_l(\mathbf{x}^{-1})\,.$$

Таким образом, имеем

$$(\,{}_r\mathbf{x})^{-1}=\,{}_l(\mathbf{x}^{-1})\,.$$

Аналогично из соотношения (42) имеем

$$(\,{}_l\mathbf{x})^{-1}=\,{}_r(\mathbf{x}^{-1})\,.$$

---

[16] Пояснения к этому условию приведены в Главе 1.1., Раздел 4.5.

Выведем одно полезное соотношение. Рассмотрим

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1},$$

полагая

$$\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1$$

и соответственно

$$\mathbf{x}^{-1} = L_0 \cdot (\mathbf{x}_1)^{-1} \circ (\mathbf{x}_2)^{-1}.$$

Тогда имеем

$$(\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1) \circ ((\mathbf{x}_1)^{-1} \circ (\mathbf{x}_2)^{-1}) = \mathbf{e}_0.$$

Используя выражения (18) и (42), получим

$$({}_l\mathbf{e}_L \circ {}_r\mathbf{e}_M) \cdot {}_lC^L{}_{KI} \cdot (x_1)^K \cdot (x_2)^I \cdot {}_rC^M{}_{PQ} \, (x_1^{-1})^P \cdot (x_2^{-1})^Q = \mathbf{e}_0.$$

3.1. Пример вычисления обратного вектора

В качестве примера рассмотрим вычисление обратного вектора для алгебры $\mathbb{X}_2$, построенной на базисных векторах $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_{21}$. Для вектора

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0\, x^0 + \mathbf{e}_1\, x^1 + \mathbf{e}_2\, x^2 + \mathbf{e}_{21}\, x^{21}$$

определим обратный вектор

$$\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{e}_0\, (x^{-1})^0 + \mathbf{e}_1\, (x^{-1})^1 + \mathbf{e}_2\, (x^{-1})^2 + \mathbf{e}_{21}\, (x^{-1})^{21}$$

из условия (25). Вычислим вектор $\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1}$. Получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} = \\
&= \mathbf{e}_0\, x^0\, (x^{-1})^0 + \mathbf{e}_1\, x^0\, (x^{-1})^1 + \\
&\qquad + \mathbf{e}_2\, x^0\, (x^{-1})^2 + \mathbf{e}_{21}\, x^0\, (x^{-1})^{21} + \\
&+ \mathbf{e}_1\, x^1\, (x^{-1})^0 + \mathbf{e}_0\, x^1\, (x^{-1})^1 + \\
&\qquad + \mathbf{e}_{21}\, s\, x^1\, (x^{-1})^2 + \mathbf{e}_2\, s\, x^1\, (x^{-1})^{21} + \\
&+ \mathbf{e}_2\, x^2\, (x^{-1})^0 + \mathbf{e}_{21}\, x^2\, (x^{-1})^1 + \\
&\qquad + \mathbf{e}_0\, x^2\, (x^{-1})^2 + \mathbf{e}_1\, x^2\, (x^{-1})^{21} + \\
&+ \mathbf{e}_{21}\, x^{21}\, (x^{-1})^0 + \mathbf{e}_2\, x^{21}\, (x^{-1})^1 + \\
&\qquad + \mathbf{e}_1\, s\, x^{21}\, (x^{-1})^2 + \mathbf{e}_0\, s\, x^{21}\, (x^{-1})^{21}.
\end{aligned}$$

Здесь $s = \mathrm{sign}(1, 2)$.

Таким образом, условие (25) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}
x^0\, (x^{-1})^0 + x^1\, (x^{-1})^1 + x^2\, (x^{-1})^2 + s\, x^{21}\, (x^{-1})^{21} &= 1, \\
x^1\, (x^{-1})^0 + x^0\, (x^{-1})^1 + s\, x^{21}\, (x^{-1})^2 + x^2\, (x^{-1})^{21} &= 0, \\
x^2\, (x^{-1})^0 + x^{21}\, (x^{-1})^1 + x^0\, (x^{-1})^2 + s\, x^1\, (x^{-1})^{21} &= 0, \\
x^{21}\, (x^{-1})^0 + x^2\, (x^{-1})^1 + s\, x^1\, (x^{-1})^2 + x^0\, (x^{-1})^{21} &= 0.
\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Delta = det \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & s\,x^{21} \\ x^1 & x^0 & s\,x^{21} & x^2 \\ x^2 & x^{21} & x^0 & s\,x^1 \\ x^{21} & x^2 & s\,x^1 & x^0 \end{pmatrix} =$$

$$= x^0\, det \begin{pmatrix} x^0 & s\,x^{21} & x^2 \\ x^{21} & x^0 & s\,x^1 \\ x^2 & s\,x^1 & x^0 \end{pmatrix} - x^1 det \begin{pmatrix} x^1 & s\,x^{21} & x^2 \\ x^2 & x^0 & s\,x^1 \\ x^{21} & s\,x^1 & x^0 \end{pmatrix} +$$

$$+ x^2\, det \begin{pmatrix} x^1 & x^0 & x^2 \\ x^2 & x^{21} & s\,x^1 \\ x^{21} & x^2 & x^0 \end{pmatrix} - s\,x^{21}\, det \begin{pmatrix} x^1 & x^0 & s\,x^{21} \\ x^2 & x^{21} & x^0 \\ x^{21} & x^2 & s\,x^1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, обозначим

$$\Delta_0 = det \begin{pmatrix} 1 & x^1 & x^2 & s\,x^{21} \\ 0 & x^0 & s\,x^{21} & x^2 \\ 0 & x^{21} & x^0 & s\,x^1 \\ 0 & x^2 & s\,x^1 & x^0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} x^0 & s\,x^{21} & x^2 \\ x^{21} & x^0 & s\,x^1 \\ x^2 & s\,x^1 & x^0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = det \begin{pmatrix} x^0 & 1 & x^2 & s\,x^{21} \\ x^1 & 0 & s\,x^{21} & x^2 \\ x^2 & 0 & x^0 & s\,x^1 \\ x^{21} & 0 & s\,x^1 & x^0 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} x^1 & s\,x^{21} & x^2 \\ x^2 & x^0 & s\,x^1 \\ x^{21} & s\,x^1 & x^0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_2 = det \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & 1 & s\,x^{21} \\ x^1 & x^0 & 0 & x^2 \\ x^2 & x^{21} & 0 & s\,x^1 \\ x^{21} & x^2 & 0 & x^0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} x^1 & x^0 & x^2 \\ x^2 & x^{21} & s\,x^1 \\ x^{21} & x^2 & x^0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_{21} = det \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & 1 \\ x^1 & x^0 & s\,x^{21} & 0 \\ x^2 & x^{21} & x^0 & 0 \\ x^{21} & x^2 & s\,x^1 & 0 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} x^1 & x^0 & s\,x^{21} \\ x^2 & x^{21} & x^0 \\ x^{21} & x^2 & s\,x^1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует

$$\Delta = x^0\, \Delta_0 + x^1\, \Delta_1 + x^2\, \Delta_2 + s\, x^{21}\, \Delta_{21}.$$

Для координат обратного вектора имеем

$$(x^{-1})^0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{x^0 + x^1\,\frac{\Delta_1}{\Delta_0} + x^2\,\frac{\Delta_2}{\Delta_0} + s\,x^{21}\,\frac{\Delta_{21}}{\Delta_0}},$$

$$(x^{-1})^1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{x^0\,\frac{\Delta_0}{\Delta_1} + x^1 + x^2\,\frac{\Delta_2}{\Delta_1} + s\,x^{21}\,\frac{\Delta_{21}}{\Delta_1}},$$

$$(x^{-1})^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{x^0\,\frac{\Delta_0}{\Delta_2} + x^1\,\frac{\Delta_1}{\Delta_2} + x^2 + s\,x^{21}\,\frac{\Delta_{21}}{\Delta_2}},$$

$$(x^{-1})^{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \frac{1}{x^0\,\frac{\Delta_0}{\Delta_{21}} + x^1\,\frac{\Delta_1}{\Delta_{21}} + x^2\,\frac{\Delta_2}{\Delta_{21}} + s\,x^{21}}.$$

4. Контравариантная алгебра Клиффорда

Алгебра Клиффорда является частным случаем универсальной алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$. Особенное значение алгебры Клиффорда связано с тем, что она лежит в основе квантовой теории лептонов Дирака. Поэтому далее будем рассматривать алгебру Клиффорда как пространство-время лептонов. Обозначим алгебру Клиффорда $\mathbb{X}_L$.

Условие евклидовости для алгебры Клиффорда не отличается от этого условия для других подалгебр и сводится к следующим соотношениям:

a.

$$\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1\,, \quad \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1\,,$$
$$\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1\,, \quad \mathbf{e}_4 \circ \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = -1\,.$$

b.

$$\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2\,, \quad \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3\,,$$
$$\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_4\,, \quad \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3\,,$$
$$\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_4\,, \quad \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_4\,.$$

Алгебра Клиффорда выделяется следующими условиями соседней перестановки:

$$\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1\,, \quad \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1\,,$$
$$\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_4 \circ \mathbf{e}_1\,, \quad \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2\,,$$
$$\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_4 \circ \mathbf{e}_2\,, \quad \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_4 = -\mathbf{e}_4 \circ \mathbf{e}_3\,,$$

или иначе

$$\mathrm{sign}(1,2) = \mathrm{sign}(1,3) = \mathrm{sign}(2,3) =$$
$$= \mathrm{sign}(1,4) = \mathrm{sign}(2,4) = \mathrm{sign}(3,4) = -1\,.$$

Отсюда пространство-время лептонов $\mathbb{X}_L$ есть множество векторов вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0\, x^0 + \mathbf{e}_1\, x^1 + \mathbf{e}_2\, x^2 + \mathbf{e}_3\, x^3 + \mathbf{e}_4\, x^4 +$$
$$+\mathbf{e}_{[12]}\, x^{[12]} + \mathbf{e}_{[13]}\, x^{[13]} + \mathbf{e}_{[23]}\, x^{[23]} +$$
$$+\mathbf{e}_{[12]}\, x^{[14]} + \mathbf{e}_{[13]}\, x^{[24]} + \mathbf{e}_{[34]}\, x^{[34]} +$$
$$+\mathbf{e}_{[123]}\, x^{[123]} + \mathbf{e}_{[124]}\, x^{[124]} + \mathbf{e}_{[134]}\, x^{[134]} + \mathbf{e}_{[234]}\, x^{[234]} +$$
$$+\mathbf{e}_{[1234]}\, \psi^{[4231]}\,.$$

VI. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В КОНТРАВАРИАНТНОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ $\mathbb{X}$

Дифференциал в алгебре $\mathbb{X}$ обозначим d. Вектор в алгебре рассматривается как независимый, поэтому

$$d^2\mathbf{x} = 0\,.$$

Базисные векторы $\mathbf{e}_K$ – величины постоянные в том смысле, что

$$d\mathbf{e}_K = 0\,,$$

поэтому

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot dx^K\,.$$

Координаты вектора x^K также рассматриваются как независимые, то есть

$$d^2 x^K = 0\,.$$

Наличие закона умножения заставляет ввести *дифференциал по направлению.* Так для правого умножения

$$d_1\, {}_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} d\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2\,, \qquad (43)$$

здесь дифференциал d_1 – дифференциал по направлению 1 – означает приращение вектора ${}_r\mathbf{x}$ при приращении вектора $\mathbf{x}_1$. Соответственно,

$$d_2\, {}_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} \mathbf{x}_1 \circ d\mathbf{x}_2 \qquad (44)$$

– дифференциал по направлению 2 – означает приращение вектора ${}_r\mathbf{x}$ при приращении вектора $\mathbf{x}_2$.

Аналогичные соотношения имеют место для левого умножения

$$d_1\, {}_l\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} \mathbf{x}_2 \circ d\mathbf{x}_1\,, \qquad (45)$$

$$d_2\, {}_l\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} d\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1\,. \qquad (46)$$

1. Уравнение структуры

Рассматривая второй дифференциал от закона умножения, примем, что сначала дифференцирование выполняется по вектору $\mathbf{x}_1$, а затем по вектору $\mathbf{x}_2$. Тогда имеем для правого умножения

$$d_2 d_1\, {}_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} d\mathbf{x}_1 \circ d\mathbf{x}_2 \qquad (47)$$

и для левого

$$d_2 d_1\, {}_l\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} d\mathbf{x}_2 \circ d\mathbf{x}_1\,. \qquad (48)$$

Отсюда следует второй дифференциал от правого произведения координат векторов

$$d_2 d_1\, {}_r x^K = \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot dx_1^{K_1} \cdot dx_2^{K_2}\,, \qquad (49)$$

а также второй дифференциал от левого произведения координат векторов

$$d_2 d_1\, {}_l x^K = \frac{1}{L_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot dx_1^{K_1} \cdot dx_2^{K_2}\,. \qquad (50)$$

Вблизи единицы алгебры, в частности для $\mathbf{x}_2 \to L_0$ из равенства (43), имеем

$$d\mathbf{x}_1 = d_1\, {}_r\mathbf{x}\,, \qquad (51)$$

а для $\mathbf{x}_1 \to L_0$ из равенства (44) имеем

$$d\mathbf{x}_2 = d_{2\,r}\mathbf{x}\,. \tag{52}$$

Используя выражения (51) и (52) в соотношении (47), получим

$$d_2 d_{1\,r}\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} d_{1\,r}\mathbf{x} \circ d_{2\,r}\mathbf{x}\,. \tag{53}$$

Это соотношение называется *правым уравнением структуры* контравариантной универсальной алгебры $\mathbb{X}$.

Вблизи единицы алгебры, в частности для $\mathbf{x}_2 \to L_0$ из соотношения (45), имеем

$$d\mathbf{x}_2 = d_{2\,l}\mathbf{x}\,, \tag{54}$$

а для $\mathbf{x}_1 \to L_0$ из соотношения (46) имеем

$$d\mathbf{x}_1 = d_{1\,l}\mathbf{x}\,. \tag{55}$$

Используя выражения (54) и (55) в соотношении (48), получим

$$d_2 d_{1\,l}\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} d_{2\,l}\mathbf{x} \circ d_{1\,l}\mathbf{x}\,. \tag{56}$$

Это соотношение называется *левым уравнением структуры* контравариантной универсальной алгебры $\mathbb{X}$.

По отношению к координатам векторов правое уравнение структуры имеет вид

$$d_2 d_{1\,r}x^K = \frac{1}{L_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1 K_2} \cdot d_{1\,r}x^{K_1} \cdot d_{2\,r}x^{K_2}\,. \tag{57}$$

По отношению к координатам векторов левое уравнение структуры имеет вид

$$d_2 d_{1\,l}x^K = \frac{1}{L_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1 K_2} \cdot d_{1\,l}x^{K_1} \cdot d_{2\,l}x^{K_2}\,. \tag{58}$$

Выведем уравнения структуры в общем случае (не вблизи единицы). Для этого из соотношения (43) выразим $d\mathbf{x}_1$, умножив это соотношение на $\mathbf{x}_2^{-1}$ справа. Имеем

$$d_{1\,r}\mathbf{x} \circ \mathbf{x}_2^{-1} = \frac{1}{L_0} d\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1}\,.$$

Отсюда

$$d_{1\,r}\mathbf{x} \circ \mathbf{x}_2^{-1} = \frac{1}{L_0} \cdot d\mathbf{x}_1$$

и

$$d\mathbf{x}_1 = L_0 \cdot d_{1\,r}\mathbf{x} \circ \mathbf{x}_2^{-1}\,.$$

Аналогично выводится

$$d\mathbf{x}_2 = L_0 \cdot \mathbf{x}_1^{-1} \circ d_{2\,r}\mathbf{x}\,.$$

Подставляя выведенные дифференциалы в выражение (47), получим

$$d_2 d_{1\,r}\mathbf{x} = L_0 \cdot d_{1\,r}\mathbf{x} \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1^{-1} \circ d_{2\,r}\mathbf{x}$$

и окончательно с использованием формулы (41)

$$d_2 d_{1\,r}\mathbf{x} = d_{1\,r}\mathbf{x} \circ {}_r\mathbf{x}^{-1} \circ d_{2\,r}\mathbf{x}\,. \tag{59}$$

Это соотношение представляет собой правое уравнение структуры в общем случае. Аналогично выводится левое уравнение структуры в общем случае:

$$d_2 d_{1\,l}\mathbf{x} = d_{2\,l}\mathbf{x} \circ {}_l\mathbf{x}^{-1} \circ d_{1\,l}\mathbf{x},. \tag{60}$$

1.1. Квантование пространства-времени

Уравнения структуры, по существу, и есть *квантовые постулаты*, на которых должно строится квантование пространства-времени фундаментального объекта. Им можно придать более ясную форму записи.

Правое уравнение структуры.

Введем в выражениях (53) и (57) переобозначения

$$d_{1\,r}\mathbf{x} = \chi\,, \quad d_{1\,r}x^L = \chi^L\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо соотношений (53) и (57) получим *правые квантовые постулаты* в векторном виде

$$d\chi = \frac{1}{L_0}\,\chi \circ d_r\mathbf{x}\,,$$

и в координатном виде

$$d\chi^L = \frac{1}{L_0}\,{}_rC^L{}_{KI} \cdot \chi^K \cdot d_r x^I\,.$$

Здесь χ есть *правая волновая функция пространства-времени фундаментального объекта*, представляющая собой частный дифференциал правого вектора пространства-времени.

Левое уравнение структуры.

Введем в выражениях (56) и (58) переобозначения

$$d_{1\,l}\mathbf{x} = \chi\,, \quad d_{1\,l}x^L = \chi^L\,, \quad d_2 = d\,.$$

Тогда вместо (56) и (58) получим *левые квантовые постулаты* в векторном виде

$$d\chi = \frac{1}{L_0}\,d_l\mathbf{x} \circ \chi\,,$$

и в координатном виде

$$d\chi^L = \frac{1}{L_0}\,{}_lC^L{}_{KI} \cdot \chi^K \cdot d_l x^I\,.$$

Здесь χ есть *левая волновая функция пространства-времени фундаментального объекта*, представляющая собой частный дифференциал левого вектора пространства-времени.

2. Правый и левый дифференциалы

Правый дифференциал определим следующим образом:

$$ {}_r d\mathbf{x} = L_0 \cdot (\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \circ \mathbf{x}^{-1} - L_0 \,. $$

Отсюда

$$ {}_r d\mathbf{x} = L_0 \cdot d\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \,. \qquad (61) $$

По отношению к координатам вектора правый дифференциал запишется в виде

$$ {}_r dx^K = L_0 \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (x^{-1})^{K_2} \cdot dx^{K_1} = {}_r \Omega^K{}_{K_1} \cdot dx^{K_1} \,, $$

где введено обозначение

$$ {}_r \Omega^K{}_{K_1} = L_0 \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (x^{-1})^{K_2} \,. $$

Левый дифференциал определим следующим образом:

$$ {}_l d\mathbf{x} = L_0 \cdot \mathbf{x}^{-1} \circ (\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - L_0 \,. $$

Отсюда

$$ {}_l d\mathbf{x} = L_0 \cdot \mathbf{x}^{-1} \circ d\mathbf{x} \,. \qquad (62) $$

По отношению к координатам вектора левый дифференциал запишется в виде

$$ {}_l dx^K = L_0 \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (x^{-1})^{K_2} \cdot dx^{K_1} = {}_l \Omega^K{}_{K_1} \cdot dx^{K_1} \,, $$

где введено обозначение

$$ {}_l \Omega^K{}_{K_1} = L_0 \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (x^{-1})^{K_2} \,. $$

Установим связь между правым и левым дифференциалами. Для этого продифференцируем (25), получим

$$ d\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} + \mathbf{x} \circ d\mathbf{x}^{-1} = 0 \,. $$

Отсюда и из выражения (61)

$$ {}_r d\mathbf{x} = -L_0 \cdot \mathbf{x} \circ d\mathbf{x}^{-1} \,. $$

Сравнивая правую часть равенства с выражением (62), получим

$$ {}_r d\mathbf{x} = -\, {}_l d\mathbf{x}^{-1} \,. $$

Аналогично устанавливается связь между левым и правым дифференциалами. Для этого продифференцируем (26), получим

$$ d\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x} + \mathbf{x}^{-1} d \circ \mathbf{x} = 0 \,. $$

Отсюда и из выражения (62)

$$ {}_l d\mathbf{x} = -L_0 \cdot d\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x} \,. $$

Сравнивая правую часть равенства с выражением (61), получим

$$ {}_l d\mathbf{x} = -\, {}_r d\mathbf{x}^{-1} \,. $$

Таким образом, рассматривая алгебраические свойства системы отсчета, необходимо привлекать два типа векторов – правые и левые – и их дифференциалы.

VII. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Сопряженное пространство-время – это ковариантная универсальная алгебра $\mathbb{X}^*$, построенная на *сопряженном* пространстве-времени специальной теории относительности X^*, которое рассматривается как образующее пространство.

Введение сопряженного пространства-времени необходимо для описания фундаментальных антиобъектов (античастиц).

1. Сопряженное пространство-время СТО

Введение *сопряженного* пространства-времени СТО X^* необходимо не только с точки зрения описания античастиц, но и с точки зрения логичного введения координат векторов в пространстве-времени СТО. Логичным следует считать введение координат векторов в результате процедуры *измерения.* Рассмотрим подробнее понятия и суждения, связанные с измерением векторов пространства-времени СТО X. Вектор $\mathbf{x}$ этого пространства для нашего изложения удобно называть *контравариантным.* В соответствии с определением векторного пространства X на множестве векторов введено умножение вектора на число. Например, умножение вектора $\mathbf{e}$ на координату x

$$ \mathbf{x} = \mathbf{e} \cdot x $$

или умножение базисных векторов $\mathbf{e}_k$ на координаты x^k

$$ \mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot x^k $$

Координаты вектора x, x^k для нашего изложеня удобно называть *контравариантными.* Таким образом, вышеуказанные соотношения определяют контравариантный вектор по его координатам. С физической точки зрения такое соответствие является неполноценным, так как с физической точки зрения числа (контравариантные координаты) должны быть результатом процедуры *измерения* контравариантных векторов. Измерить вектор означает сопоставить вектору число или *отобразить* вектор в число. Таким образом, физическая процедура измерения вектора отождествляется с *отображением,* которое обозначим $L^*(\,)$, этого вектора в контравариантные координаты

$$ L^*(\mathbf{x}) = x \in \mathrm{I\!R} \cdot L_0 \,. \qquad (63) $$

Необходимо полагать отображение $L^*(\,)$ линейным. Поэтому, если $\mathbf{x} = \mathbf{e} \cdot x$, то

$$ L^*(\mathbf{x}) = L^*(\mathbf{e} \cdot x) = L^*(\mathbf{e}) \cdot x \,. \qquad (64) $$

Из сравнения этого соотношения с выражением (63) следует условие

$$ L^*(\mathbf{e}) = 1 \,. \qquad (65) $$

Будем рассматривать *множество* линейных отображений вида $L^*(\,)$, которое обозначим $\mathbb{L}^*$. Из этого множества выделим такие отображения $L^{*i}(\,)$, пользуясь которыми можно получить контравариантные координаты вектора x^i, то есть для которых выполняется

$$L^{*i}(\mathbf{x}) = x^i\,. \tag{66}$$

Учитывая, что $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot x^k$, и используя условие линейности отображения, получим

$$L^{*i}(\mathbf{x}) = L^{*i}(\mathbf{e}_k \cdot x^k) = L^{*i}(\mathbf{e}_k) \cdot x^k\,. \tag{67}$$

Из сравнения этого соотношения с выражением (66) получим условие

$$L^{*i}(\mathbf{e}_k) = \delta^i{}_k\,. \tag{68}$$

Будем рассматривать множество линейных отображений $\mathbb{L}^*$ как векторное пространство, в котором отображения $L^*(\,)$ выступают как векторы, а линейные отображения $L^{*i}(\,)$ выступают как базисные векторы. Разложение отображения $L^*(\,)$ по базисным отображениям $L^{*i}(\,)$ запишем так:

$$L^*(\,) = k_i \cdot L^{*i}(\,)\,,$$

где $k_i \in \mathbb{R}$ это координаты отображения $L^*(\,)$. Пользуясь приведенным выше соотношением, вычислим

$$L^*(\mathbf{e}) = k_i \cdot L^{*i}(\mathbf{e})\,,$$

учитывая, что[17]

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_k \cdot k^k\,,$$

где k^k это проекции вектора $\mathbf{e}$ на базисные векторы $\mathbf{e}_i$, имеем[18]

$$L^*(\mathbf{e}) = k_i \cdot L^{*i}(\mathbf{e}_k \cdot k^k) = k_i \cdot L^{*i}(\mathbf{e}_k) \cdot k^k = k_i \cdot k^i\,.$$

Из сравнения этого соотношения с выражением (65) получим условие, накладываемое на координаты k_i

$$k_i \cdot k^i = 1\,. \tag{69}$$

Перейдем теперь к построению *сопряженного* пространства-времени СТО. Для этого поставим в соответствие отображению $L^*(\,)$ вектор из пространства-времени СТО X, который обозначим $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} \sim L^*(\,)$$

и который выберем из условия, что скалярное произведение этого вектора на вектор $\mathbf{x}$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$$

тождественно отображению (64) вектора $\mathbf{x}$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \equiv L^*(\mathbf{x}) = x\,. \tag{70}$$

Учитывая, что $\mathbf{x} = \mathbf{e} \cdot x$, отсюда получим

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} = 1\,.$$

Базисным отображениям $L^{*i}(\,)$ поставим в соответствие векторы из пространства-времени СТО X, которые обозначим $\mathbf{E}^i$

$$\mathbf{E}^i \sim L^{*i}(\,)$$

и которые выберем из условия, что скалярное произведение этих векторов на вектор $\mathbf{x}$ тождественно отображениям (66) вектора $\mathbf{x}$

$$\mathbf{E}^i \cdot \mathbf{x} \equiv L^{*i}(\mathbf{x}) = x^i\,.$$

В частности,

$$\mathbf{E}^i \cdot \mathbf{e}_k \equiv L^{*i}(\mathbf{e}_k) = \delta^i{}_k\,. \tag{71}$$

В пространстве-времени СТО введем векторы вида

$$\mathbf{x}^* = x_i \cdot \mathbf{E}^i\,. \tag{72}$$

Множество указанных векторов обозначим X^* и назовем *сопряженным* пространством-временем СТО. Множество X^* является векторным пространством, на нем определено скалярное умножение векторов. Векторы $\mathbf{E}^i$ рассматриваются как базисные в сопряженном пространстве-времени СТО X^*. Векторы и координаты в этом пространстве в отличие от векторов и координат в пространстве-времени СТО X называются *ковариантными*.

1.1. Различие между сопряженным пространством-временем СТО X^* и пространством-временем СТО X

Сопряженные векторы $\mathbf{x}^*$ принадлежат пространству-времени СТО X. Тем не менее они объединены в отдельное сопряженное пространство-время СТО X^*. Поэтому возникает необходимость в выяснении различия между этими пространствами. Для достижения указанной цели выпишем таблицу скалярного умножения базисных векторов пространств X^* и X между собой, задаваемую соотношением (71):

$$\mathbf{E}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1\,, \quad \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1\,, \quad \mathbf{E}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1\,,$$
$$\mathbf{E}^4 \cdot \mathbf{e}_4 = 1\,, \quad \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{e}_k = 0 \quad \text{для} \quad i \neq k$$

и сравним ее с таблицей скалярного умножения базисных векторов пространства X[19]

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1\,, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1\,, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1\,,$$
$$\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = -1\,, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 0 \quad \text{для} \quad i \neq k\,.$$

[17] формула (4) Главы 1.1.

[18] При преобразовании использовано условие линейности отображений и соотношение (68).

[19] Соотношения (24) Главы 1.1.

Из сравнения следует, что сопряженное пространство-время СТО X^* можно привести к пространству-времени СТО X, если положить

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{e}_1\,, \quad \mathbf{E}^2 = \mathbf{e}_2\,, \quad \mathbf{E}^3 = \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{E}^4 = -\mathbf{e}_4\,.$$

Это означает, что базисный вектор времени в сопряженном пространстве-времени СТО X^* имеет направление, противоположное направлению базисного вектора времени в пространстве-времени СТО X. Другими словами, если базисный вектор времени $\mathbf{e}_4$ в пространстве-времени СТО X направлен из прошлого в будущее, то базисный вектор времени $\mathbf{E}^4$ в сопряженном пространстве-времени СТО X^* направлен из будущего в прошлое.

2. Сопряженное пространство-время как тензорная ковариантная алгебра

В этом Разделе рассмотрим обобщение сопряженного пространства-времени специальной теории относительности (СТО). Таким обобщением служит тензорная ковариантная алгебра пространства-времени.

Сопряженное векторное пространство СТО X^* является исходным при построении тензорной ковариантной алгебры пространства-времени. В этом смысле векторное пространство X^* называется *образующим* пространством тензорной ковариантной алгебры пространства-времени. Соответственно базисные векторы пространства X^* называются *образующими* базисных векторов тензорной алгебры.

Здесь прежде всего важно, что сопряженное пространство-время СТО X^* является четырехмерным векторным пространством. Вектор этого пространства $\mathbf{x}^*$ записывается через базисные векторы следующим образом:

$$\mathbf{x}^* = x_k \cdot \mathbf{E}^k\,.$$

Здесь индекс k принимает значения 1, 2, 3, 4. $\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3$ – это базисные векторы геометрического пространства, а $\mathbf{E}^4$ – базисный вектор времени.

2.1. *Тензорное произведение двух векторов образующего пространства*

Тензорное произведение векторов $\mathbf{x}_1^*$ и $\mathbf{x}_2^*$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1^* \otimes \mathbf{x}_2^*\,.$$

Здесь коэффициент L_0 имеет размерность длины и его назначение состоит в том, чтобы привести размерность тензорного произведения двух векторов к размерности одного вектора, то есть к длине.

Билинейное отображение векторов $\mathbf{x}_1^*$ и $\mathbf{x}_2^*$ *общего вида* запишем следующим образом:

$$\frac{1}{L_0}F^*(\mathbf{x}_1^*,\, \mathbf{x}_2^*)\,.$$

По определению тензорное произведение двух векторов отождествляется с билинейным отображением этих векторов общего вида

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1^* \otimes \mathbf{x}_2^* \equiv \frac{1}{L_0}F^*(\mathbf{x}_1^*,\, \mathbf{x}_2^*)\,.$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что билинейное отображение в конкретное векторное пространство, например,

$$G^*(\mathbf{x}_1^*,\, \mathbf{x}_2^*)$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G^*(\mathbf{x}_1^*,\, \mathbf{x}_2^*) = \frac{1}{L_0}L(\mathbf{x}_1^* \otimes \mathbf{x}_2^*)\,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$\frac{1}{L_0}F^*\left(\mathbf{x}_1^*\,,\ \mathbf{x}_2^*\right) = \frac{1}{L_0}F^*\left((x_1)_{k_1}\,\mathbf{E}^{k_1}\,,\ (x_2)_{k_2}\,\mathbf{E}^{k_2}\right) =$$
$$= \frac{1}{L_0}(x_1)_{k_1} \cdot (x_2)_{k_2} \cdot F^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = \frac{1}{L_0}(x_1)_{k_1} \cdot (x_2)_{k_2} \cdot F^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Отсюда следует, что тензорное произведение двух векторов можно рассматривать как вектор, принадлежащий множеству векторов вида

$$\overset{2}{\mathbf{x}}{}^* = x_{k_1k_2} \cdot \mathbf{E}^{k_1k_2}\,.$$

Здесь

$$\mathbf{E}^{k_1k_2} = \mathbf{E}^{k_1} \otimes \mathbf{E}^{k_2} = F^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Указанное множество векторов называется ковариантной тензорной степенью второго порядка пространства X^* и обозначается

$$\overset{2}{\otimes} X^*\,.$$

Векторы $\mathbf{E}^{k_1k_2}$ рассматриваются как базисные векторы в $\overset{2}{\otimes} X^*$. Числа $x_{k_1k_2}$ представляют собой координаты вектора $\overset{2}{\mathbf{x}}{}^*$, они имеют размерность длины.

2.2. Тензорное произведение n векторов образующего пространства

Тензорное произведение n векторов $\mathbf{x}_1^*$, $\mathbf{x}_2^*$, $\ldots, \mathbf{x}_n^*$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{(L_0)^{n-1}}\mathbf{x}_1^* \otimes \mathbf{x}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_n^* \,.$$

Здесь коэффициент L_0 имеет размерность длины, а назначение множителя

$$\frac{1}{(L_0)^{n-1}}$$

состоит в том, чтобы привести размерность тензорного произведения n векторов к размерности одного вектора, то есть к длине.

Полилинейное отображение общего вида n векторов $\mathbf{x}_1^*$, $\mathbf{x}_2^*$, $\ldots, \mathbf{x}_n^*$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{(L_0)^{n-1}}F^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*) \,.$$

По определению тензорное произведение n векторов отождествляется с полилинейным отображением общего вида этих векторов

$$\frac{1}{(L_0)^{n-1}}\mathbf{x^*}_1 \otimes \mathbf{x}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_n^* \equiv \frac{1}{(L_0)^{n-1}}F^*(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*) \,.$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что полилинейное отображение в конкретное векторное пространство, например,

$$G(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*)$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*) = \frac{1}{(L_0)^{n-1}}L(\mathbf{x}_1^* \otimes \mathbf{x}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_n^*) \,.$$

Вследствие полилинейности можно записать

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(L_0)^{n-1}}F^*(\mathbf{x}_1^* , \mathbf{x^*}_2, \ldots, \mathbf{x}_n^*) = \\ &= \frac{1}{(L_0)^{n-1}}F^*\left((x_1)_{k_1}\mathbf{E}^{k_1}, \ldots, (x_n)_{k_n}\mathbf{E}^{k_n}\right) = \\ &= \frac{1}{(L_0)^{n-1}}(x_1)_{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n)_{k_n} \cdot F^*(\mathbf{E}^{k_1}, \ldots, \mathbf{E}^{k_n}) \,. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(L_0)^{n-1}}\mathbf{x}_1^* \otimes \mathbf{x}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathbf{x}_n^* = \\ &= \frac{1}{(L_0)^{n-1}}(x_1)_{k_1} \cdot \ldots \cdot (x_n)_{k_n} \cdot F^*(\mathbf{E}^{k_1}, \ldots, \mathbf{E}^{k_n}) \,. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что тензорное произведение n векторов можно рассматривать как вектор, принадлежащий множеству векторов вида

$$\overset{n}{\mathbf{x}}{}^* = x_{k_1 k_2 \ldots k_n} \cdot \mathbf{E}^{k_1 k_2 \ldots k_n} \,.$$

Здесь

$$\mathbf{E}^{k_1 k_2 \ldots k_n} = \mathbf{E}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{E}^{k_n} = F^*(\mathbf{E}^{k_1}, \ldots, \mathbf{E}^{k_n}) \,.$$

Указанное множество векторов называется ковариантной тензорной степенью n-го порядка пространства X^* и обозначается

$$\overset{n}{\otimes} X^* \,.$$

Векторы $\mathbf{E}^{k_1 k_2 \ldots k_n}$ рассматриваются как базисные векторы в $\overset{n}{\otimes} X^*$. Числа $x_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ представляют собой координаты вектора $\overset{n}{\mathbf{x}}{}^*$, они имеют размерность длины.

2.3. Сопряженное пространство-время как тензорная ковариантная алгебра

Помимо пространств тензорных степеней порядка 2 и более, введем пространство тензорной степени 0, полагая[20]

$$\overset{0}{\otimes} X^* = \mathbb{R} \cdot L_0 \,,$$

и пространство тензорной степени 1, полагая

$$\overset{1}{\otimes} X^* = X^* \,.$$

Рассмотрим векторное пространство, представленное суммой всех тензорных степеней. Это пространство обозначим $\otimes X^*$ и назовем *пространством ковариантных тензоров*. Таким образом,

$$\otimes X^* = \overset{0}{\otimes} X^* + \overset{1}{\otimes} X^* + \overset{2}{\otimes} X^* + \ldots \,.$$

Пространство $\otimes X^*$ является не только векторным пространством[21], но и алгеброй, в которой умножение векторов представлено тензорным умножением и умножением тензоров на число. Поэтому $\otimes X^*$ называется также *тензорной ковариантной алгеброй*. Вектор тензорной ковариантной алгебры записывается следующим образом:

$$\mathbf{x}^* = x_0 \cdot \mathbf{E}^0 + x_{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_1} + x_{k_1 k_2} \cdot \mathbf{E}^{k_1 k_2} + \ldots \,.$$

---

[20] Напомним, что $\mathbb{R}$ это множество действительных чисел, а L_0 множитель размерности длины.

[21] Отметим, что векторное пространство ковариантных тензоров бесконечномерно.

Здесь $\mathbf{E}^0$ - действительная единица. Этот вектор удобно записать, используя *собирательный* индекс

$$K \sim \ 0\,,\ \ k_1\,,\ \ k_1k_2\,,\ \ k_1k_2k_3\,,\ \ \ldots\,,$$

обобщенный базисный вектор

$$\mathbf{E}^K = \mathbf{E}^0,\, \mathbf{E}^{k_1},\, \mathbf{E}^{k_1k_2},\, \ldots$$

и обобщенные координаты

$$x_K = x_0,\, x_{k_1},\, x_{k_1k_2},\, \ldots\,;$$

в компактном виде

$$\mathbf{x}^* = x_K \cdot \mathbf{E}^K\,.$$

Напомним, что векторы и координаты тензорной ковариантной алгебры имеют размерность длины.

Разложение ковариантных тензоров на симметрии здесь рассматриваться не будет, потому что это разложение выполняется так же, как и для контравариантных тензоров.

3. Сопряженное пространство-время как универсальная ковариантная алгебра

Наряду с тензорным произведением векторов образующего пространства X^* будем рассматривать *скалярное* и *векторное* произведения векторов этого пространства.

3.1. Скалярное произведение векторов образующего пространства

Скалярное произведение векторов запишем следующим образом:

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1^* \cdot \mathbf{x}_2^*\,.$$

Оно представляет собой билинейное отображение

$$\frac{1}{L_0}F_0^*(\mathbf{x}_1^*\,,\ \mathbf{x}_2^*)$$

векторов в множество действительных чисел $\mathbb{R} \cdot L_0$:

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1^* \cdot \mathbf{x}_2^* \equiv \frac{1}{L_0}F_0^*(\mathbf{x}_1^*\,,\ \mathbf{x}^*{}_2) \in \mathbb{R} \cdot L_0\,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$F_0^*(\mathbf{x}_1^*\,,\ \mathbf{x}_2^*) = F_0^*\left((x_1)_{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_1}\,,\ (x_2)_{k_2} \cdot \mathbf{E}^{k_2}\right) = \\ = (x_1)_{k_1} \cdot (x_2)_{k_2} \cdot F_0^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Числовая величина

$$g^{k_1k_2} = \mathbf{E}^{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_2} \equiv F_0^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})$$

называется *контравариантным метрическим тензором*[22].

По-прежнему будем полагать, что скалярное произведение не зависит от порядка используемых сомножителей. Отсюда

$$g^{k_1k_2} = g^{k_2k_1}\,.$$

3.2. Векторное произведение векторов образующего пространства

Векторное произведение векторов образующего пространства запишем так

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1^* \times \mathbf{x}_2^*\,.$$

Оно представляет собой билинейное отображение

$$\frac{1}{L_0}F_1^*(\mathbf{x}_1^*\,,\ \mathbf{x}_2^*)$$

векторов $\mathbf{x}_1^*$, $\mathbf{x}_2^*$ в векторное пространство X^*:

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1^* \times \mathbf{x}_2^* \equiv \frac{1}{L_0}F_1^*(\mathbf{x}_1^*\,,\ \mathbf{x}_2^*) \in X^*\,.$$

В силу билинейности

$$\frac{1}{L_0}\mathbf{x}_1^* \times \mathbf{x}_2^* = \frac{1}{L_0}(x_1)_{k_1} \cdot (x_2)_{k_2} \cdot F_1^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Векторное произведение базисных векторов

$$\mathbf{E}^{k_1} \times \mathbf{E}^{k_2} = F_1^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})$$

также является вектором образующего пространства X^*. Поэтому

$$\mathbf{E}^{k_1} \times \mathbf{E}^{k_2} = C^{k_1k_2}{}_k \cdot \mathbf{E}^k\,,$$

где постоянные коэффициенты $C^{k_1k_2}{}_k$ – это координаты вектора $\mathbf{E}^{k_1} \times \mathbf{E}^{k_2}$.

3.3. Универсальное произведение векторов. Сопряженное пространство-время как универсальная ковариантная алгебра

Произведение двух векторов образующего пространства $\mathbf{x}_1^*$ и $\mathbf{x}_2^*$, составленное из скалярного, векторного и тензорного произведений, назовем *универсальным* и запишем следующим образом:

$$\mathbf{x}_1^* \circ \mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_1^* \cdot \mathbf{x}_2^* + \mathbf{x}_1^* \times \mathbf{x}_2^* + \mathbf{x}_1^* \otimes \mathbf{x}_2^*\,.$$

[22] В отличие от метрического тензора $g_{k_1k_2}$, который называется *ковариантным*.

По отношению к базисным векторам универсальное произведение принимает вид

$$\mathbf{E}^{k_1} \circ \mathbf{E}^{k_2} = \mathbf{E}^{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_2} + \mathbf{E}^{k_1} \times \mathbf{E}^{k_2} + \mathbf{E}^{k_1} \otimes \mathbf{E}^{k_2} = \\ = g^{k_1 k_2} + C^{k_1 k_2}{}_k \cdot \mathbf{E}^k + \mathbf{E}^{k_1 k_2} \,. \tag{73}$$

Алгебру, построенную на универсальном произведении, назовем *универсальной ковариантной* и будем обозначать $\mathbb{X}^*$. Ассоциативность универсального умножения для универсальной ковариантной алгебры $\mathbb{X}^*$ доказывается аналогично тому, как это было доказано для универсальной контравариантной алгебры $\mathbb{X}$.

С универсальным умножением в обиход вводится набор числовых тензоров

$$\begin{aligned} & g^{k_1 k_2}\,,\ C^{k_1 k_2}{}_{k_3}\,, \\ & g^{k_1 k_2 k_3}\,,\ C^{k_1 k_2 k_3}{}_{k_4}\,,\ C^{k_1 k_2 k_3}{}_{k_4 k_5}\,, \\ & g^{k_1 k_2 k_3 k_4}\,,\ C^{k_1 k_2 k_3 k_4}{}_{k_5}\,,\ C^{k_1 k_2 k_3 k_4}{}_{k_5 k_6}\,,\ C^{k_1 k_2 k_3 k_4}{}_{k_5 k_6 k_7}\,, \\ & \ldots \end{aligned}$$

Конкретизация числовых тензоров связана с двумя действиями:

1) разложением числовых тензоров по симметриям;

2) введением условий, позволяющих рассматривать числовые тензоры как *единичные*, то есть таких, компоненты которых принимают значения либо $+1$, либо -1, либо 0.

Например, для *нормированных* базисных векторов образующего пространства $\mathbf{E}^1$, $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}^3$, $\mathbf{E}^4$ выполняется

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{44} = 1\,,$$

а для *ортогональных* базисных векторов имеем

$$g^{k_1 k_2} = 0 \text{ при } k_1 \neq k_2\,.$$

Другой пример: в теории векторного поля[23]

$$C^{cb}{}_a = \varepsilon^{cba}\,,$$

где ε^{cba} – антисимметричный единичный числовой тензор.

Вектор универсальной ковариантной алгебры $\mathbb{X}^*$ записывается так же, как вектор тензорной ковариантной алгебры $\otimes X^*$,

$$\mathbf{x}^* = x_0 \cdot \mathbf{E}^0 + x_{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_1} + x_{k_1 k_2} \cdot \mathbf{E}^{k_1 k_2} + \ldots\,. \tag{74}$$

Этот вектор удобно записать, используя обобщенный базисный вектор

$$\mathbf{E}^K = \mathbf{E}^0,\, \mathbf{E}^{k_1},\, \mathbf{E}^{k_1 k_2},\, \ldots$$

[23] Индексы a, b, c принимают значения 1, 2, 3.

и обобщенные координаты

$$x_K = x_0,\, x_{k_1},\, x_{k_1 k_2},\, \ldots\,;$$

в компактном виде

$$\mathbf{x}^* = x_K \cdot \mathbf{E}^K\,.$$

Особенность базисных векторов $\mathbf{E}^K$ связана с измерением ими вектора $\mathbf{x}$ пространства-времени $\mathbb{X}$. Результатом такого измерения являются контравариантные координаты вектора $\mathbf{x}$. Другими словами, скалярное произведение

$$\mathbf{E}^K \cdot \mathbf{x} = x^K\,. \tag{75}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{E}^K \cdot \mathbf{e}_I = \delta^K{}_I\,. \tag{76}$$

Начиная с этого момента будем рассматривать универсальную ковариантную алгебру $\mathbb{X}^*$ как *обобщенное* сопряженное пространство-время, обобщающее сопряженное пространство-время специальной теории относительности X^*. Определение *обобщенное* по отношению к $\mathbb{X}^*$ для краткости будем в дальнейшем опускать.

VIII. ЛЕВАЯ И ПРАВАЯ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОВАРИАНТНЫЕ АЛГЕБРЫ

Обратимся к умножению векторов в универсальной ковариантной алгебре $\mathbb{X}^*$. Пусть *сначала* рассматривается вектор $\mathbf{x}_1^*$, а *затем* вектор $\mathbf{x}_2^*$. Вектор $\mathbf{x}_1^*$ будем называть *начальным*, а вектор $\mathbf{x}_2^*$ - *последующим*. Возможны два варианта умножения указанных векторов:

$$\mathbf{x}_1^* \circ \mathbf{x}_2^*\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *справа*, и

$$\mathbf{x}_2^* \circ \mathbf{x}_1^*\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *слева*. В общем случае умножение векторов некоммутативно, поэтому

$$\mathbf{x}_1^* \circ \mathbf{x}_2^* \neq \mathbf{x}_2^* \circ \mathbf{x}_1^*\,.$$

Введем обозначение для правого произведения

$${}_r\mathbf{x}^* = \frac{1}{L_0} \mathbf{x}_1^* \circ \mathbf{x}_2^*\,. \tag{77}$$

Здесь коэффициент L_0 имеет размерность длины и согласует размерности правой и левой частей уравнения. Левое произведение соответственно запишем так:

$${}_l\mathbf{x}^* = \frac{1}{L_0} \mathbf{x}_2^* \circ \mathbf{x}_1^*\,. \tag{78}$$

Алгебру, основанную на умножении (77), назовем *правой* и обозначим ${}_r\mathbb{X}^*$.

Алгебру, основанную на умножении (78), назовем *левой* и обозначим ${}_l\mathbb{X}^*$. Единицей алгебр является вектор, равный числу L_0.

Предыдущие построения повторим для умножения базисных векторов. Пусть базисные векторы $\mathbf{E}^{K_1}$ являются начальными, а базисные векторы $\mathbf{E}^{K_2}$ являются последующими. Тогда правое произведение базисных векторов запишем следующим образом:

$$\mathbf{E}^{K_1} \circ \mathbf{E}^{K_2} = {}_rC^{K_2K_1}{}_K \cdot \mathbf{E}_K \,, \tag{79}$$

где ${}_rC^{K_2K_1}{}_K$ – *структурные постоянные* правой универсальной ковариантной алгебры ${}_r\mathbb{X}^*$.

Левое произведение базисных векторов соответственно запишем следующим образом:

$$\mathbf{E}^{K_2} \circ \mathbf{E}^{K_1} = {}_lC^{K_2K_1}{}_K \cdot \mathbf{E}^K \,, \tag{80}$$

где ${}_lC^{K_2K_1}{}_K$ – *структурные постоянные* левой универсальной ковариантной алгебры ${}_l\mathbb{X}^*$.

Очевидно, что

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K = {}_lC^{K_1K_2}{}_K \,. \tag{81}$$

Для того, чтобы не возникала путаница между формулами (79) и (80), удобно ввести разное обозначение для базисных векторов левой и правой алгебр соответственно[24]

$${}_l\mathbf{E}^K \quad - \quad \text{левые базисные векторы}\,,$$
$${}_r\mathbf{E}^K \quad - \quad \text{правые базисные векторы}$$

Тогда умножение левых базисных векторов задается структурными постоянными ${}_lC$

$${}_l\mathbf{E}^{K_2} \circ {}_l\mathbf{E}^{K_1} = {}_lC^{K_2K_1}{}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K \,,$$

а умножение правых базисных векторов задается структурными постоянными ${}_rC$

$${}_r\mathbf{E}^{K_1} \circ {}_r\mathbf{E}^{K_2} = {}_rC^{K_2K_1}{}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^K \,.$$

Учитывая соотношения

$$\mathbf{x}_1^* = (x_1)_{K_1} \cdot \mathbf{E}^{K_1} \,, \quad \mathbf{x}_2^* = (x_2)_{K_1} \cdot \mathbf{E}^{K_2} \,,$$

(79) и (80), из выражений (77) и (78) получим

$${}_rx_K = \frac{1}{L_0} \cdot (x_2)_{K_2} \cdot (x_1)_{K_1} \cdot {}_rC^{K_2K_1}{}_K \tag{82}$$

и

$${}_lx_K = \frac{1}{L_0} \cdot (x_2)_{K_2} \cdot (x_1)_{K_1} \cdot {}_lC^{K_2K_1}{}_K \,. \tag{83}$$

[24] Такое различие теряет смысл, когда умножение векторов и, соответственно, алгебраические свойства множеств векторов не рассматриваются.

Формулы (82) и (83) задают умножение векторов по отношению к координатам векторов.

Далее рассмотрим частные случаи умножения векторов вблизи единицы алгебры.

При $(x_1)_{K_1} \to (x_1)_0 = L_0$

$$\begin{aligned} {}_rx_K &= (x_2)_K \,, & {}_rC^{K_20}{}_K &= \delta^{K_2}{}_K \,, \\ {}_lx_K &= (x_2)_K \,, & {}_lC^{K_20}{}_K &= \delta^{K_2}{}_K \,. \end{aligned}$$

При $(x_2)_{K_2} \to (x_2)_0 = L_0$

$$\begin{aligned} {}_rx_K &= (x_1)_K \,, & {}_rC^{0K_1}{}_K &= \delta^{K_1}{}_K \,, \\ {}_lx_K &= (x_1)_K \,, & {}_lC^{0K_1}{}_K &= \delta^{K_1}{}_K \,. \end{aligned}$$

1. Алгебры и группы линейных преобразований, ассоциированные с умножением ковариантных векторов

Умножение вектора $\mathbf{x}_1^*$ (справа или слева) на вектор $\mathbf{x}_2^*$ сводится к линейному преобразованию этого вектора. Действительно, введем матрицу линейного преобразования

$$\begin{aligned} {}_rl^{*K_1}{}_K &= \frac{1}{L_0} \cdot (x_2)_{K_2} \cdot {}_rC^{K_2K_1}{}_K = \\ &= \frac{1}{L_0} \cdot (x_2)_0 \cdot {}_rC^{0K_1}{}_K + \frac{1}{L_0} \cdot (x_2)_\alpha \cdot {}_rC^{\alpha K_1}{}_K \,. \end{aligned}$$

Тогда (82) запишется как линейное преобразование

$${}_rx_K = (x_1)_{K_1} \cdot {}_rl^{*K_1}{}_K \,.$$

Будем рассматривать линейное преобразование ${}_rl^{*K_1}{}_K$ как элемент алгебры, которую обозначим ${}_r\mathbb{L}^{*\prime}$, некоторой группы, которую обозначим ${}_r\mathbb{G}^{*\prime}$. Назовем ${}_r\mathbb{L}^{*\prime}$ и ${}_r\mathbb{G}^{*\prime}$, соответственно, правыми алгеброй и группой, *ассоциированными с правым умножением ковариантных векторов* [25]. Преобразование (элемент) ${}_rL^{*K_1}{}_K$ этой группы строится по элементу ${}_rl^{*K_1}{}_K$ алгебры ${}_r\mathbb{L}^{*\prime}$ следующим образом:

$${}_rL^{*K_1}{}_K = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp(\,{}_rl^{*K_1}{}_K) \,.$$

В малом элемент группы должен сводиться к элементу алгебры. В нашем случае имеем[26]

$${}_rdL^{*K_1}{}_K\Big|_{\left(\substack{x_0=L_0 \\ x_\alpha=0}\right)} = {}_rdl^{*K_1}{}_K = \frac{1}{L_0} \cdot d(x_2)_{K_2} \cdot {}_rC^{K_2K_1}{}_K \,.$$

[25] К группе, подобной ${}_r\mathbb{G}^{*\prime}$, принадлежат группы электрического заряда и слабого заряда античастиц (см. Глава 4.2. Раздел II.1 и Глава 4.3. Раздел II.1.)

[26] При дифференцировании необходимо учесть, что ${}_rC^{0K_1}{}_K = \delta^{K_1}{}_K$ и $\exp(\delta^{K_1}{}_K) = \exp(1) \cdot \delta^{K_1}{}_K$.

Также используем матрицу

$$
{}_{l}l^{*K_1}{}_K = \frac{1}{L_0}\cdot (x_2)_{K_2}\cdot {}_{l}C^{K_2K_1}{}_K =
$$
$$
= \frac{1}{L_0}\cdot (x_2)_0\cdot {}_{l}C^{0K_1}{}_K + \frac{1}{L_0}\cdot (x_2)_\alpha\cdot {}_{l}C^{\alpha K_1}{}_K\,.
$$

и запишем (83) как линейное преобразование

$$
{}_{l}x_K = (x_1)_{K_1}\cdot {}_{l}l^{*K_1}{}_K\,.
$$

Будем рассматривать линейное преобразование ${}_{l}l^{*K_1}{}_K$ как элемент алгебры, которую обозначим ${}_{l}\mathbb{L}^{*\prime}$, некоторой группы, которую обозначим ${}_{l}\mathbb{G}^{*\prime}$. Назовем ${}_{l}\mathbb{L}^{*\prime}$ и ${}_{l}\mathbb{G}^{*\prime}$, соответственно, левыми алгеброй и группой, ***ассоциированными с левым умножением ковариантных векторов.***[27] Преобразование (элемент) ${}_{l}L^{*K_1}{}_K$ этой группы строится по элементу ${}_{l}l^{*K_1}{}_K$ алгебры ${}_{l}\mathbb{L}^{*\prime}$ следующим образом:

$$
{}_{l}L^{*K_1}{}_K = \frac{1}{\exp(1)}\cdot \exp({}_{l}l^{*K_1}{}_K)
$$

В малом элемент группы должен сводиться к элементу алгебры. В нашем случае имеем[28]

$$
{}_{l}dL^{*K_1}{}_K\Big|_{\left(\substack{x_0=L_0\\ x_\alpha=0}\right)} = {}_{l}dl^{*K_1}{}_K = \frac{1}{L_0}d(x_2)_{K_2}\cdot {}_{l}C^{K_2K_1}{}_K\,.
$$

IX. ПОДАЛГЕБРЫ УНИВЕРСАЛЬНОЙ КОВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ

Из универсальной ковариантной алгебры пространства-времени $\mathbb{X}^*$ выделим подалгебру, накладывая на произведение базисных векторов (73) следующие условия:

1) условие евклидовости, в которое включим два требования:

a) при $k_1 = k_2$

$$
\mathbf{E}^{k_1}\circ\mathbf{E}^{k_2} = \mathbf{E}^{k_1}\cdot\mathbf{E}^{k_2}\,,
$$

причем

$$
\mathbf{E}^1\cdot\mathbf{E}^1 = 1\,,\ \mathbf{E}^2\cdot\mathbf{E}^2 = 1\,,\ \mathbf{E}^3\cdot\mathbf{E}^3 = 1\,,\ \mathbf{E}^4\cdot\mathbf{E}^4 = -1\,;
$$

b) при $k_1 \neq k_2$

$$
\mathbf{E}^{k_1}\circ\mathbf{E}^{k_2} = \mathbf{E}^{k_1}\otimes\mathbf{E}^{k_2}\,,
$$

2) условие соседней перестановки при $k_1 \neq k_2$

$$
\mathbf{E}^{k_1}\circ\mathbf{E}^{k_2} = \mathrm{sign}(k_1,k_2)\cdot\mathbf{E}^{k_2}\circ\mathbf{E}^{k_1}\,.
$$

Здесь $\mathrm{sign}(k_1,k_2)$ – знак соседней перестановки, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов[29].

Из вышеуказанных условий вытекает, что векторное произведение базисных векторов образующего пространства в подалгебре не рассматривается. Кроме того, из них следует, что произведение четного количества одинаковых базисных векторов образующего пространства сводится к базисному вектору $\mathbf{E}^0$. Например,

$$
\mathbf{E}^{1111} = \mathbf{E}^1\circ\mathbf{E}^1\circ\mathbf{E}^1\circ\mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^0\,.
$$

Совокупность подалгебр, снабженных умножением в соответствии с вышеуказанными условиями, назовем *алгеброй пространства-времени фундаментальных антиобъектов.* Давая такое определение, исходим из постулата о том, что физическая реальность включает в себя *фундаментальные антиобъекты*, примером которых служат фундаментальные античастицы, а сопряженное пространство-время – это окружение, в котором существуют фундаментальные антиобъекты.

1. Конечное число измерений пространства подалгебры

Условия соседней перестановки и евклидовости приводят к тому, что пространство подалгебры $\mathbb{X}^*$ имеет конечное число измерений (конечное число базисных векторов). Для того, чтобы пояснить это, рассмотрим пространство тензоров порядка p – X^{*p}. Базисные векторы этого пространства имеют вид

$$
\mathbf{E}^{i_1}\circ\mathbf{E}^{i_2}\circ\ldots\circ\mathbf{E}^{i_p} = \mathbf{E}^{i_1i_2\ldots i_p}\,.
$$

В левую часть этого выражения не могут входить два одинаковых образующих базисных вектора. Если такое имеет место, то с помощью условия соседней транспозиции и условия евклидовости такой базисный вектор может быть сведен к базисному вектору, в произведении которого одинаковые образующие базисные векторы отсутствуют, то есть, такой базисный вектор $\mathbf{E}^{i_1i_2\ldots i_p}$ не является линейно независимым вектором и не является базисным вектором по определению.

Отсюда следует, что порядок p пространства тензоров X^{*p} не превышает число измерений образующего пространства n. А так как образующее пространство $X^{*1}\equiv X^*$ – это четырехмерное сопряженное пространство-время СТО, то $p \leq 4$. Таким образом, в

[27] К группе, подобной ${}_{l}\mathbb{G}^{*\prime}$, принадлежат группы нерелятивистского и релятивистского спина античастиц (см. Глава 4.2. Раздел II.2 и Глава 4.3. Раздел II.2.).

[28] При дифференцировании необходимо учесть, что ${}_{l}C^{0K_1}{}_K = \delta^{K_1}{}_K$ и $\exp(\delta^{K_1}{}_K) = \exp(1)\cdot\delta^{K_1}{}_K$.

[29] Конкретное значение $\mathrm{sign}(k_1,k_2)$ определяет подалгебру универсальной ковариантной алгебры пространства-времени.

крайнем случае

$$\mathbb{X}* = X^{*0} + X^{*1} + X^{*2} + X^{*3} + X^{*4}\,.$$

Если число измерений образующего пространства X^{*1} обозначить через n[30]

$$\dim X^{*1} = n\,,$$

то число измерений[31] пространства X^{*p} равно числу сочетаний из n элементов по p

$$\dim X^{*p} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{p!} = \mathrm{C}_n^p\,.$$

Отсюда следует что

$$\dim X^{*p} = \dim X^{*(n-p)},\ \ \dim X^{*n} = 1,\ \ \dim X^{*(n-1)} = n.$$

Подалгебра сопряженного пространства-времени $\mathbb{X}^*$ в общем случае представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{X}^* = X^{*0} + X^{*1} + \ldots + X^{*n}\,.$$

Число измерений подалгебры сопряженного пространства-времени

$$N = \dim \mathbb{X}^* = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

В нашем случае образующее пространство – это четырехмерное сопряженное пространство-время СТО, то есть

$$\dim X^1 = 4\,,$$

поэтому

$$\dim X^{*2} = 6\,,\quad \dim X^{*3} = 4\,,\quad \dim X^{*4} = 1\,,$$

$$\dim \mathbb{X}^* = 2^4 = 16\,.$$

Вектор пространства-времени (74) в нашем случае имеет вид

$$\mathbf{x}^* = x_0 \cdot \mathbf{E}^0 + x_i \cdot \mathbf{E}^i + x_{ij} \cdot \mathbf{E}^{ij} + x_{ijk} \cdot \mathbf{E}^{ijk} + x_{1324} \cdot \mathbf{E}^{1324}\,.$$

Будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$I\,, J\,, K\,, L\,, \sim (0, i, ij, ijk\,, 1324),$$

$$\mathbf{x}^* = x_I \cdot \mathbf{E}^I\,.$$

[30] Общий случай числа измерений рассматривается затем, чтобы при необходимости использовать образующее пространство с числом измерений, отличным от четырех. Например, геометрическое пространство, когда $n = 3$.

[31] Выражение $\dim A$ означает *число измерений* векторного пространства A.

Если образующее пространство представляет собой трехмерное геометрическое пространство[32], то

$$\dim X^{*2} = 3\,,\quad \dim X^{*3} = 1\,,$$

$$N = \dim \mathbb{X}_3 = 2^3 = 8\,.$$

Вектор пространства универсальной подалгебры (74) в этом случае имеет вид

$$\mathbf{x}^* = x_0 \cdot \mathbf{E}^0 + x_a \cdot \mathbf{E}^a + x_{ab} \cdot \mathbf{E}^{ab} + x_{123} \cdot \mathbf{E}^{123}\,.$$

Будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$A\,, B\,, C\,, D\,, \sim (0, a, ab, 123),$$

$$\mathbf{x}^* = x_A \cdot \mathbf{E}^A\,.$$

2. Скалярное произведение. Контравариантный метрический тензор

Условие соседней перестановки и условие евклидовости позволяют обобщить скалярное произведение в образующем пространстве до скалярного произведения в подалгебре $\mathbb{X}^*$.

Для $K_1 = K_2$

$$\mathbf{E}^{K_1} \circ \mathbf{E}^{K_2} = \mathbf{E}^{K_1} \cdot \mathbf{E}^{K_2} = g^{K_1 K_2}\,.$$

Здесь $g^{K_1 K_2}$ – ***контравариантный метрический тензор*** в подалгебре сопряженного пространства-времени $\mathbb{X}^*$. Указанное скалярное произведение определяется через скалярные произведения образующих базисных векторов. Очевидно, что определенный таким образом метрический тензор не зависит от порядка умножения базисных векторов, то есть

$$g^{K_1 K_2} = g^{K_2 K_1}\,.$$

Вместе с тем скалярное умножение является частным случаем универсального умножения. Отсюда для правой универсальной подалгебры ${}_r\mathbb{X}^*$ из выражения (79) для $K_1 = K_2$ имеем

$$\mathbf{E}^{K_1} \cdot \mathbf{E}^{K_2} = {}_rC^{K_2 K_1}{}_0 \cdot \mathbf{E}^0\,.$$

Отсюда

$$g^{K_1 K_2} = {}_rC^{K_2 K_1}{}_0\,.$$

Для левой универсальной подалгебры ${}_l\mathbb{X}^*$ из соотношения (80) для $K_1 = K_2$ имеем

$$\mathbf{E}^{K_2} \cdot \mathbf{E}^{K_1} = {}_lC^{K_2 K_1}{}_0 \cdot \mathbf{E}^0\,.$$

[32] Иногда будем использовать обозначение $\mathbb{X}_n^*$ для подалгебры пространства-времени, подчеркивая размерность n образующего пространства X^{*1}.

Отсюда

$$g^{K_2K_1} = {}_lC^{K_2K_1}{}_0 \,.$$

Если учесть, что

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K = {}_lC^{K_1K_2}{}_K \,,$$

то получим: в правой и левой подалгебрах пространства-времени $\mathbb{X}^*$ имеет место один и тот же метрический тензор.

Установим еще одну связь между метрическим тензором и структурными постоянными подалгебры. Для этого воспользуемся ассоциативностью умножения в правой подалгебре ${}_r\mathbb{X}^*$ по отношению к базисным векторам

$$({}_r\mathbf{E}^{K_1} \circ {}_r\mathbf{E}^{K_2}) \circ {}_r\mathbf{E}^{K_3} = {}_r\mathbf{E}^{K_1} \circ ({}_r\mathbf{E}^{K_2} \circ {}_r\mathbf{E}^{K_3}) \,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (79),получим

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K\, ({}_r\mathbf{E}^K \circ {}_r\mathbf{E}^{K_3}) = ({}_r\mathbf{E}^{K_1} \circ {}_r\mathbf{E}^K)\, {}_rC^{K_3K_2}{}_K \,.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (79), получим

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K \cdot {}_rC^{K_3K}{}_{K_4} = {}_rC^{KK_1}{}_{K_4} \cdot {}_rC^{K_3K_2}{}_K \,. \tag{84}$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам K_4 и K_1. Получим

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K \cdot {}_rC^{K_3K}{}_{K_1} = {}_rC^{KK_1}{}_{K_1} \cdot {}_rC^{K_3K_2}{}_K \,. \tag{85}$$

Так как произведение базисного вектора $\mathbf{E}^K$ на базисный вектор, отличный от $\mathbf{E}^0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^{0L}{}_M$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (85) имеет вид

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K \cdot {}_rC^{K_3K}{}_{K_1} = {}_rC^{0K_1}{}_{K_1} \cdot {}_rC^{K_3K_2}{}_0 \,.$$

Отсюда получим

$$g^{K_3K_2} = \frac{1}{N} \cdot {}_rC^{K_2K_1}{}_K \cdot {}_rC^{K_3K}{}_{K_1} \,,$$

где N–число измерений подалгебры ${}_r\mathbb{X}^*$.

Аналогичное соотношение получим для структурных постоянных левой подалгебы ${}_l\mathbb{X}^*$. Для этого воспользуемся ассоциативностью умножения в левой подалгебре ${}_l\mathbb{X}^*$ по отношению к базисным векторам

$$({}_l\mathbf{E}^{K_1} \circ {}_l\mathbf{E}^{K_2}) \circ {}_l\mathbf{E}^{K_3} = {}_l\mathbf{E}^{K_1} \circ ({}_l\mathbf{E}^{K_2} \circ {}_l\mathbf{E}^{K_3}) \,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (80), получим

$${}_lC^{K_1K_2}{}_K\, ({}_l\mathbf{E}^K \circ {}_l\mathbf{E}^{K_3}) = ({}_l\mathbf{E}^{K_1} \circ {}_l\mathbf{E}^K)\, {}_lC^{K_2K_3}{}_K \,.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (80), получим

$${}_lC^{K_1K_2}{}_K \cdot {}_lC^{KK_3}{}_{K_4} = {}_lC^{K_1K}{}_{K_4} \cdot {}_lC^{K_2K_3}{}_K \,,$$

или иначе

$${}_lC^{K_1K}{}_{K_4} \cdot {}_lC^{K_2K_3}{}_K = {}_lC^{KK_3}{}_{K_4} \cdot {}_lC^{K_1K_2}{}_K \,. \tag{86}$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам K_4 и K_1. Получим

$${}_lC^{K_1K}{}_{K_1} \cdot {}_lC^{K_2K_3}{}_K = {}_lC^{KK_3}{}_{K_1} \cdot {}_lC^{K_1K_2}{}_K \,. \tag{87}$$

Так как произведение базисного вектора $\mathbf{E}^K$ на базисный вектор, отличный от $\mathbf{E}^0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^{L0}{}_M$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (87) имеет вид

$${}_lC^{K_10}{}_{K_1} \cdot {}_lC^{K_2K_3}{}_0 = {}_lC^{KK_3}{}_{K_1} \cdot {}_lC^{K_1K_2}{}_K$$

Отсюда получим

$$g^{K_2K_3} = \frac{1}{N} \cdot {}_lC^{KK_3}{}_{K_1} \cdot {}_lC^{K_1K_2}{}_K \,,$$

где N–число измерений подалгебры ${}_l\mathbb{X}^*$.

Скалярное произведение вектора сопряженного пространства-времени на себя определяет его квадрат длины

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x}^* = g^{IK} \cdot x_I \cdot x_K \,.$$

Подалгебру сопряженного пространства-времени $\mathbb{X}^*$ необходимо подчинить условию: *квадрат длины вектора* $\mathbf{x}^*$ *равен нулю*[33]

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x}^* \equiv g^{IK} \cdot x_I \cdot x_K = 0 \,.$$

По существу это условие позволяет рассматривать координаты x_0 как обобщение *интервала* сопряженного пространства-времени СТО.

3. Оператор набла ∇

Напомним, что в теории векторного поля используется векторный оператор дифференцирования *набла*

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x^3} \,, \tag{88}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – базисные векторы геометрического пространства. Для обобщенного пространства-времени $\mathbb{X}$, относящегося к фундаментальным физическим объектам и рассматриваемого в настоящей Главе, указанный оператор набла требует обобщения.

Рассмотрим оператор дифференцирования по вектору пространства-времени $\mathbb{X}$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \,.$$

[33] Пояснения к этому условию приведены в Главе 1.1 Раздел 4.5.

Запишем его следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^K} \cdot \frac{\partial x^K}{\partial \mathbf{x}} ,$$

где нужно положить[34]

$$\frac{\partial x^K}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{E}^K . \tag{89}$$

Таким образом, оператор

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^K} \cdot \mathbf{E}^K$$

обобщает оператор набла (88) и сводится к нему для геометрического пространства.

В результате определим оператор набла в нашем случае следующим образом

$$\nabla = \mathbf{E}^K \frac{\partial}{\partial x^K} \tag{90}$$

и назовем его *ковариантный оператор набла.* Введем дополнительные операторы, связанные с ∇. Умножим оператор (90) на базисные векторы $\mathbf{E}^I$ слева. Получим

$${}_l\nabla^I = \mathbf{E}^K \circ \mathbf{E}^I \frac{\partial}{\partial x^K} = {}_lC^{KI}{}_{I_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x^K} \mathbf{E}^{I_1} .$$

Проекция этих операторов на базисный вектор $\mathbf{E}^{I_1}$ – это дифференциальные операторы

$${}_l\nabla^I{}_{I_1} = {}_lC^{KI}{}_{I_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x^K} .$$

В частном виде эти операторы используются в уравнении Дирака для фундаментальных частиц, а матрицы ${}_lC^{KI}{}_{I_1}$ в частном случае представляют собой матрицы Дирака.[35]

Умножим оператор (90) на базисные векторы $\mathbf{E}^I$ справа. Получим

$${}_r\nabla^I = \mathbf{E}^I \circ \mathbf{E}^K \frac{\partial}{\partial x^K} = {}_rC^{KI}{}_{I_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x^K} \mathbf{E}^{I_1} .$$

Проекция этих операторов на базисный вектор $\mathbf{E}^{I_1}$ – это дифференциальные операторы

$${}_r\nabla^I{}_{I_1} = {}_rC^{KI}{}_{I_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x^K} .$$

[34] Действительно из выражения (75) имеем

$$dx^K = \mathbf{E}^K \cdot \mathbf{x} .$$

Сравнивая это соотношение с

$$dx^K = \frac{\partial x^K}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} ,$$

получим соотношение (89)

[35] См. Глава 3.3. Раздел 8. и Глава 4.3. Раздел 2.

В настоящее время эти операторы в физике не используются.

Обратимся теперь к сопряженному пространству-времени $\mathbb{X}^*$. Это пространство-время предназначено для описания фундаментальных физических антиобъектов. В этом случае оператор набла (88) требует своего обобщения. Определим оператор набла в этом случае следующим образом:

$$\nabla^* = \mathbf{e}_K \frac{\partial}{\partial x_K} \tag{91}$$

и назовем его *контравариантный оператор набла.* Введем дополнительные операторы, связанные с ∇^*. Умножим оператор (91) на базисные векторы $\mathbf{e}_I$ слева. Получим

$${}_l\nabla^*_I = \mathbf{e}_K \circ \mathbf{e}_I \frac{\partial}{\partial x_K} = {}_lC^{I_1}{}_{IK} \cdot \frac{\partial}{\partial x_K} \mathbf{e}_{I_1} .$$

Проекция этих операторов на базисный вектор $\mathbf{e}_{I_1}$ это дифференциальные операторы

$${}_l\nabla^{*I_1}{}_I = {}_lC^{I_1}{}_{IK} \cdot \frac{\partial}{\partial x_K} .$$

В частном виде эти операторы используются в уравнении Дирака для фундаментальных античастиц, а матрицы ${}_lC^{I_1}{}_{IK}$ в частном случае представляют собой сопряженные матрицы Дирака.[36]

Умножим оператор (91) на базисные векторы $\mathbf{e}_I$ справа. Получим

$${}_r\nabla^*_I = \mathbf{e}_I \circ \mathbf{e}_K \frac{\partial}{\partial x_K} = {}_rC^{I_1}{}_{IK} \cdot \frac{\partial}{\partial x_K} \mathbf{e}_{I_1} .$$

Проекция этих операторов на базисный вектор $\mathbf{e}_{I_1}$ это дифференциальные операторы

$${}_r\nabla^{*I_1}{}_I = {}_rC^{I_1}{}_{IK} \cdot \frac{\partial}{\partial x_K} .$$

В настоящее время эти операторы в физике не используются.

4. Операция сопряжения

Взаимосвязь между пространством-временем $\mathbb{X}$ и сопряженным пространством-временем $\mathbb{X}^*$ осуществляется с помощью операции *сопряжения.* Применение этой операции рассмотрим на двух примерах:

1) построение *сопряженной* матрицы l^* по заданной матрице l;

2) построение *сопряженных* структурных постоянных C^* по заданным структурным постоянным C.

[36] См. Глава 3.3. Раздел 8. и Глава 4.3. Раздел 2.

Дадим следующие пояснения к операции сопряжения. Эта операция включает в себя два этапа:

1) сначала осуществляется изменение вертикального положения (поднятием или опусканием) индексов тензора с помощью метрического тензора;

2) затем изменяется горизонтальный порядок индексов тензора на противоположный.[37]

Рассмотрим построение сопряженной матрицы по отношению к матрице $l^{K_1}{}_{K_2}$. Сопряженную матрицу обозначим $l^{*K_1}{}_{K_2}$. На первом этапе осуществляется переход

$$l^{K_1}{}_{K_2} \to g_{N_1K_1} \cdot l^{K_1}{}_{K_2} \cdot g^{K_2N_2} = l_{N_1}{}^{N_2} .$$

На втором этапе осуществляется транспонирование матрицы

$$l_{N_1}{}^{N_2} \to \left(l_{N_1}{}^{N_2}\right)^t .$$

Таким образом,

$$\left(l^{K_1}{}_{K_2}\right)^* = \left(g_{N_1K_1} \cdot l^{K_1}{}_{K_2} \cdot g^{K_2N_2}\right)^t = l^{*N_1}{}_{N_2} .$$

Обратимся теперь к сопряжению структурных постоянных $C^K{}_{K_1K_2}$ и вычислим

$$\left(C^K{}_{K_1K_2}\right)^* .$$

На первом этапе изменяется вертикальное положение индексов

$$C^K{}_{K_1K_2} \to g_{NK} \cdot C^K{}_{K_1K_2} \cdot g^{K_1N_1} \cdot g^{K_2N_2} = C_N{}^{N_1N_2} .$$

На втором этапе осуществляется операция транспонирования

$$C_N{}^{N_1N_2} \to \left(C_N{}^{N_1N_2}\right)^t = C^{N_2N_1}{}_N .$$

Таким образом,

$$\left(C^K{}_{K_1K_2}\right)^* = \left(g_{NK}C^K{}_{K_1K_2}g^{K_1N_1}g^{K_2N_2}\right)^t = C^{N_2N_1}{}_N .$$

Операция сопряжения переводит левые структурные постоянные пространства-времени ${}_l\mathbb{X}$ в правые структурные постоянные сопряженного пространства-времени ${}_r\mathbb{X}^*$ и наоборот правые постоянные в левые, то есть

$$\left({}_lC^K{}_{K_1K_2}\right)^* = {}_rC^{N_2N_1}{}_N$$

и

$$\left({}_rC^K{}_{K_1K_2}\right)^* = {}_lC^{N_2N_1}{}_N .$$

Имеет место также обратный перевод: операция сопряжения переводит левые структурные постоянные сопряженного пространства-времени ${}_l\mathbb{X}^*$ в правые структурные постоянные пространства-времени ${}_r\mathbb{X}$ и наоборот правые постоянные в левые, то есть

$$\left({}_rC^{N_2N_1}{}_N\right)^* = {}_lC^K{}_{K_1K_2}$$

и

$$\left({}_lC^{N_2N_1}{}_N\right)^* = {}_rC^K{}_{K_1K_2} .$$

X. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Постулируется существование *фундаментальных физических объектов*. Такими объектами, прежде всего, являются фундаментальные частицы. Фундаментальные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с пространством-временем $\mathbb{X}$. Таким образом, пространство-время $\mathbb{X}$ – это пространственно-временная характеристика фундаментальных физических объектов.

- Пространство-время $\mathbb{X}$ представляет собой совокупность контравариантных тензоров всех рангов, использующих пространство-время специальной теории относительности как образующее пространство.

- Пространство-время $\mathbb{X}$ является *универсальной контравариантной алгеброй*, так как на нем определено не только сложение контравариантных векторов, но и *универсальное* умножение этих векторов.

- Так как универсальное умножение является некоммутативным, то пространство-время $\mathbb{X}$ выступвет в двух модификациях – *левая* универсальная контравариантная алгебра ${}_l\mathbb{X}$ и *правая* универсальная контравариантная алгебра ${}_r\mathbb{X}$ в зависимости от порядка умножения векторов.

- Дифференцирование закона умножения алгебры пространства-времени приводит к *уравнениям структуры*, которые объясняют квантование пространства-времени.

---

[37] Эта операция называется *транспонированием*. Для нее используется следующее обозначение, которое покажем на примере матрицы. Пусть матрица имеет вид

$$l^{K_1}{}_{K_2} ,$$

тогда матрица, транспонированная к ней, обозначается

$$\left(l^{K_1}{}_{K_2}\right)^t$$

и она равна

$$\left(l^{K_1}{}_{K_2}\right)^t = l_{K_2}{}^{K_1} .$$

- Постулируется существование *фундаментальных антиобъектов*. Такими объектами, прежде всего, являются фундаментальные античастицы. Фундаментальные антиобъекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с сопряженным пространством-временем $\mathbb{X}^*$. Таким образом, сопряженное пространство-время $\mathbb{X}^*$ – это пространственно-временная характеристика фундаментальных физических антиобъектов.

- Сопряженное пространство-время $\mathbb{X}^*$ представляет собой совокупность ковариантных тензоров всех рангов, использующих сопряженное пространство-время специальной теории относительности как образующее пространство.

- Сопряженное пространство-время $\mathbb{X}^*$ является *универсальной ковариантной алгеброй*, так как на нем определено не только сложение ковариантных векторов, но и *универсальное* умножение этих векторов.

- Так как универсальное умножение является некоммутативным, то сопряженное пространство-время $\mathbb{X}^*$ выступает в двух модификациях – *левая* универсальная ковариантная алгебра ${}_l\mathbb{X}$ и *правая* универсальная ковариантная алгебра ${}_r\mathbb{X}$ в зависимости от порядка умножения векторов.

Глава 1.3 Пространство-время лептона

В этой Главе рассмотрим пространство-время как *алгебру Клиффорда*. Алгебра Клиффорда является частным случаем универсальной алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$. Особенное значение алгебры Клиффорда связано с тем, что она лежит в основе квантовой теории лептонов Дирака. Поэтому далее будем рассматривать алгебру Клиффорда как пространство-время лептонов. Для того, чтобы очевидно выделить этот случай, для алгебры пространства-времени лептонов введем другое обозначение базисных векторов. Вместо обозначения базисных векторов $\mathbf{e}$ введем обозначение ε, а вместо обоначения сопряженных базисных векторов $\mathbf{E}$ введем обозначение $\mathcal{E}$. Кроме того, введем специальное обозначение для самой алгебры пространства-времени лептонов $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$.

I. ПОЧЕМУ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ НЕОБХОДИМО ОБОБЩИТЬ ДО АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

[1]

Отправной точкой для дальнейших рассуждений будет уравнение Дирака, которое запишем следующим образом

$$\left(C^{iK}{}_{K_1}\,\partial_i + \frac{m_e\,c}{\hbar}\,C^{0K}{}_{K_1}\right)\cdot\psi^{K_1} = 0\,.$$

Здесь $C^{0K}{}_{K_1}$ – единичная матрица, а $C^{iK}{}_{K_1}$ – матрицы Дирака, которые представляют собой образующие структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда в первом сжатом комплексном представлении[2].

Согласно алгебраическому подходу индексы K, K_1 нумеруют компоненты вектора волновой функции, матрицы ${}_lC^{iK}{}_{K_1}$ являются образующими структурными матрицами, определяющими левое умножение базисных векторов:

$${}_l\mathcal{E}^i \circ {}_l\mathcal{E}^K = {}_lC^{iK}{}_{K_1}\cdot{}_l\mathcal{E}^{K_1}\,.$$

В уравнении Дирака свертка индекса K_1 структурной матрицы с соответствующим индексом волновой функции является совершенно законной, так как эти индексы относятся к векторам одного пространства. Однако помимо этого в уравнении Дирака индекс i структурной матрицы сворачивается с индексом, нумерующим пространственно-временные координаты x^i, что в общем случае совершенно недопустимо. Необходимо предположить, что либо номер матрицы i нумерует векторы другой природы, либо пространственно-временные векторы принадлежат той же алгебре, что и векторы волновой функции. Первая точка зрения противоречит развиваемому нами алгебраическому подходу, согласно которому матрицы ${}_lC^{iK}{}_{K_1}$ есть *структурные* матрицы алгебры и индекс i нумерует векторы в *этой* алгебре. Таким образом, нам ничего не остается, как выдвинуть следующий тезис. Пространство-время, рассматриваемое в теории электрона Дирака, необходимо обобщить и рассматривать его как алгебру Клиффорда.

Кроме того, так как структурные матрицы ${}_lC^{iK}{}_{K_1}$ представляют образующие базисные векторы ${}_l\mathcal{E}^i$

$${}_lC^{iK}{}_{K_1} \sim {}_l\mathcal{E}^i\,,$$

а x^i – это координаты пространства-времени специальной теории относительности (СТО), то следует считать, что образующим пространством алгебры Клиффорда как обобщенного пространства-времени является пространство-время СТО.

Так как согласно нашему выводу алгебру Клиффорда следует соотнести определенному физическому объекту – лептону, то и рассматриваемое обобщение пространства-времени мы должны отнести к лептону. Таким образом, вводимое нами обобщенное пространство-время не есть пространство-время вообще (без относительно к чему-либо), а это пространство-время, сопутствующее (соотнесенное) лептону. Иногда мы будем говорить о *собственном* пространстве-времени лептона.

Здесь полезно сделать несколько общих замечаний. Вид операторов дифференцирования по пространственно-временным координатам, входящих в установленные фундаментальные уравнения физики, определяет специфику специальной теории относительности и заставляет переходить к новым представлениям о пространственно-временном континууме, формировать специальную теорию относительности в обобщенном смысле. Так уравнения Максвелла выявили роль оператора Даламбера (в описании процесса распространения электромагнитных колебаний). Следствием этого явилась специальная теория относительности Эйнштейна и представление о четырехмерном пространственно-временном континууме. Аналогично уравнения Дирака выявляют роль оператора

$${}_lC^{iK}{}_{K_1}\cdot\partial_i \sim {}_l\mathcal{E}^i\cdot\partial_i\,.$$

Следствием этого должно быть обобщение пространства-времени СТО до алгебры Клиффорда, построенной на четырехмерном пространстве- времени СТО как на образующем пространстве, а также разработка соответствующей специальной теории относительности, то есть теории преобразований, сохра-

---

[1] Этот Раздел при первом чтении можно опустить и вернуться к нему после прочтения Раздела VIII Главы 3.3.

[2] См. Глава 4.1. Раздел III.

няющих пространственно-временные инварианты в алгебре Клиффорда[3].

II. ОБРАЗУЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО – ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ СТО

Пространство-время СТО X является образующим пространством алгебры Клиффорда. Оно рассматривается как векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Здесь для простоты векторы и координаты векторов пространства-времени СТО полагаются безразмерными. Вектор $\mathbf{x} \in X$ запишем через базисные векторы в новых обозначениях:

$$\mathbf{x} = \varepsilon_i \, x^i \,,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$; ε_1, ε_2, ε_3 – это базисные векторы геометрического пространства, а ε_4 – базисный вектор времени, $x^i \in \mathbb{R}$ есть координаты вектора.

На X определено *скалярное произведение* векторов, то есть, каждой паре векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in X$ ставится в соответствие число, которое записывается следующим образом:

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на себя определяет его *квадрат длины*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 \,,$$

который связан с вводимым в СТО *квадратом интервала* s^2 следующим образом:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = -s^2 \,.$$

Из двух предыдущих соотношений следует известное из СТО выражение для квадрата интервала, которое для удобства последующего изложения запишем в следующем виде:

$$s^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0 \,. \tag{1}$$

Скалярное произведение базисных векторов определяет *метрический тензор* на X:

$$g_{ik} \equiv \varepsilon_i \cdot \varepsilon_k = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & & 1 & & \\ 3 & & & 1 & \\ 4 & & & & -1 \\ \hline \end{array} \,.$$

Обратный метрический тензор g^{ik} определяется условием

$$g^{ik} \, g_{kl} = \delta^i{}_l \,.$$

[3] Этой теме посвящена следующая Глава.

Введем базисные векторы $\mathcal{E}^i \in X$, для которых потребуем выполнения условия[4]

$$\mathcal{E}^i \cdot \mathbf{x} = x^i \,.$$

Базисные векторы $\mathcal{E}^i$ называются *сопряженными* по отношению к базисным векторам ε_i. Для сопряженных базисных векторов выполняется соотношение

$$\mathcal{E}^i \cdot \varepsilon_k = \delta^i{}_k \,.$$

Сопряженные базисные векторы $\mathcal{E}^i$ связаны с базисными векторами ε_k соотношением

$$\mathcal{E}^i = \varepsilon_k \, g^{ik} \,.$$

Вектору $\mathbf{x} = \varepsilon_i \, x^i$ поставим в соответствие *сопряженный* или ковариантный вектор

$$\mathbf{x}^* = x_i \, \mathcal{E}^i \,,$$

где $x_i = \delta_{ik} \, x^k$ есть ковариантные координаты сопряженного вектора. Скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на сопряженный ему вектор $\mathbf{x}^*$ равно

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^* = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 \,.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

Множество сопряженных (ковариантных) векторов составляет векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, которое обозначается X^* и называется *сопряженным или ковариантным пространством-временем СТО.*

III. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ЛЕПТОНА КАК АЛГЕБРА КЛИФФОРДА

Обобщим пространство-время СТО X до алгебры Клиффорда $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ [5]. Такое обобщение выполним в два этапа. Сначала построим векторное пространство универсальной алгебры $\mathbb{X}$, а затем, используя соответствующие условия евклидовости и соседней перестановки, выделим из универсальной алгебры подалгебру Клиффорда.

Итак, векторное пространство универсальной алгебры $\mathbb{X}$ включает в себя

1) числа

$$\overset{0}{\mathbf{x}} = \varepsilon_0 \cdot x^0 \,;$$

[4] Это условие является математической формулировкой физического процесса измерения контравариантного вектора.

[5] Эта алгебра является частным случаем контравариантной универсальной алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$, веденной в предыдущей Главе.

они составляют множество действительных чисел $X^0 \equiv \mathbb{R}$; базисный вектор ε_0 – это действительная единица;

2) векторы образующего пространства X[6]

$$\overset{1}{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x} = \varepsilon_i \cdot x^i \,;$$

3) пары векторов из образующего пространства[7]

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 \,;$$

они принадлежат множеству векторов вида

$$\overset{2}{\mathbf{x}} = \varepsilon_{i_1 i_2} \cdot x^{i_1 i_2} \,,$$

обозначенному X^2; здесь

$$\varepsilon_{i_1 i_2} = \varepsilon_{i_1} \circ \varepsilon_{i_2} \, -$$

это базисные векторы в X^2;

4) тройки векторов из образующего пространства

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_3 \,;$$

они принадлежат множеству векторов вида

$$\overset{3}{\mathbf{x}} = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \cdot x^{i_1 i_2 i_3} \,,$$

обозначенному X^3; здесь

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = \varepsilon_{i_1} \circ \varepsilon_{i_2} \circ \varepsilon_{i_3} \, -$$

это базисные векторы в X^3;

$$\ldots$$

n) в общем случае множество $\circ$-произведений p векторов

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 \circ \ldots \circ \mathbf{x}_p \,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ также принадлежат X. Вышеуказанные p-векторы принадлежат множеству векторов вида

$$\overset{n}{\mathbf{x}} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_p} \, x^{i_1 i_2 \ldots i_p} \,,$$

обозначенному X^p;

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \varepsilon_{i_1} \circ \varepsilon_{i_2} \circ \ldots \circ \varepsilon_{i_p} \, -$$

это базисные векторы в X^p.

Векторное пространство универсальной алгебры $\mathbb{X}$ представляет собой сумму вышеуказанных векторных пространств

$$\mathbb{X} = X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + \ldots + X^p + \ldots \,.$$

Теперь воспользуемся условиями евклидовости и соседней перестановки, накладываемыми на универсальное умножение векторов. Для алгебры Клиффорда эти условия таковы:

1) условие евклидовости, в которое включим два требования:

a) при $k_1 = k_2$

$$\varepsilon_{k_1} \circ \varepsilon_{k_2} = \varepsilon_{k_1} \cdot \varepsilon_{k_2} \,,$$

причем

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 = 1 \,, \; \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 = 1 \,, \; \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_3 = 1 \,, \; \varepsilon_4 \cdot \varepsilon_4 = -1 \,;$$

b) при $k_1 \neq k_2$

$$\varepsilon_{k_1} \circ \varepsilon_{k_2} = \varepsilon_{k_1} \otimes \varepsilon_{k_2} \,,$$

2) условие соседней перестановки

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 &= -\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 \,, & \varepsilon_1 \circ \varepsilon_3 &= -\varepsilon_3 \circ \varepsilon_1 \,, \\ \varepsilon_2 \circ \varepsilon_3 &= -\varepsilon_3 \circ \varepsilon_2 \,, & \varepsilon_1 \circ \varepsilon_4 &= -\varepsilon_4 \circ \varepsilon_1 \,, \\ \varepsilon_2 \circ \varepsilon_4 &= -\varepsilon_4 \circ \varepsilon_2 \,, & \varepsilon_3 \circ \varepsilon_4 &= -\varepsilon_4 \circ \varepsilon_3 \,. \end{aligned}$$

Векторное пространство алгебры Клиффорда ограничено тензорами четвертого порядка

$$\mathbb{X}_{\mathbb{L}} = X^0 + X^1 + X^2 + X^3 + X^4 \,,$$

Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ можно записать через базисные векторы

$$\mathbf{x} = \varepsilon_0 \, x^0 + \varepsilon_i \, x^i + \varepsilon_{[ij]} \, x^{[ij]} + \varepsilon_{[ijk]} \, x^{[ijk]} + \varepsilon_{1324} \, x^{1324} \,. \quad (3)$$

Здесь единица множества действительных чисел $\mathbb{R}$ обозначена через ε_0 или с использованием собирательных индексов

$$\mathbf{x} = \varepsilon_I \cdot x^I \,.$$

В соответствии с соображениями Раздела I векторное пространство $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ есть *пространство-время лептона.*

Напомним, что закон левого умножения базисных векторов ε_I имеет вид

$$\varepsilon_I \circ \varepsilon_K = \varepsilon_L \cdot {}_lC^L{}_{KI} \,, \qquad (4)$$

где ${}_lC^L{}_{KI}$ есть структурные постоянные левой алгебры Клиффорда. В частном случае умножение $\varepsilon_I \circ \varepsilon_K$ определяет скалярное произведение

$$\varepsilon_I \cdot \varepsilon_K = \varepsilon_0 \cdot {}_lC^0{}_{KI}$$

и метрический тензор $g_{KI} = {}_lC^0{}_{KI}$. Метрический тензор в принятой нами последовательности индексов имеет вид

[6] Здесь также, как и в предыдущем Разделе, векторы и координаты векторов пространства-времени СТО X рассматриваются как безразмерные величины.

[7] Символ $\circ$ означает *универсальное* умножение.

$$
g_{KI} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
\hline
32 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
42 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
1 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
\hline
134 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Напомним также, что ${}_l C^L{}_{0I} = {}_l C^L{}_{I0} = \delta^L{}_I$.

Скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на себя определяет его *квадрат длины*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{KI} \cdot x^I \cdot x^K \, .$$

Из условия ассоциативности умножения в алгебре Клиффорда ${}_l\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ следует регулярное представление базисных векторов ${}_l\varepsilon_I$:

$${}_l\varepsilon_I \sim {}_l C^L{}_{KI} \, .$$

При этом вектору $\mathbf{x}$ соответствует матрица

$$\mathbf{x} \sim x^L{}_K = {}_l C^L{}_{KI} \cdot x^I \, .$$

Алгебра Клиффорда $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ является алгеброй с делением, то есть для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{X}_{\mathbb{L}}$, за исключением нулевого, определен *обратный* вектор $\mathbf{x}^{-1}$ в соответствии с выражением

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} = \varepsilon_0 \tag{5}$$

или в координатном виде

$$g_{IK} \cdot x^I \cdot (x^{-1})^K = 1 \, .$$

Приведем пример вычисления обратного вектора. Кватернионы являются частным случаем рассматриваемых векторов. Это векторы вида

$$\mathbf{x} = \varepsilon_0 \, x^0 + \varepsilon_{21} \, x^{21} + \varepsilon_{13} \, x^{13} + \varepsilon_{32} \, x^{32} \, .$$

Кватерниону $\mathbf{x}$ можно сопоставить кватернион $\mathbf{x}^*$, называемый *сопряженным*:

$$\mathbf{x}^* = \varepsilon_0 \, x^0 - \varepsilon_{21} \, x^{21} - \varepsilon_{13} \, x^{13} - \varepsilon_{32} \, x^{32} \, ,$$

для которого выполняется соотношение

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^* = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^* \, .$$

С помощью сопряженного кватерниона легко определяется обратный:

$$\mathbf{x}^{-1} = \frac{\mathbf{x}^*}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^*} \, .$$

Можно предположить, что так же (путем изменения знака перед слагаемыми вектора) определяется сопряженный вектор для произвольного вектора алгебры Клиффорда. Однако это не так. В этом можно убедиться, проделав соответствующие вычисления, например, для вектора

$$\mathbf{x} = \varepsilon_0 \, x^0 + \varepsilon_1 \, x^1 + \varepsilon_{32} \, x^{32} + \varepsilon_{123} \, x^{123} \, .$$

Поэтому рассмотренный выше "сопряженный" вектор не допускает простое обобщение и дальнейшее определение сопряженного вектора строится иначе.

1. Ковариантная алгебра Клиффорда. Пространство-время антилептона

Для описания пространственно-временной структуры антилептона введем *ковариантную алгебру Клиффорда*. Для этого обобщим сопряженное пространство-время СТО X^*, введенное в предыдущей Главе, до ковариантной алгебры Клиффорда $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}{}^*$[8]

$$\mathbb{X}_{\mathbb{L}}{}^* = X^{*0} + X^{*1} + X^{*2} + X^{*3} + X^{*4}$$

над образующим пространством X^* аналогично тому, как это было сделано выше. Здесь $X^{*0} = \mathbb{R}$, $X^{*1} = X^*$.

Вектор $\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}_{\mathbb{L}}{}^*$ можно записать через базисные векторы:

$$\mathbf{x}^* = x_0 \, \mathcal{E}^0 + x_i \, \mathcal{E}^i + x_{[ij]} \, \mathcal{E}^{[ij]} + x_{[ijk]} \, \mathcal{E}^{[ijk]} + x_{1324} \, \mathcal{E}^{1324} \, .$$

Через $\mathcal{E}^0$ обозначена единица множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Или с использованием собирательных индексов

$$\mathbf{x}^* = x_I \cdot \mathcal{E}^I \, .$$

Скалярное произведение векторов пространства-времени СТО X и сопряженного пространства-времени СТО X^* обобщается на скалярное произведение векторов пространства-времени лептона $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ и векторов пространства-времени антилептона $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}{}^*$. В частности, базисные векторы $\varepsilon_{k_n \ldots k_2 k_1}$ и $\mathcal{E}^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ могут быть выбраны так, что

$$\mathcal{E}^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot \varepsilon_{k_n \ldots k_2 k_1} = \delta^{i_n}_{k_n} \, \ldots \, \delta^{i_2}_{k_2} \, \delta^{i_1}_{k_1} \, .$$

---

[8] Эта алгебра является частным случаем универсальной ковариантной алгебры $\mathbb{X}^*$.

В общем случае

$$\mathcal{E}^I \cdot \varepsilon_K = \delta^I{}_K \,.$$

Напомним левый закон умножения базисных векторов $\mathcal{E}^I$:

$$\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K = {}_lC^{IK}{}_L \cdot \mathcal{E}^L \,,$$

где ${}_lC^{IK}{}_L$ есть структурные постоянные левой ковариантной алгебры Клиффорда. Проекция произведения $\mathcal{E}^I \circ \mathcal{E}^K$ на направление $\mathcal{E}^0$ определяет скалярное произведение

$$\mathcal{E}^I \cdot \mathcal{E}^K = {}_lC^{IK}{}_0 \cdot \mathcal{E}^0$$

и обратный метрический тензор $g^{IK} = {}_lC^{IK}{}_0$. Заметим также, что $C^{0K}{}_I = C^{K0}{}_I = \delta^K{}_I$.

Из условия ассоциативности умножения в левой ковариантной алгебре Клиффорда $\mathbb{X_L}^*$ следует регулярное (присоединенное) представление базисных векторов $\mathcal{E}^I$:

$$\mathcal{E}^I \sim {}_lC^{IL}{}_M \,.$$

При этом вектору $\mathbf{x}^*$ соответствует матрица

$$\mathbf{x}^* \sim x^L{}_M = x_I \cdot {}_lC^{IL}{}_M \,.$$

Связь между левыми структурными постоянными алгебры пространства-времени антилептона $\mathbb{X_L}^*$ и правыми структурными постоянными алгебры пространства-времени лептона $\mathbb{X_L}$ осуществляется с помощью операции сопряжения:

$$_lC^{RQ}{}_P = \left({}_rC^L{}_{KI}\right)^* = \left(g^{RI} \cdot g^{QK} \cdot {}_rC^L{}_{KI} \cdot g_{LP}\right)^t . \quad (6)$$

Обратный метрический тензор g^{IK} связан с метрическим тензором условием:

$$g^{IK} \cdot g_{KL} = \delta^I{}_L \,.$$

Измерение вектора $\mathbf{x}$ базисными векторами $\mathcal{E}^I$ дает в результате координаты вектора x^I

$$\mathcal{E}^I \cdot \mathbf{x} = x^I \,.$$

Сопряженные базисные векторы $\mathcal{E}^I$ связаны с базисными векторами ε_K операцией сопряжения

$$\mathcal{E}^I = \varepsilon_K \cdot g^{IK} \,.$$

Вектору $\mathbf{x} = \varepsilon_I \, x^I$ соответствует сопряженный вектор

$$\mathbf{x}^* = x_I \cdot \mathcal{E}^I = \left(\varepsilon_I \cdot x^I\right)^* \,,$$

где $x_I = \delta_{IK}\, x^K$ есть координаты сопряженного вектора. Скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на сопряженный ему вектор $\mathbf{x}^*$ равно

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^* = \delta_{KI} \cdot x^I \cdot x^K \,.$$

Эта квадратичная форма является положительно определенной.

Таким образом, пространство-время СТО для лептонов и антилептонов обобщаются соответственно алгебрами Клиффорда $\mathbb{X_L}$ и $\mathbb{X_L}^*$.

IV. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КООРДИНАТ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА

Вектор (3) в пространстве-времени лептона $\mathbb{X_L}$ и его координаты рассматривались как безразмерные величины. Здесь обратимся к размерностям векторов и их координат.

- x^i – координаты вектора-отрезка

  $$\varepsilon_i \, x^i$$

  в 4-х мерном пространстве СТО. Размерностью координат x^i является длина

  $$[x^i] = \text{м}\,.$$

  Координаты x^i включают в себя

  - ◇ x^a – координаты геометрического вектора-отрезка[9]

    $$\varepsilon_a \, x^a \,,$$

  - ◇ $x^4 = c \cdot t$ – координату вектора времени

    $$\varepsilon_4 \, x^4 \,.$$

- x^{ij} – координаты вектора-площади

  $$\varepsilon_{ij} \, x^{ij}$$

  в пространстве СТО. Здесь полагается, что координаты x^{ij} подобны произведению $x^i \cdot x^j$, то есть размерностью координат x^{ij} является квадрат длины

  $$[x^{ij}] = \text{м}^2 \,.$$

  Координаты x^{ij} включают в себя

  - ◇ x^{ab} – координаты вектора-площади в геометрическом пространстве

    $$\varepsilon_{ab} \, x^{ab} \,,$$

  - ◇ x^{a4} – координаты вектора-площади в плоскости $(\varepsilon_a, \varepsilon_4)$

    $$\varepsilon_{a4} \, x^{a4} \,.$$

- x^{ijk} – координаты вектора-объема

  $$\varepsilon_{ijk} \, x^{ijk}$$

  в пространстве СТО. Здесь полагается, что координаты x^{ijk} подобны произведению $x^i \cdot x^j \cdot x^k$, то есть размерностью координат x^{ijk} является длина в третьей степени

  $$[x^{ijk}] = \text{м}^3 \,.$$

  Координаты x^{ijk} включают в себя

---

[9] Напомним, что индексы a, b, c принимают значения 1,2,3 в отличие от индексов i, j, k, которые принимают значения 1,2,3,4.

- ◇ x^{abc} – координаты вектора-объема в геометрическом пространстве

$$\varepsilon_{abc}\, x^{abc}\,,$$

- ◇ x^{ab4} – координаты вектора-площади в плоскости $(\varepsilon_{ab}, \varepsilon_4)$

$$\varepsilon_{ab4}\, x^{ab4}\,.$$

- x^{1324} – координаты вектора-4-мерного объема

$$\varepsilon_{1324}\, x^{1324}$$

в 4-мерном пространстве СТО. Здесь полагается, что координаты x^{1324} подобны произведению $x^1 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot x^4$, то есть размерностью координат x^{1324} является длина в четвертой степени

$$[x^{1324}] = \text{м}^4\,.$$

- x^0 – координаты вектора-длины

$$\varepsilon_0\, x^0\,.$$

В представленном виде координаты слагаемых векторов имеют разные размерности. Координаты x^0 безразмерны, координаты x^i имеют размерность длины, координаты x^{ij} имеют размерность квадрата длины и координаты x^{ijk} и x^{1324} соответственно третьей и четвертой степени длины. Использование векторов с координатами разных размерностей неудобно, особенно при выполнении умножений. Поэтому целесообразно использование векторов либо с безразмерными координатами, либо с координатами одной размерности, например длины. Тогда сами векторы в первом случае будут безразмернвми величинами, а во втором случае будут иметь принятую размерность, например длину.

Для того, чтобы вектор и его компоненты были безразмерными, введем коэффициенты

$$L_0\,, S\,, V\,, W\,,$$

имеющие размерности соответственно длины, квадрата, куба и четвертой степени длины. Используя их, запишем вектор и его компоненты в безразмерном виде

$$\mathbf{x} = \varepsilon_0\, x^0 + \varepsilon_i\, \frac{x^i}{L_0} + \varepsilon_{ij}\, \frac{x^{ij}}{S} + \varepsilon_{ijk}\, \frac{x^{ijk}}{V} + \varepsilon_{1324}\, \frac{x^{1324}}{W}\,. \quad (7)$$

К вектору и его компонентам одной размерности, например длины, можно перейти, используя (7), путем умножения обеих частей равенства (7) на соответствующий коэффициент, например коэффициент L_0[10],

$$\mathbf{x}' = \varepsilon_0\, x'^0 + \varepsilon_i\, x^i + \varepsilon_{ij}\, L_0\, \frac{x^{ij}}{S} + \varepsilon_{ijk}\, L_0\, \frac{x^{ijk}}{V} + \varepsilon_{1324}\, L_0\, \frac{x^{1324}}{W}\,. \quad (8)$$

[10] Здесь введено обозначение $\mathbf{x}' = L_0 \cdot \mathbf{x}$ и $x'^0 = L_0 \cdot x^0$.

Последнюю точку зрения следует считать предпочтительной. Во всяком случае, опыт СТО, в которой время приведено к пространственной координате путем умножения на постоянную скорость c, демонстрирует удобство такой точки зрения.

Указанные в этих формулах коэффициенты

$$L_0\,, S\,, V\,, W$$

по нашему замыслу должны выражаться через физические константы. Вопрос о том, какие значения принимают эти величины, пока оставим открытым. Предварительно будем полагать[11]

$$\frac{L_0}{2\cdot\pi} = R = \frac{\hbar}{m\, c}\ -$$

"радиус" лептона.

В безразмерном выражении (7) вектор образующего пространства СТО имеет вид

$$\mathbf{x} = \varepsilon_a\, \frac{x^a}{L_0} + \varepsilon_4\, \frac{c\, t}{L_0}\,.$$

Последнее слагаемое позволяет ввести еще одну постоянную величину

$$T = \frac{L_0}{c}\,,$$

имеющую размерность времени.

1. Координаты размерности длины

Перепишем (8) и введем обозначения для координат, имеющих размерность длины

$$\mathbf{x}' = \varepsilon_0\, x'^0 + \varepsilon_i\, x'^i + \varepsilon_{ij}\, x'^{ij} + \varepsilon_{ijk}\, x'^{ijk} + \varepsilon_{1324}\, x'^{1324}\,. \quad (9)$$

Здесь

$$x'^0 = L_0 \cdot x^0\,, \quad x'^i = x^i\,,$$
$$x'^{ij} = L_0\, \frac{x^{ij}}{S}\,, \quad x'^{ijk} = L_0\, \frac{x^{ijk}}{V}\,, \quad x'^{1324} = L_0\, \frac{x^{1324}}{W}\,.$$

Далее выразим координаты x'^{ij}, x'^{ijk}, x'^{1324} через соответствующие углы и скорости. В таком виде эти координаты более понятны и удобны для работы с ними.

x^{ab}

– координаты площади в плоскости $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$. Площадь x^{ab} можно представить как площадь кругового сектора, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$r^2 = (x^a)^2 + (x^b)^2\,.$$

[11] Здесь в соответствии с формулой Комптона m – это масса лептона.

В результате имеем

$$x^{ab} = \frac{1}{2}\,r^2\,\varphi^{ab}\,,$$

где φ^{ab}–угол в рассматриваемой плоскости.

За единичную площадь примем

$$S = \pi \cdot R^2\,, \quad \text{где} \quad R = \frac{L_0}{2\cdot\pi}\,.$$

Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{x^{ab}}{S} = \frac{r^2\,\varphi^{ab}}{2\cdot\pi\cdot R^2}\,.$$

Вблизи радиуса $r \approx R$ имеем

$$\frac{x^{ab}}{S} = \frac{\varphi^{ab}}{2\cdot\pi}$$

и для дифференциалов координат

$$\frac{dx^{ab}}{S} = \frac{d\varphi^{ab}}{2\cdot\pi}\,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx'^{ab} = L_0\,\frac{dx^{ab}}{S} = R\,d\varphi^{ab}\,.$$

x^{a4}

– координаты площади в плоскости $(\varepsilon_a, \varepsilon_4)$. Площадь x^{a4} будем рассматривать как площадь гиперболического сектора, ограниченного гиперболой, определяемой уравнением

$$-s^2 = (x^a)^2 - (x^4)^2\,.$$

В результате имеем

$$x^{a4} = \frac{1}{2}\,s^2\,\psi^{a4}\,,$$

где ψ^{a4} – угол гиперболического сектора, и для дифференциала координат

$$dx^{a4} = \frac{1}{2}\,s^2\,d\psi^{a4}\,. \qquad (10)$$

Из СТО известно, что гиперболический угол ψ^{a4} связан со скоростью движения[12]. Действительно,

$$\frac{v^a}{c} = \frac{x^a}{x^4} = \frac{\sinh\psi^{a4}}{\cosh\psi^{a4}} = \tanh\psi^{a4}\,.$$

Отсюда для дифференциала $\frac{dv^a}{c}$

$$\frac{dv^a}{c} = \frac{d\psi^{a4}}{\cosh^2\psi^{a4}} = (1-\tanh^2\psi^{a4})\,d\psi^{a4}\,.$$

Выразим отсюда $d\psi^{a4}$

$$d\psi^{a4} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2-(x^a)^2}\,\frac{dv^a}{c}\,.$$

Подставляя это выражение в (8), получим

$$dx^{a4} = \frac{(x^4)^2}{2}\,\frac{dv^a}{c}\,.$$

За единичную площадь примем $S = \frac{1}{2}\,(L_0)^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{a4}}{S} = \frac{(x^4)^2}{(L_0)^2}\,\frac{dv^a}{c}\,.$$

Вблизи L_0 имеем $x^4 \approx L_0$ и

$$\frac{dx^{a4}}{S} = \frac{dv^a}{c}\,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx'^{a4} = L_0\cdot\frac{dx^{a4}}{S} = \frac{L_0\,dv^a}{c} = T\,dv^a\,.$$

x^{abc}

– координаты объема в геометрическом пространстве $(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c)$. Объем x^{abc} можно представить как объем шарового сектора, ограниченного сферой, определяемой уравнением

$$r^2 = (x^a)^2 + (x^b)^2 + (x^c)^2\,.$$

В результате имеем

$$x^{abc} = \frac{1}{3}\,r^3\,\varphi^{123}\,,$$

где φ^{123} – телесный угол в рассматриваемом пространстве.

За единичный объем примем $V = \frac{2\cdot\pi}{3}\,R^3$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{x^{abc}}{V} = \frac{r^3\,\varphi^{123}}{2\cdot\pi\cdot R^3}\,.$$

Вблизи радиуса $r \approx R$ имеем

$$\frac{x^{abc}}{V} = \frac{\varphi^{123}}{2\cdot\pi}$$

и для дифференциалов координат соответственно

$$\frac{dx^{abc}}{V} = \frac{d\varphi^{123}}{2\cdot\pi}\,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx'^{abc} = L_0\cdot\frac{dx^{abc}}{V} = R\,d\varphi^{123}\,.$$

x^{ab4}

[12] См. Глава 1.1 формула (21)

– координаты объема в трехмерном пространстве $(\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_4)$. Объем x^{ab4} можно рассматривать как объем сектора, ограниченного поверхностью, определяемой уравнением

$$-r^2 = (x^a)^2 + (x^b)^2 - (x^4)^2 \,.$$

Однако здесь поступим иначе. Будем рассматривать объем x^{ab4} как площадь кругового сектора в плоскости $(\varepsilon_{ab}, \varepsilon_4)$, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$-r^2 = -(x^{ab})^2 - (x^4)^2 \,.$$

Входящие в это уравнение координаты имеют размерность длины, то есть,

$$x^{ab} = R\,\varphi^{ab} \,, \qquad x^4 = c\,t \,.$$

В результате имеем

$$x^{ab4} = \frac{1}{2}\, r^2\, \varphi^{ab4} \,,$$

где φ^{ab4} – угол кругового сектора в указанной плоскости, и для дифференциала координат

$$dx^{ab4} = \frac{1}{2}\, r^2\, d\varphi^{ab4} \,. \tag{11}$$

Покажем, что круговой угол φ^{ab4} связан с угловой скоростью вращения. Действительно,

$$\tan\varphi^{ab4} = \frac{x^{ab}}{x^4} = \frac{R}{c}\,\frac{\varphi^{ab}}{t} \,.$$

Здесь

$$\frac{x^{ab}}{x^4} = \omega^{ab4}$$

есть угловая скорость в относительных единицах. Далее учтем, что величина

$$\frac{\varphi^{ab}}{t} = \omega^{ab}$$

представляет собой угловую скорость вращения в плоскости $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$ и, кроме того, введем постоянную величину

$$\Omega = \frac{c}{R} = \frac{2\cdot\pi}{T} \,,$$

имеющую размерность угловой скорости. В результате получим

$$\omega^{ab4} = \tan\varphi^{ab4} = \frac{\omega^{ab}}{\Omega} \,.$$

Отсюда для дифференциала $d\omega^{ab4}$

$$d\omega^{ab4} = \frac{d\varphi^{ab4}}{\cos^2\varphi^{ab4}} = (1+\tan^2\varphi^{ab4})\, d\varphi^{ab4} \,.$$

Выразим отсюда $d\varphi^{ab4}$

$$d\varphi^{ab4} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2 + (x^{ab})^2}\, d\omega^{ab4} \,.$$

Подставляя это выражение в (11), получим

$$dx^{ab4} = \frac{(x^4)^2}{2}\, d\omega^{ab4} \,.$$

За единичную площадь примем $S = \pi\cdot(L_0)^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{ab4}}{S} = \frac{(x^4)^2}{2\cdot\pi\cdot(L_0)^2}\, d\omega^{ab4} \,.$$

Вблизи L_0 имеем $x^4 \approx L_0$ и

$$\frac{dx^{ab4}}{S} = \frac{d\omega^{ab4}}{2\cdot\pi} = \frac{d\omega^{ab}}{2\cdot\pi\cdot\Omega} \,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx'^{ab4} = \frac{L_0\, d\omega^{ab}}{2\cdot\pi\cdot\Omega} = \frac{R\cdot d\omega^{ab}}{\Omega} \,.$$

x^{1324}

– координаты вектора-4-х мерного объема в 4-х мерном пространстве СТО. Вместе с тем x^{1324} можно рассматривать как координаты площади кругового сектора в плоскости $(\varepsilon_{132}, \varepsilon_4)$, ограниченного окружностью, определяемой уравнением

$$-r^2 = -(x^{132})^2 - (x^4)^2 \,.$$

Здесь надо полагать, что входящие в это уравнение координаты имеют размерность длины, то есть,

$$x^{132} = R\, d\varphi^{123} \,, \qquad x^4 = c\,t \,.$$

В результате имеем

$$x^{1324} = \frac{1}{2}\, r^2\, \varphi^{1324} \,,$$

где φ^{1324} – угол кругового сектора в указанной плоскости, и для дифференциала координат

$$dx^{1324} = \frac{1}{2}\, r^2\, d\varphi^{1324} \,. \tag{12}$$

Покажем, что круговой угол φ^{1324} связан с телесной скоростью[13] вращения. Действительно,

$$\tan\varphi^{1324} = \frac{x^{132}}{x^4} = \frac{R}{c}\,\frac{\varphi^{132}}{t} \,.$$

Здесь

$$\frac{x^{132}}{x^4} = \omega^{1324}$$

[13] Скоростью изменения телесного угла

есть телесная скорость в относительных единицах. Далее учтем, что величина

$$\frac{\varphi^{132}}{t} = \omega^{132}$$

представляет собой телесную скорость вращения в геометрическом пространстве и, кроме того, введем постоянную величину

$$\Omega = \frac{c}{R} = \frac{2 \cdot \pi}{T}\,,$$

имеющую размерность телесной угловой скорости, например стерадиан/сек. В результате получим

$$\omega^{1324} = \tan \varphi^{1324} = \frac{\omega^{132}}{\Omega}\,.$$

Отсюда для дифференциала $d\omega^{1324}$

$$d\omega^{1324} = \frac{d\varphi^{1324}}{\cos^2 \varphi^{1324}} = (1 + \tan^2 \varphi^{1324})\, d\varphi^{1324}\,.$$

Выразим отсюда $d\varphi^{1324}$

$$d\varphi^{1324} = \frac{(x^4)^2}{(x^4)^2 + (x^{132})^2}\, d\omega^{1324}\,.$$

Подставляя это выражение в (12), получим

$$dx^{1324} = \frac{(x^4)^2}{2}\, d\omega^{1324}\,.$$

За единичную площадь примем $S = 2 \cdot \pi \cdot (L_0)^2$. Тогда для координат в относительных единицах получим

$$\frac{dx^{1324}}{S} = \frac{(x^4)^2}{4 \cdot \pi \cdot (L_0)^2}\, d\omega^{1324}\,.$$

Вблизи L_0 будем иметь $x^4 \approx L_0$ и

$$\frac{dx^{1324}}{S} = \frac{d\omega^{1324}}{4 \cdot \pi} = \frac{d\omega^{132}}{4 \cdot \pi \cdot \Omega}\,.$$

Для координат размерности длины имеем

$$dx'^{1324} = \frac{L_0\, d\omega^{132}}{4 \cdot \pi \cdot \Omega} = \frac{R \cdot d\omega^{132}}{2 \cdot \Omega}\,.$$

Здесь

$$2 \cdot \Omega = \frac{4 \cdot \pi}{T} = \Omega_T\,,$$

где $4 \cdot \pi$ – это полный телесный угол, а Ω_T – *постоянная телесной угловой скорости*, она имеет размерность стерадиан/сек.

В результате для координат размерности длины имеем

$$dx'^{1324} = \frac{R \cdot d\omega^{132}}{\Omega_T}\,.$$

x^0

– координаты вектора длины. Этот вектор наиболее загадочен для объяснения. Для выяснения его смысла рассмотрим частный вектор алгебры Клиффорда[14]

$$\mathbf{x} = \varepsilon_0\, x^0 + \varepsilon_a\, x^a + \varepsilon_4\, x^4$$

и вычислим скалярное произведение этого вектора на себя

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (x^0)^2 + (x^a)^2 - c^2\, t^2\,.$$

Если допустить, что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, то получим соотношение

$$(x^0)^2 + (x^a)^2 - c^2\, t^2 = 0\,.$$

Из сравнения его с соотношением (1), известным из СТО, получим, что координата x^0 эквивалентна *интервалу*, вводимому в СТО. На основании изложенного далее будем полагать

- рассматриваемые нами векторы алгебры Клиффорда имеют нулевую длину;
- координата x^0 есть интервал, обобщающий интервал, вводимый в СТО.

Рассчитываем, что при такой интерпретации координаты x^0 мы не встретимся с какими-либо противоречиями.

Приведенные соображения позволяют записать дифференциал вектора пространства-времени лептона в следующем виде

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\, dx^0 + \varepsilon_a\, dx^a + \varepsilon_4\, dx^4 + \varepsilon_{ab}\, R\, d\varphi^{ab} +$$
$$+\varepsilon_{a4}\, T\, dv^a + \varepsilon_{123}\, R\, d\varphi^{123} + \varepsilon_{ab4}\, \frac{R\, d\omega^{ab}}{\Omega} + \varepsilon_{1324}\, \frac{d\omega^{132}}{\Omega_T}.$$

Для квадрата длины этого вектора имеем

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (dx^0)^2 + (dx^a)^2 - c^2\, dt^2 - R^2 (d\varphi^{ab})^2 + T^2 (dv^a)^2$$
$$-R^2\, (d\varphi^{123})^2 + \frac{R^2\, (d\omega^{ab})^2}{\Omega^2} - \frac{R^2\, (d\omega^{132})^2}{(\Omega_T)^2} = 0\,.$$

Отсюда

$$(dx^0)^2 = -(dx^a)^2 + c^2\, dt^2 + R^2\, (d\varphi^{ab})^2 - T^2\, (dv^a)^2 +$$
$$+R^2\, (d\varphi^{123})^2 - \frac{R^2\, (d\omega^{ab})^2}{\Omega^2} + \frac{R^2\, (d\omega^{132})^2}{(\Omega_T)^2} = 0\,.$$

Это соотношение обобщает интервал, который вводится в СТО.

Из предыдущих формул видно, что параметр R – "радиус" лептона – является ключевым и при $R \to 0$ (соответственно $T \to 0$, $\Omega \to \infty$ и $\Omega_T \to \infty$), то есть по мере удаления от лептона, пространство-время лептона переходит в пространство-время СТО.

[14] Такой вектор рассматривался в Главе 1.1. Раздел IV.5.

V. СОБСТВЕННЫЙ ИМПУЛЬС ЛЕПТОНА

Действие лептона S является функцией указанных выше координат. Производные от действия по координатам пространства-времени определяют компоненты собственного импульса лептона.

Компоненты собственного импульса лептона таковы:

- 4-мерный импульс

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}\,.$$

В том числе

◇ 3-мерный импульс

$$p_a = -\frac{\partial S}{\partial x^a}\,,$$

◇ энергия

$$p_4 = -\frac{\partial S}{\partial x^4} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{E}{c}\,.$$

- 4-мерный угловой момент импульса

$$p_{ij} = -\frac{\partial S}{\partial x^{ij}}\,.$$

В том числе

◇ 3-мерный угловой момент импульса, или спин,

$$p_{ab} = -\frac{\partial S}{\partial x^{ab}} = -\frac{1}{R}\,\frac{\partial S}{\partial \varphi^{ab}} = \frac{M_{ab}}{R}\,,$$

◇ 3-мерная сила

$$p_{a4} = -\frac{\partial S}{\partial x^{a4}} = -\frac{1}{T}\,\frac{\partial S}{\partial v^a} = T\,f_a\,.$$

- 4-мерный телесный момент импульса

$$p_{ijk} = -\frac{\partial S}{\partial x^{ijk}}\,,$$

в том числе

◇ 3-мерный телесный момент импульса

$$p_{123} = -\frac{\partial S}{\partial x^{123}} = -\frac{1}{R}\,\frac{\partial S}{\partial \varphi^{123}} = \frac{M_{123}}{R}\,,$$

◇ 3-мерный угловой момент силы

$$p_{ab4} = -\frac{\partial S}{\partial x^{ab4}} = -\frac{\Omega}{L_0}\,\frac{\partial S}{\partial \omega^{ab}} = \frac{F_{ab}}{c}\,.$$

- Телесный момент силы

$$p_{1324} = -\frac{\partial S}{\partial x^{1324}} = -\frac{\Omega_T}{L_0}\,\frac{\partial S}{\partial \omega^{132}} = \frac{F_{132}}{c}\,.$$

- Импульс покоя

$$p_0 = -\frac{\partial S}{\partial x^0}\,.$$

Так как мы отождествили x^0 с интервалом, вводимым в СТО, то

$$p_0 = -\frac{\partial S}{\partial x^0} = m\,c\,.$$

Рассмотренные компоненты импульса участвуют в формировании вектора импульса

$$\mathbf{p} = -\frac{\partial S}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I = p_I \mathcal{E}^I\,.$$

Для квадрата длины этого вектора имеем соотношение, обобщающее связь между импульсом и энергией в СТО:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = (m\,c)^2 + (p_a)^2 - \frac{E^2}{c^2} - \frac{(M_{ab})^2}{R^2} + T^2\,(f_a)^2 - \\ - \frac{(M_{123})^2}{R^2} + \frac{(F_{ab})^2}{c^2} - \frac{(F_{132})^2}{c^2} = 0\,. \tag{13}$$

VI. ОПЕРАТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КАК ВЕКТОРЫ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Введем символический вектор

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I\,,$$

в котором операторы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x^I}$$

служат своеобразными координатами. Этот вектор обобщает известный оператор ∇ – набла, вводимый в теории векторного поля. Множество указанных векторов будем рассматривать как алгебру Клиффорда, которую обозначим $\mathbb{D}_x$.

Скалярное произведение вектора $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{D}_x$ и вектора $d\mathbf{x} \in \mathbb{X}_L$ дает инвариантный оператор – дифференциал:

$$d(\,) = \frac{\partial}{\partial x^I}\,\left(\mathcal{E}^I\cdot\varepsilon_K\right)\,dx^K = \frac{\partial}{\partial x^I}\,dx^I\,.$$

Скалярное произведение вектора $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbb{D}_x$ на себя дает обобщенный оператор Даламбера:

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^K}\,\mathcal{E}^K\right) = \mathrm{g}^{IK}\,\frac{\partial^2}{\partial x^I\,\partial x^K}\,.$$

В соответствии с регулярным представлением имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I \sim \frac{\partial}{\partial x^I}\,{}_I C^{IK}{}_L\,. \tag{14}$$

Операторы дифференцирования можно характеризовать двояким образом. Первая характеристика связана с движением, которое операторы дифференцирования представляют. При этом дифференциал

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_K \cdot dx^K$$

есть обобщенный сдвиг в пространстве-времени лептона, а оператор

$$\frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I$$

есть оператор этого сдвига или более подробно – оператор движения, описываемого этим сдвигом. С этой точки зрения имеем следующие компоненты оператора дифференцирования.

- Оператор сдвига в пространстве-времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^i}$.
  - ◇ Оператор сдвига в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^a}$.
  - ◇ Оператор сдвига во времени $\frac{\partial}{\partial x^4}$.
- Оператор поворотов в 4-мерном пространстве-времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^{ij}}$.
  - ◇ Оператор поворотов в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^{ab}}$.
  - ◇ Оператор ускоренного поступательного движения $\frac{\partial}{\partial x^{a4}}$.
- Оператор телесных поворотов в 4-мерном пространстве-времени СТО $\frac{\partial}{\partial x^{ijk}}$.
  - ◇ Оператор телесных поворотов в геометрическом пространстве $\frac{\partial}{\partial x^{ab}}$.
  - ◇ Оператор ускоренного вращения $\frac{\partial}{\partial x^{ab4}}$.
- Оператор ускоренного телесного вращения $\frac{\partial}{\partial x^{1324}}$.
- Оператор растяжения – сжатия (дилатаций) $\frac{\partial}{\partial x^0}$.

Операторы дифференцирования можно характеризовать иначе, так, как это делается в квантовой механике. Из соответствия, вытекающего из регулярного представления базисных векторов, следует

$$\frac{\partial}{\partial x^I}\ {}_\iota C^{IK}{}_L \sim (p^0)_I = -\frac{\partial S^0}{\partial x^I}\,.$$

Здесь по повторяющемуся индексу I суммирование не предполагается. Указанное соответствие позволяет характеризовать операторы дифференцирования по соответствующему импульсу. Вслед за классиками квантовой механики будем обозначать оператор дифференцирования символом импульса с верхней "крышечкой":

$$\hat{p}_I = \frac{\partial}{\partial x^I}\ {}_\iota C^{IK}{}_L$$

и называть его оператором импульса $(p^0)_I$ [15].

Например, операторы

$$\hat{p}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}\ {}_\iota C^{1K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}\ {}_\iota C^{2K}{}_L\,,$$

$$\hat{p}_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}\ {}_\iota C^{3K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_4 = \frac{\partial}{\partial x^4}\ {}_\iota C^{4K}{}_L$$

есть соответственно операторы импульсов p_1, p_2, p_3 и энергии $p_4 = \frac{E}{c}$. Для структурных матриц в первом сжатом представлении – это операторы Дирака[16]

$$i\begin{array}{|c|c|}\hline & -\sigma^a \\ \hline \sigma^a & \\ \hline\end{array}\ \partial_a\,, \qquad -i\begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\ \partial_4$$

Для второго сжатого представления – это операторы Паули

$$\hat{p}_1 = -i\,\sigma^1\,\frac{\partial}{\partial x^1}\,, \qquad \hat{p}_2 = -i\,\sigma^2\,\frac{\partial}{\partial x^2}\,,$$

$$\hat{p}_3 = -i\,\sigma^3\,\frac{\partial}{\partial x^3}\,, \qquad \hat{p}_4 = -i\,\frac{\partial}{\partial x^4}\,.$$

И, наконец, для третьего сжатого представления – это операторы Шредингера

$$\hat{p}_1 = -i\,\frac{\partial}{\partial x^1}\,,\ \hat{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}\,,\ \hat{p}_3 = -i\,\frac{\partial}{\partial x^3}\,,\ \hat{p}_4 = -i\,\frac{\partial}{\partial x^4}\,.$$

Интересно отметить, что при точном вычислении оператор $\hat{p}_2$ не есть $-i\,\frac{\partial}{\partial x^2}$, как предполагал Шредингер.

Таким образом, "необычные" квантовомеханические операторы есть "обычные" операторы дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x^I}\,\mathcal{E}^I\,,$$

но записанные в регулярном (присоединенном) представлении алгебры Клиффорда.

Точно так же имеем

- операторы момента импульса

$$\hat{p}_{21} = \frac{\partial}{\partial x^{21}}\ {}_\iota C^{21K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_{13} = \frac{\partial}{\partial x^{13}}\ {}_\iota C^{13K}{}_L\,,$$

$$\hat{p}_{32} = \frac{\partial}{\partial x^{32}}\ {}_\iota C^{32K}{}_L\,,$$

- операторы силы

$$\hat{p}_{14} = \frac{\partial}{\partial x^{14}}\ {}_\iota C^{14K}{}_L\,, \qquad \hat{p}_{24} = \frac{\partial}{\partial x^{24}}\ {}_\iota C^{24K}{}_L\,,$$

$$\hat{p}_{34} = \frac{\partial}{\partial x^{34}}\ {}_\iota C^{34K}{}_L\,,$$

[15] Здесь также по повторяющемуся индексу I суммирование не предполагается.

[16] См. Глава 4.3. Раздел IV.

- оператор телесного момента импульса

$$\hat{p}_{123} = \frac{\partial}{\partial x^{123}}\ {}_{\iota}C^{123K}{}_{L}\,,$$

- операторы момента силы

$$\hat{p}_{124} = \frac{\partial}{\partial x^{124}}\ {}_{\iota}C^{124K}{}_{L}\,, \qquad \hat{p}_{134} = \frac{\partial}{\partial x^{134}}\ {}_{\iota}C^{134K}{}_{L}\,,$$

$$\hat{p}_{234} = \frac{\partial}{\partial x^{234}}\ {}_{\iota}C^{234K}{}_{L}\,,$$

- оператор телесного момента силы

$$\hat{p}_{1324} = \frac{\partial}{\partial x^{1324}}\ {}_{\iota}C^{1324K}{}_{L}\,,$$

- оператор дилатации

$$\hat{p}_{0} = \frac{\partial}{\partial x^{0}}\ C^{0K}{}_{L}\,.$$

1. Подалгебры алгебры Клиффорда и операторы независимых движений

В предыдущем Разделе векторы пространства-времени и операторы дифференцирования были охарактеризованы движением, которое они представляют. В том случае, когда решаются частные задачи, связанные с подгруппами движений, целесообразно установить связь между подалгебрами алгебры Клиффорда и подгруппами движений.

Сначала полезно выделить подалгебры, в которые не входит вектор времени $\varepsilon_4\, dx^4$. Такие подалгебры назовем *статическими*. Напротив, подалгебры, в которые указанный вектор входит, назовем *динамическим*.

Примеры статических подалгебр.

- Подалгебра поворотов в геометрическом пространстве. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором – кватернионом

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\, dx^0 + \varepsilon_{21}\, dx^{21} + \varepsilon_{13}\, dx^{13} + \varepsilon_{32}\, dx^{32}\,.$$

Структурными матрицами этой подалгебры в комплексном представлении являются единичная матрица и три матрицы Паули, умноженные на мнимую единицу. Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,\mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^{21}}\,\mathcal{E}^{21} + \frac{\partial}{\partial x^{13}}\,\mathcal{E}^{13} + \frac{\partial}{\partial x^{32}}\,\mathcal{E}^{32}\,,$$

а квантовомеханические операторы в этом случае таковы:

$$\hat{p}_{0} = \frac{\partial}{\partial x^{0}}\ C^{0K}{}_{L}\,, \qquad \hat{p}_{ab} = \frac{1}{R}\,\hat{M}_{ab}\,,$$

где

$$\hat{M}_{ab} = \frac{\partial}{\partial \varphi^{ab}}\ {}_{\iota}C^{abK}{}_{L}$$

есть операторы момента импульса, или спина. Алгебра указанных операторов есть алгебра 3-мерного спина.

- Подалгебра поворотов в пространстве-времени СТО. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\, dx^0 + \varepsilon_{ab}\, dx^{ab} + \varepsilon_{a4}\, dx^{a4} + \varepsilon_{1324}\, dx^{1324}\,.$$

Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,\mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^{ab}}\,\mathcal{E}^{ab} + \frac{\partial}{\partial x^{a4}}\,\mathcal{E}^{a4} + \frac{\partial}{\partial x^{1324}}\,\mathcal{E}^{132}\,.$$

Квантовомеханические операторы в этом случае таковы:

$$\hat{p}_{0} = \frac{\partial}{\partial x^{0}}\ C^{0K}{}_{L}\,, \quad \hat{p}_{ab} = \frac{1}{R}\,\hat{M}_{ab}\,,$$

$$\hat{p}_{a4} = T\,\hat{f}_{a4}\,, \quad \hat{p}_{1324} = \frac{1}{c}\,\hat{F}_{1324}\,,$$

где помимо операторов момента импульса, или спина, фигурируют оператор силы:

$$\hat{f}_{a4} = \frac{1}{T^2}\,\frac{\partial}{\partial v^{a}}\ {}_{\iota}C^{a4K}{}_{L}$$

и оператор телесного момента силы:

$$\hat{F}_{1324} = \frac{1}{T^2}\,\frac{\partial}{\partial \omega^{1324}}\ {}_{\iota}C^{1324K}{}_{L}\,.$$

Алгебра указанных операторов есть алгебра релятивистского спина.

- Подалгебра сдвигов, поворотов и телесного поворота в геометрическом пространстве. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\, dx^0 + \varepsilon_{a}\, dx^{a} + \varepsilon_{ab}\, dx^{ab} + \varepsilon_{123}\, dx^{123}\,.$$

Структурными матрицами этой подалгебры в комплексном представлении являются восемь матриц Дирака. Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,\mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^{a}}\,\mathcal{E}^{a} + \frac{\partial}{\partial x^{ab}}\,\mathcal{E}^{ab} + \frac{\partial}{\partial x^{123}}\,\mathcal{E}^{123}\,.$$

Квантовомеханические операторы в этом случае таковы:

$$\hat{p}_{0} = \frac{\partial}{\partial x^{0}}\ C^{0K}{}_{L}\,, \qquad \hat{p}_{a}\,,$$

$$\hat{p}_{ab} = \frac{1}{R}\,\hat{M}_{ab}\,, \quad \hat{p}_{123} = \frac{1}{R}\,\hat{M}_{123}\,,$$

где помимо операторов импульса и спина фигурирует оператор телесного момента импульса

$$\hat{M}_{123} = \frac{\partial}{\partial\varphi^{123}}\ {}_{l}C^{123K}{}_{L}\,.$$

Примеры динамических подалгебр.

- Подалгебра телесных ускоренных вращений. В этом случае пространство-время частицы характеризуется вектором

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\,dx^0 + \varepsilon_4\,dx^4 + \varepsilon_{123}\,dx^{123} + \varepsilon_{1324}\,dx^{1324}\,.$$

Оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^4}\,\mathcal{E}^4 + \frac{\partial}{\partial x^{123}}\,\mathcal{E}^{123} + \frac{\partial}{\partial x^{1324}}\,\mathcal{E}^{1324}\,.$$

Квантовомеханические операторы в этом случае таковы:

$$\hat{p}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}\,C^{0K}{}_{L}\,, \quad \hat{p}_4 = \frac{1}{c}\,\hat{E}\,,$$

$$\hat{p}_{123} = \frac{1}{R}\,\hat{M}_{123}\,, \quad \hat{p}_{1324} = \frac{1}{c}\,\hat{F}_{1324}\,,$$

где

$$\hat{E} = \frac{\partial}{\partial t}\ {}_{l}C^{4K}{}_{L}$$

есть оператор энергии. Алгебра указанных операторов очень похожа на алгебру слабого изоспина. На этом вопросе остановимся позднее.

- Подалгебра ускоренных поступательных движений. Эта подалгебра рассматривается в следующей Главе.

2. Операторы движения виртуального лептона

Развитое в настоящей Главе представление о пространстве-времени лептона позволяет подойти к описанию виртуальных частиц (в данном случае лептонов) с новой точки зрения.

Виртуальные частицы характеризуются двумя обстоятельствами:

1) для них не выполняется соотношение СТО между импульсом и энергией частицы

$$(m\,c)^2 + (p_a)^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0\,,$$

2) виртуальная частица является носителем силы.

В рассмотренном нами пространстве-времени лептона соотношение СТО между импульсом и энергией не выполняется; точнее, оно обобщается до соотношения (13). Рассмотрим частный случай этого соотношения

$$(m\,c)^2 + (p_a)^2 - \frac{E^2}{c^2} + T^2\,(f_a)^2 = 0\,. \tag{15}$$

Из этого соотношения видно, что оно описывает частицу, являющуюся носителем силы. Таким образом, если это соотношение отнести к виртуальной частице, то оба вышеуказанных обстоятельства будут его следствием. Из формулы (15) следует, что пространство-время виртуальной частицы характеризуется вектором

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\,dx^0 + \varepsilon_a\,dx^a + \varepsilon_4\,dx^4 + \varepsilon_{a4}\,T\,dv^a\,,$$

оператор дифференцирования имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,\mathcal{E}^0 + \frac{\partial}{\partial x^a}\,\mathcal{E}^a + \frac{\partial}{\partial x^4}\,\mathcal{E}^4 + \frac{\partial}{\partial x^{a4}}\,\mathcal{E}^{a4}\,.$$

Квантовомеханический оператор выглядит следующим образом:

$$\hat{p} = \frac{\partial}{\partial x^0}\,C^{0K}{}_{L} + \frac{\partial}{\partial x^a}\ {}_{l}C^{aK}{}_{L} + \frac{\partial}{\partial x^4}\ {}_{l}C^{4K}{}_{L} + \frac{\partial}{\partial x^{a4}}\ {}_{l}C^{a4K}{}_{L}\,. \tag{16}$$

VII. КВАНТОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ЛЕПТОНА

В предыдущей Главе было показано, что квантовые явления объясняются алгебраической структурой векторного пространства. В настоящей Главе мы пришли к необходимости рассматривать пространство-время лептона как алгебру Клиффорда. Таким образом, обобщая пространство-время до алгебры Клиффорда, мы неизбежно приходим к квантованию пространства-времени лептона. Здесь уравнения структуры выступают как квантовые постулаты.

1. Уравнение структуры

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Она проявляется в существовании для алгебр *уравнений структуры*. Далее рассмотрим уравнения структуры для правой алгебры Клиффорда ${}_{r}\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$. Условимся, что векторы имеют размерность длины. Тогда закон умножения векторов в ${}_{r}\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ запишется так:

$${}_{r}\mathbf{x} = \frac{1}{L_0}\cdot\mathbf{x}_1\circ\mathbf{x}_2\,. \tag{17}$$

Здесь L_0 – ранее введенная постоянная величина, согласующая размерности правой и левой частей уравнения, имеющая размерность длины.

Заметим, что при $L_0 \to 0$, то есть вдали от лептона, алгебра Клиффорда сводится к пространству-времени СТО. При этом $\circ$-умножение сводится к умножению вектора на число.

Если воспользоваться законом умножения базисных векторов, то получим правило умножения координат векторов сомножителей:

$$ {}_r x^L = \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^L{}_{KI} \cdot x_1{}^K \cdot x_2{}^I \,. $$

Далее нам понадобится представление об *обратном* векторе $\mathbf{x}^{-1}$, для которого выполняется условие (5). Заметим, что для соответствующих векторов закон умножения выглядит так:

$$ {}_r\mathbf{x}^{-1} = \frac{1}{L_0} \cdot (\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2)^{-1} = \mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1^{-1} \cdot L_0 \,. \qquad (18) $$

Действительно,

$$ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} = \frac{1}{L_0} \cdot \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1^{-1} \cdot L_0 = \varepsilon_0 \,. $$

Как и в предыдущей Главе при дифференцировании закона умножения (17), будем придерживаться следующих обозначений. Обозначим через $d_1\, {}_r\mathbf{x}$ дифференциал вектора ${}_r\mathbf{x}$ в соотношении (17) при изменении вектора $\mathbf{x}_1$, обозначим через $d_2\, {}_r\mathbf{x}$ дифференциал вектора ${}_r\mathbf{x}$ в соотношении (17) при изменении вектора $\mathbf{x}_2$. В соответствии с этим имеем

$$ d_1\, {}_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0}\, d\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 \,, \qquad d_2\, {}_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0}\, \mathbf{x}_1 \circ d\mathbf{x}_2 \,. $$

Из этих выражений получаем

$$ d\mathbf{x}_1 = L_0 \cdot d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ (\mathbf{x}_2)^{-1} \,, \qquad d\mathbf{x}_2 = L_0 \cdot (\mathbf{x}_1)^{-1} \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} \,. \qquad (19) $$

С использованием принятых обозначений рассмотрим второй дифференциал $d_2 d_1 \mathbf{x}$. Из выражения (17) для него имеет место

$$ d_2 d_1\, {}_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0}\, d\mathbf{x}_1 \circ d\mathbf{x}_2 \,. \qquad (20) $$

Используя соотношения (19) и (18), получим

$$ d_2 d_1\, {}_r\mathbf{x} = d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ (\mathbf{x})^{-1} \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} \,. \qquad (21) $$

Вблизи единицы алгебры, то есть при $\mathbf{x} = L_0\, \varepsilon_0$ и $(\mathbf{x})^{-1} = \frac{1}{L_0}\, \varepsilon_0$, уравнение (21) принимает вид

$$ d_2 d_1\, {}_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0}\, d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} \,. \qquad (22) $$

Это соотношение есть *уравнение структуры* алгебры ${}_r\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ в векторной форме.

Подставляя в формулу (22) выражения дифференциалов через дифференциалы координат векторов пространства-времени и пользуясь правым законом умножения базисных векторов

$$ \varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L \cdot {}_r C^L{}_{KI} \,, $$

получим уравнения структуры в координатной форме

$$ d_2 d_1\, {}_r x^L = \frac{1}{L_0}\, {}_r C^L{}_{KI} \cdot d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_r x^I \,. \qquad (23) $$

Предыдущие рассуждения обобщаются на дифференциал n – ой степени

$$ d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 \mathbf{x} \,. $$

Для него уравнения структуры имеют вид

$$ d_n d_{n-1} \dots d_2 d_1 \mathbf{x} = \frac{1}{L^{n-1}}\, d_1\mathbf{x} \circ d_2\mathbf{x} \circ \dots \circ d_{n-1}\mathbf{x} \circ d_n\mathbf{x} \,. $$

2. Квантовые постулаты и волновая функция пространства-времени

В уравнении (22) введем обозначение

$$ \chi = d_1\, {}_r\mathbf{x} $$

и назовем вектор χ *волновой функцией пространства-времени* лептона.

Кроме того, введем обозначение d для дифференциала d_2. Уравнение структуры в новых обозначениях принимает вид

$$ d\chi = \frac{1}{L_0}\, \chi \circ d\mathbf{x} \,. \qquad (24) $$

Это уравнение можно записать для координат волновой функции $\chi^I = d_1\, {}_r x^I$:

$$ d\chi^L = \frac{1}{L_0}\, {}_r C^L{}_{KI} \cdot \chi^K \cdot d\, {}_r x^I \,. \qquad (25) $$

Уравнения (24), (25) имеют вид задачи на собственные значения оператора дифференциала d.

Итак, получен следующий результат: уравнения структуры алгебры ${}_r\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ могут быть представлены как задача на собственные значения оператора дифференциала d, то есть, уравнения структуры, представленные в виде (24) и (25), выступают как квантовые постулаты.

Будем рассматривать пространственно-временные координаты как функции вектора действия. Выразим дифференциал d в виде

$$ d = \frac{\partial}{\partial S^M} \cdot dS^M $$

и введем обобщенные обратные импульсы

$$ (p^{-1})_M = \frac{\partial x}{\partial S^M} = \mathcal{E}_I \cdot \frac{\partial x^I}{\partial S^M} = \mathcal{E}_I \cdot (p^{-1})^I{}_M \,. $$

Тогда задача на собственные значения (25) приобретает вид

$$ \frac{\partial \chi^L}{\partial S^M} = \frac{1}{L_0}\, {}_r C^L{}_{KI} \cdot (p^{-1})^I{}_M \cdot \chi^K \,. \qquad (26) $$

Таким образом, исходя из алгебраической структуры пространства-времени, мы пришли к задаче на собственные значения для пространственно-временных векторов и к явлению, которое представляет собой квантование пространства-времени.

VIII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Вид уравнений Дирака заставляет считать, что лептонам необходимо соотнести свое собственное пространство-время. Оно обобщает пространство-время специальной теории относительности (СТО).

- Собственное пространство-время лептона необходимо рассматривать как алгебру Клиффорда, образующим пространством которой является пространство-время СТО.

- Указанные обобщения связаны с привлечением дополнительных координат в качестве независимых переменных пространства-времени. Помимо x^a – координат вектора-линии и x^4 – координат времени, к ним относятся x^{ab} – координаты вектора-площади (вектора угла), x^{a4} – координаты вектора-скорости, x^{abc} – координаты вектора-объема (вектора телесного угла), x^{ab4} – координаты вектора угловой скорости, x^{abc4} – координаты вектора телесной угловой скорости.

- Дополнительным координатам соответствуют дополнительные компоненты импульса. К ним относятся 3-мерный импульс p_a, энергия $p_4 = E/c$, 3-мерный угловой момент импульса, или спин $p_{ab} = M_{ab}/R$, 3-мерная сила $p_{a4} = T\,f_a$, 3-мерный телесный момент импульса $p_{123} = M_{123}/R$, 3-мерный угловой момент силы $p_{ab4} = F_{ab}/c$, телесный момент силы $p_{1324} = F_{132}/c$, импульс покоя p_0.

- Собственное пространство-время лептона является алгеброй. Отсюда необходимо следует квантование этого пространства-времени. Исходные квантовые постулаты представляют собой уравнения структуры алгебры Клиффорда $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$.

Глава 1.4 Специальная теория относительности в пространстве-времени лептона

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В Главе 1.3. было установлено, что пространство-время лептона есть алгебра Клиффорда, образующим пространством которой является пространство-время специальной теории относительности Эйнштейна (СТО). Приведенные соображения позволяют записать дифференциал вектора пространства-времени лептона в следующем виде:

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\, dx^0 + \varepsilon_a\, dx^a + \varepsilon_4\, dx^4 + \varepsilon_{ab}\, R\, d\varphi^{ab} + \\ + \varepsilon_{a4}\, T\, dv^a + \varepsilon_{123}\, R\, d\varphi^{123} + \varepsilon_{ab4}\, \frac{R\, d\omega^{ab}}{\Omega} + \varepsilon_{1324}\, \frac{R\, d\omega^{132}}{\Omega_T}\,.$$

Для квадрата длины этого вектора получено

$$d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} = (dx^0)^2 + (dx^a)^2 - c^2\, dt^2 - R^2\, (d\varphi^{ab})^2 + \\ + T^2 (dv^a)^2 - R^2 (d\varphi^{123})^2 + \frac{R^2 (d\omega^{ab})^2}{\Omega^2} - \frac{R^2 (d\omega^{132})^2}{(\Omega_T)^2} = 0.$$

Специальной теорией относительности в пространстве-времени лептона будем называть теорию преобразований координат, сохраняющих квадрат интервала $(dx^0)^2$ или выражение

$$-(dx^a)^2 + c^2\, dt^2 + R^2\, (d\varphi^{ab})^2 - T^2\, (dv^a)^2 + \\ + R^2\, (d\varphi^{123})^2 - \frac{R^2\, (d\omega^{ab})^2}{\Omega^2} + \frac{R^2\, (d\omega^{132})^2}{(\Omega_T)^2}\,. \tag{1}$$

Очевидно, что эти преобразования значительно богаче преобразований Лоренца и включают в себя последние. В этой Главе рассмотрим преобразования координат системы отсчета, соответствующие

- ускоренному прямолинейному движению,
- равномерному вращению,
- равноускоренному вращению,
- равноускоренному телесному вращению.

Предварительно остановимся на двух известных случаях. На них продемонстрируем методы анализа, которые будем использовать в дальнейшем. Сначала рассмотрим преобразование координат, соответствующее равномерному прямолинейному движению системы отсчета в СТО. На нем покажем, как преобразования координат можно получить, исходя из уравнений структуры группы этих преобразований.

Затем рассмотрим поворот в геометрическом пространстве относительно произвольной оси на фиксированный угол. На этом примере покажем, как указанный поворот выражается через повороты в трех базисных плоскостях. Этот прием понадобится для вывода преобразований равноускоренных движений.

1. Равномерное прямолинейное движение в СТО

Необходимость поиска преобразования координат в этом случае продиктована тем, что попытки определить движение системы отсчета относительно световой частицы оказались безуспешными. Он основан на предположении, что существует такое тело – световая частица, которая движется с одной и той же скоростью (c) независимо от того, из какой системы отсчета это движение рассматривается – системы отсчета K или K', движущейся относительно K, то есть, для световой частицы выполняются соотношения

$$\frac{dx}{dt} = \pm c\,, \qquad \frac{dx'}{dt'} = \pm c$$

независимо от скорости движения[1] системы отсчета K' относительно K. Отсюда следует, что для световой частицы должно выполняться

$$c^2\, dt^2 - dx^2 = c^2\, (dt')^2 - (dx')^2 = 0\,.$$

Более того, Эйнштейн предположил, что при описании движения тела B (не обязательно световой частицы) относительно систем отсчета K и K' имеет место условие

$$c^2\, dt^2 - dx^2 = c^2\, (dt')^2 - (dx')^2\,, \tag{2}$$

то есть, величина

$$(dx^0)^2 = c^2\, dt^2 - dx^2$$

является инвариантом выбора системы отсчета при описании движения тела[2]. Иначе: параметр c является фундаментальной константой при описании движения тела (не только частицы света).

Замечание: в случае СТО имеем две системы отсчета K и K', в каждой из которых действует своя группа переносов, свой закон сложения векторов, свой ход времени. И установить связь между ними было бы невозможно, если бы не существование световой частицы. Но так как согласно исходному постулату движение световой частицы не зависит от движения системы отсчета, то это движение может быть использовано для согласования групп переносов, законов сложения векторов, хода времени в системах отсчета K

---

[1] Здесь t и x – соответственно координата времени и координата положения тела в системе отсчета K, а t' и x' – такие же координаты, но для системы отсчета K'

[2] Этот квадрат интервала является частным случаем квадрата интервала в пространстве-времени лептона (1).

и K' и решения задачи специальной теории относительности – установления преобразования координат тела B в системе отсчета K' в координаты этого тела в системе отсчета K.

Задачу специальной теории относительности в рассматриваемом случае можно решить так.

Пусть имеет место группа линейных преобразований дифференциалов времени (dt') и вектора (dx') системы отсчета K' в дифференциалы времени (dt) и вектора (dx) системы отсчета K. Зададим эти преобразования в следующем виде:

$$||dx|| = \mathbf{V}\,||dx'||\,,$$
$$\mathrm{V} = \mathbf{V}\cdot \mathrm{V}'\,,$$

где выражение вида $||dx||$ – это столбец из дифференциалов $c\,dt$ и dx, а V, $\mathbf{V}$, V$'$ – матрицы преобразований. Для того, чтобы преобразование $\mathbf{V}$ сохраняло $(dx^0)^2$ (иначе говоря, удовлетворяло условию (2)), оно должно быть *поворотом* в псевдоевклидовой плоскости $(c\,dt, dx)$, то есть, необходимо положить

$$\mathbf{V} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline\end{array}$$

и

$$\begin{aligned} c\,dt &= \cosh\Psi\, c\,(dt)' + \sinh\Psi\,(dx)'\,, \\ dx &= \sinh\Psi\, c\,(dt)' + \cosh\Psi\,(dx)'\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где Ψ – угол поворота в указанной псевдоплоскости. Этот угол как-то связан с параметрами движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K. После подстановки выражения (3) в левую часть выражения (2) получим правую часть этого выражения, причем угол Ψ исключается из выражения для $(dx^0)^2$. Это и означает, что условие (2) не зависит от параметров движения системы отсчета K'.

Далее необходимо установить связь между углом Ψ и параметрами движения системы отсчета K'. Для этого рассмотрим ту часть изменения дифференциалов координат $c\,dt$ и dx, которая вызвана изменением угла Ψ и по предположению, следовательно, изменением параметров движения системы отсчета K':

$$\delta||dx|| = \delta\mathbf{V}\,||dx'||\,.$$

Учитывая, что

$$||dx'|| = \mathbf{V}^{-1}\,||dx||\,,$$

запишем

$$\delta||dx|| = (\delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1})\,||dx||\,.$$

Это уравнение назовем *уравнением структуры* группы преобразований координат. Далее рассмотрим, как с помощью уравнения структуры можно получить преобразования Лоренца. В следующих Разделах Главы будем использовать этот прием для вывода более общих преобразований.

Итак, в нашем случае

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1} &= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline \sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \cosh\Psi & -\sinh\Psi \\ \hline -\sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline\end{array} = \\ &= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} c\,\delta dt &= \delta\Psi\, dx\,, \\ \delta dx &= \delta\Psi\, c\,dt\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Используя эти соотношения, вычислим ту часть изменения скорости движения тела B относительно системы отсчета K, которая вызвана изменением параметров движения системы отсчета K', связанных с углом Ψ.

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} - dx\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.$$

Учитывая соотношение (4), получим

$$\delta\frac{v}{c} = \delta\Psi\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\,. \tag{5}$$

Отсюда имеем

$$v = c\,\tanh(\Psi + \psi')\,, \tag{6}$$

где ψ' – постоянная интегрирования. Это соотношение будем истолковывать следующим образом. Положим, что $\Psi = 0$ соответствует случаю, когда система отсчета K' неподвижна относительно системы отсчета K и соответственно скорость тела B относительно системы отсчета K равна его скорости относительно системы отсчета K', то есть

$$v = c\,\tanh\psi' = v'.$$

Когда угол $\psi' = 0$, скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю и соответственно его скорость относительно системы отсчета K равна скорости движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть

$$v = c\,\tanh\Psi = \boldsymbol{v}.$$

В результате поставленная задача решена: угол Ψ связан только со скоростью движения системы отсчета K' и следующим образом:

$$\boldsymbol{v} = c\,\tanh\Psi\,. \tag{7}$$

Замечание: в рассмотренном выводе угол ψ' – постоянная интегрирования. Следовательно, в рассматриваемом заключении

$$v' = c\,\tanh\psi' = const\,,$$

то есть, рассмотрение относится к случаю, когда скорость движения тела B относительно системы отсчета K' постоянна, то есть тело B движется относительно системы отсчета K' равномерно. Таким образом, несмотря на то, что изначально не предполагалось движение тела B относительно системы отсчета K' равномерным, далее при использовании (7) это необходимо делать.

Теперь, используя выражение (7), получим

$$\cosh\Psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad \sinh\Psi = \frac{\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,.$$

Искомое соотношение между дифференциалами координат тела B в системах отсчета K и K' примет вид преобразований Лоренца

$$dt = \frac{dt' + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,, \qquad dx = \frac{\boldsymbol{v}\,dt' + dx'}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}\,, \tag{8}$$

а из (6) следует закон сложения скоростей в специальной теории относительности Эйнштейна

$$v = \frac{\boldsymbol{v} + v'}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\,v'}{c^2}}\,.$$

Этот закон корреспондируется с преобразованием дифференциалов координат и времени. Действительно, из выражения (8) имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\boldsymbol{v}\,dt' + dx'}{dt' + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\,dx'} = \frac{\boldsymbol{v} + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\,\frac{dx'}{dt'}}\,.$$

2. Поворот в трехмерном пространстве относительно произвольной оси

Рассмотрим квадрат длины геометрического вектора с координатами dx^1, dx^2, dx^3

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\,.$$

Эта величина является инвариантом выбора системы отсчета при описании поворота тела. Поворот в пространстве дифференциалов вектора

$$||dx|| = \mathrm{U}\cdot||dx'||$$

сохраняет квадрат длины вектора. В частности, матрица поворота в плоскости (dx^1, dx^2) имеет вид

$$\mathrm{U}^{21} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\alpha & \sin\alpha & \\ \hline -\sin\alpha & \cos\alpha & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array}\,,$$

матрица поворота в плоскости (dx^3, dx^1) имеет вид

$$\mathrm{U}^{13} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\beta & & -\sin\beta \\ \hline & 1 & \\ \hline \sin\beta & & \cos\beta \\ \hline\end{array}\,,$$

матрица поворота в плоскости (dx^2, dx^3) имеет вид

$$\mathrm{U}^{32} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \cos\gamma & \sin\gamma \\ \hline & -\sin\gamma & \cos\gamma \\ \hline\end{array}\,.$$

Плоскости (dx^1, dx^2), (dx^3, dx^1),(dx^2, dx^3) будем называть *базисными* и соответственно повороты в этих плоскостях U^{21}, U^{13}, U^{32} также назовем *базисными*.

Произвольное преобразование U, сохраняющее квадрат длины, представляет собой поворот в произвольной плоскости в трехмерном пространстве (dx^1, dx^2, dx^3) на угол θ. Это преобразование удовлетворяет условиям

$$\mathrm{U}(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{U}(\theta_1)\cdot\mathrm{U}(\theta_2)\,, \tag{9}$$

$$\mathrm{U}(0) = \Delta \quad - \text{единичной матрице}\,. \tag{10}$$

Дифференцируем уравнение (9) по θ_1, после чего положим

$$\theta_1 = 0$$

и введем переобозначение

$$\theta_2 = \theta\,.$$

Получим[3]

$$\delta\mathrm{U}(\theta) = \delta\theta\cdot K_\theta\cdot\mathrm{U}(\theta)\,, \tag{11}$$

где

$$K_\theta = \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\Big|_{\theta=0}\,.$$

Эта матрица называется генератором поворота.

Уравнение (11) при начальном условии (10) позволяет записать матрицу поворота в следующем виде

$$\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta\cdot K_\theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\theta\cdot K_\theta) + \frac{1}{2!}\,(\theta\cdot K_\theta)^2 + \ldots\,. \tag{12}$$

В частности, вышеуказанным соотношениям удовлетворяют базисные матрицы поворотов U^{21}, U^{13}, U^{32}. Им соответствуют следующие генераторы поворотов:

$$K_\alpha = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline -1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,, \quad K_\beta = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & -1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}\,, \quad K_\gamma = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline\end{array}\,.$$

Эти генераторы будем называть генераторами базисных поворотов. Генераторы произвольного поворота

[3] При дифференцировании по углу дифференциал будем обозначать δ.

могут быть выражены через генераторы базисных поворотов

$$K_\theta = C^\alpha K_\alpha + C^\beta K_\beta + C^\gamma K_\gamma\,. \qquad (13)$$

Здесь C^α, C^β, C^γ – так называемые направляющие косинусы, постоянные величины, определяющие положение произвольной плоскости относительно базисных плоскостей. Они удовлетворяют условию

$$(C^\alpha)^2 + (C^\beta)^2 + (C^\gamma)^2 = 1\,.$$

Используя соотношение (13), запишем генератор поворота в произвольной плоскости

$$K_\theta = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & C^\alpha & -C^\beta \\ \hline -C^\alpha & & C^\gamma \\ \hline C^\beta & -C^\gamma & \\ \hline \end{array}\,.$$

Зная генератор K_θ, на основании соотношения (12) можно вычислить матрицу поворота в произвольной плоскости. Так как

$$(K_\theta)^3 = -K_\theta\,, \quad (K_\theta)^4 = -(K_\theta)^2\,,$$

эта матрица выражается через тригонометрические функции угла θ

$$\mathrm{U} = \Delta + (K_\theta)^2 - (K_\theta)^2\,\cos\theta + K_\theta\,\sin\theta$$

или

$$\mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline (C^\gamma)^2-1 & C^\gamma C^\beta & -C^\alpha C^\gamma \\ \hline C^\beta C^\gamma & (C^\beta)^2-1 & -C^\beta C^\alpha \\ \hline C^\gamma C^\alpha & C^\alpha C^\beta & (C^\alpha)^2-1 \\ \hline \end{array} -$$

$$- \begin{array}{|c|c|c|}\hline (C^\gamma)^2-1 & C^\gamma C^\beta & -C^\alpha C^\gamma \\ \hline C^\beta C^\gamma & (C^\beta)^2-1 & -C^\beta C^\alpha \\ \hline C^\gamma C^\alpha & C^\alpha C^\beta & (C^\alpha)^2-1 \\ \hline \end{array}\cos\theta \; +$$

$$+ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & C^\alpha & -C^\beta \\ \hline -C^\alpha & & C^\gamma \\ \hline C^\beta & -C^\gamma & \\ \hline \end{array}\sin\theta\,.$$

Итак, мы рассмотрели два вопроса:

- выражение матрицы преобразований через параметры движения системы отсчета на основании уравнения структуры группы преобразований,
- вычисление матрицы произвольного поворота через матрицы базисных поворотов.

Теперь вернемся к нашей программе и рассмотрим сначала прямолинейное ускоренное движение.

II. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ УСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим частный вектор в пространстве–времени лептона

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\,dx^0 + \varepsilon_1\,dx^1 + \varepsilon_4\,c\,dt + \varepsilon_{14}\,T\,dv^1\,.$$

Множество таких векторов составляет подалгебру алгебры Клиффорда $\mathbb{X}_\mathbb{L}$, которую назовем алгеброй прямолинейных ускоренных движений. Для квадрата интервала этого вектора имеем

$$(dx^0)^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - T^2\,dv^2\,. \qquad (14)$$

Замечание. К такому виду квадрата интервала можно прийти из других, более общих, соображений. В СТО имеет место соответствие между первой производной от функции $x(t)$ и углом поворота ψ в псевдоплоскости (x,t) системы отсчета. Следствием этого соответствия является соответствие между законом композиции в пространстве производной, то есть между законом сложения скоростей и законом сложения углов в указанной псевдоплоскости. Трудно представить себе, что такого рода соответствие имеет место только для первой производной dx/dt и не имеет место для производных высшего порядка. С этой точки зрения должно быть соответствие между производной dv/dt и углом поворота в псевдоплоскости (v,t). Следствием этого соответствия должно быть соответствие между законом композиции в пространстве второй производной, то есть между законом сложения ускорений и законом сложения углов в указанной псевдоплоскости.

Замечание: если под скоростью n-го порядка $v^{(n)}$ подразумевать $d^n x(t)/dt^n$ и иметь в виду, что $v^{(n)} = dv^{(n-1)}/dt$, то следует ожидать, что существует соответствие между $v^{(n)}$ и углом поворота в плоскости $(v^{(n-1)}, t)$.

Однако в рамках математического аппарата СТО подобное рассмотрение невозможно. Необходимое обобщение СТО заключается в следующем. Наряду с функцией $x(t)$ будем рассматривать функцию $v(t) = dx/dt$. В соответствии с вышеприведенными соображениями на дифференциалах dt, dx и dv построим векторное пространство, на котором введем квадрат интервала

$$(dx^0)^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - T^2\,dv^2\,.$$

Здесь постоянная T согласует размерность dv с размерностью линейного элемента и имеет размерность времени. Таким образом, получено выражение, совпадающее с (14).

В частном случае, когда изменением скорости dv можно пренебречь, рассматриваемый интервал (14) сводится к интервалу СТО.

Далее рассмотрим следствия, вытекающие из инвариантности квадрата интервала (14).

1. Движение световой частицы

Сначала сделаем следующее замечание. Специальная теория относительности Эйнштейна рассматривает световую частицу как точку, движущуюся со скоростью c по отношению к любой инерциальной системе отсчета и не рассматривает процессы возникновения и исчезновения света, наблюдаемые в действительности. Кинематически такие процессы можно представить себе как ускорение световой частицы до скорости c и замедление ее движения от скорости c до нуля. А теперь вернемся к интервалу (14). Потребуем, чтобы для световой частицы этот интервал был равен нулю независимо от системы отсчета, из которой он рассматривается:

$$c^2\,dt^2 - dx^2 - T^2\,dv^2 = c^2\,(dt')^2 - (dx')^2 - T^2\,(dv')^2 = 0$$

или в другой форме

$$c^2 - v^2 - \frac{c^2}{A^2}\,a^2 = c^2 - (v')^2 - \frac{c^2}{A^2}\,(a')^2 = 0\,.$$

Здесь

$$v = \frac{dx}{dt}\,, \qquad v' = \frac{dx'}{dt'}$$

– скорость световой частицы в различных системах отсчета,

$$a = \frac{dv}{dt}\,, \qquad a' = \frac{dv'}{dt'}$$

– ускорение световой частицы в различных системах отсчета,

$$A = \frac{c}{T}$$

– постоянная величина, имеющая размерность ускорения.

Иначе говоря, условие

$$c^2 - v^2 - \frac{c^2}{A^2}a^2 = 0\,, \tag{15}$$

а вместе с ним скорость c и ускорение A не зависят от скорости и ускорения системы отсчета, из которой наблюдается световая частица. Очевидно, что скорость движения световой частицы не может превышать значение c, а ускорение световой частицы не может превышать значение A. Условие (15) является естественным обобщением условия СТО для движения световой частицы:

$$c^2 - v^2 = 0\,.$$

Уравнение (15) назовем *уравнением движения световой частицы*. Интегрирование этого уравнения приводит к следующим двум зависимостям скорости световой частицы от времени:

$$v_1 = \pm c\,,$$
$$v_2 = \pm c\,\cos(t/T + C_1)\,,$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

При последующем интегрировании получим две зависимости координаты световой частицы от времени:

$$x_1 = \pm c\,t + C_{0_1}\,,$$
$$x_2 = \pm L_0\,\sin(t/T + C_1) + C_{0_2}\,,$$

где C_{0_1} и C_{0_2} – постоянные интегрирования, $L_0 = c\,T$.

Отсюда следует, что возможны два вида движения световой частицы. В первом случае она движется прямолинейно и равномерно со скоростью c, во втором случае световая частица совершает колебательное движение вдоль прямой в интервале $[L_0 + C_{0_2}, -L_0 + C_{0_2}]$. В моменты времени $t/T + C_1 = \pi\,n$, где n – целое, скорость световой частицы при колебательном движении равна $\pm c$ и можно представить, что в эти моменты времени возможно изменение вида движения световой частицы: колебательное движение переходит в прямолинейное равномерное и наоборот. Так можно представить себе процесс возникновения и исчезновения света.

Таким образом, в пространстве-времени лептона движение световой частицы приобретает новые качества:

1) световая частица может двигаться ускоренно;

2) существует предельное ускорение A, с которым может двигаться световая частица;

3) скорость v и ускорение a, с которыми движется световая частица, подчиняются уравнению (15);

4) указанное уравнение, а вместе с ним скорость c и ускорение A не зависят от скорости и ускорения системы отсчета, из которой наблюдается световая частица.

Разумеется, главным критерием правильности сформулированных положений будет обнаружение у света указанных свойств.

2. Начало движения. Закон сложения ускорений

Рассмотрим случай, относящийся к началу ускоренного движения, когда изменением геометрического смещения тела можно пренебречь[4], а изменение скорости тела существенно. Для этого случая квадрат интервала (14) упрощается до

$$(dx^0)^2 = c^2\,dt^2 - T^2\,dv^2\,.$$

Зададим линейные преобразования координат в следующем виде:

$$||dx|| = \mathbf{A}\,||dx'||\,,$$
$$\mathrm{A} = \mathbf{A}\cdot\mathrm{A}'\,,$$

[4] То есть можно положить $dx = dx'$.

где выражение вида $||dx||$ – это столбец из дифференциалов $c\,dt$ и $T\,dv$, а A, **A**, A′ – матрицы преобразований. Для того, чтобы преобразование **A** сохраняло $(dx^0)^2$, оно должно быть *поворотом* в псевдоевклидовой плоскости $(c\,dt, T\,dv)$, то есть, необходимо положить

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline\end{array}$$

и

$$\begin{aligned} c\,dt &= \cosh\Psi\, c\,dt' + \sinh\Psi\, T\,dv' , \\ T\,dv &= \sinh\Psi\, c\,dt' + \cosh\Psi\, T\,dv' , \end{aligned} \tag{16}$$

где Ψ – угол поворота в указанной псевдоплоскости, причем этот угол как-то связан с параметрами движения тела. Для того, чтобы установить эту связь, рассмотрим уравнение структуры группы преобразований координат[5]

$$\delta||dx|| = (\delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1})\,||dx|| ,$$

где

$$\delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline \sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline \cosh\Psi & \sinh\Psi \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \cosh\Psi & -\sinh\Psi \\ \hline -\sinh\Psi & \cosh\Psi \\ \hline\end{array} =$$

$$= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array} .$$

В результате получим

$$\begin{aligned} c\,\delta dt &= \delta\Psi\, T\,dv , \\ T\,\delta dv &= \delta\Psi\, c\,dt . \end{aligned} \tag{17}$$

Используя эти соотношения, вычислим ту часть изменения скорости движения тела B относительно системы отсчета K, которая вызвана изменением параметров движения системы отсчета K', связанных с углом Ψ.

$$\delta\frac{dv}{dt} = \frac{\delta dv}{dt} - dv\,\frac{\delta dt}{(dt)^2} .$$

Учитывая выражения (17), получим

$$\delta\frac{a}{A} = \delta\Psi\,\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) . \tag{18}$$

Здесь введены обозначения

$$a = \frac{dv}{dt} , \qquad A = \frac{c}{T} .$$

Отсюда имеем соотношение между ускорением и углом Ψ

$$a = A\,\tanh(\Psi + \psi') , \tag{19}$$

где ψ' – постоянная интегрирования. Будем полагать, что $\Psi = 0$ соответствует случаю, когда система отсчета K' неподвижна относительно системы отсчета K и соответственно ускорение тела B относительно системы отсчета K равно его ускорению относительно системы отсчета K', то есть

$$a = A\,\tanh\psi' = a' .$$

Когда угол $\psi' = 0$, ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю и соответственно его ускорение относительно системы отсчета K равно ускорению движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть

$$a = A\,\tanh\Psi = \boldsymbol{a} .$$

В результате поставленная задача решена: угол Ψ связан только с ускорением движения системы отсчета K' и следующим образом:

$$\boldsymbol{a} = A\,\tanh\Psi . \tag{20}$$

Замечание: в рассмотренном выводе угол ψ' – постоянная интегрирования. Следовательно,

$$a' = A\,\tanh\psi' = const .$$

Теперь, используя соотношение (20), получим

$$\cosh\Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}} , \qquad \sinh\Psi = \frac{\boldsymbol{a}}{A\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}} .$$

Искомые соотношения между дифференциалами координат тела B в системах отсчета K и K' примут вид

$$dt = \frac{dt' + \frac{\boldsymbol{a}}{A^2}\,T\,dv'}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}} , \qquad dv = \frac{\boldsymbol{a}\,dt' + dv'}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}} . \tag{21}$$

К ним нужно добавить ранее принятое

$$dx = dx' .$$

При $A \to \infty$ получим преобразование Ньютона

$$\begin{aligned} dt &= dt' , \\ dx &= dx' , \\ dv &= \boldsymbol{a}\,dt' + dv' . \end{aligned}$$

Из соотношения(19) следует закон сложения ускорений

$$a = \frac{\boldsymbol{a} + a'}{1 + \frac{\boldsymbol{a}\,a'}{A^2}} .$$

Этот закон корреспондируется с преобразованием дифференциалов скорости и времени.

[5] См. Раздел I.1.

3. Составное движение

С целью упрощения дальнейших преобразований перейдем к безразмерным координатам. Для этого квадрат интервала (14) разделим на $(L_0)^2$ и выполним следующие переобозначения:

$$\frac{dx^0}{L_0} \to dx^0 , \quad \frac{dt}{T} \to dt , \quad \frac{dx}{L_0} \to dx , \quad \frac{dv}{c} \to dv .$$

Получим квадрат интервала в следующем виде:

$$(dx^0)^2 = dt^2 - dx^2 - dv^2 .$$

При переходе к безразмерным координатам будем пользоваться следующими обозначениями: x, t, v, a – соответственно координата, время, скорость и ускорение тела B относительно системы отсчета K; x', t', v', a' – координата, время, скорость и ускорение тела B относительно системы отсчета K'; $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ – координата, время, скорость и ускорение системы отсчета K относительно системы отсчета K'.

Поворот в пространстве дифференциалов

$$||dx|| = \mathbf{U}\, ||dx'||$$

сохраняет квадрат интервала. В частности, поворот в псевдоплоскости (dx, dt)

$$\mathbf{V} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cosh\Psi & \sinh\Psi & \\ \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$$

соответствует равномерному движению системы отсчета K'. Поворот в псевдоплоскости (dt, dv)

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cosh\Phi & & \sinh\Phi \\ \hline & 1 & \\ \hline \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ \hline \end{array}$$

соответствует ускоренному движению системы отсчета K'.

Так как в общем случае повороты не перестановочны между собой, то движение $\mathbf{U} = \mathbf{VA}$ системы отсчета K' нужно отличать от движения $\mathbf{U} = \mathbf{AV}$ системы отсчета K'.

Будем говорить о системе отсчета K_1, параметры движения (скорость, ускорение) которой определены относительно системы отсчета K, как о системе отсчета, *вложенной* в K. На вложенных системах отсчета введем отношение порядка, задаваемое порядком относительного определения параметров движения. На Рис. 1(a,b) показаны вложенные системы отсчета, соответствующие **VA**- и **AV**-движению системы отсчета K' соответственно.

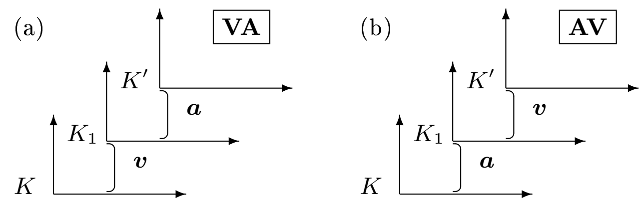


Рис. 1. (a) Случай **VA**-движения. Скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K_1 задана относительно системы отсчета K, ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K' задано относительно системы отсчета K_1. (b) Случай **AV**-движения. Скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K' задана относительно системы отсчета K_1, ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K_1 задано относительно системы отсчета K.

4. VA-движение системы отсчета K'

Рассмотрим поворот, который задается матрицей

$$\mathbf{U} = \mathbf{VA} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cosh\Psi\,\cosh\Phi & \sinh\Psi & \cosh\Psi\,\sinh\Phi \\ \hline \sinh\Psi\,\cosh\Phi & \cosh\Psi & \sinh\Psi\,\sinh\Phi \\ \hline \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ \hline \end{array} .$$

Тогда

$$\begin{aligned} dt &= \cosh\Psi\,\cosh\Phi\,dt' + \sinh\Psi\,dx' + \cosh\Psi\,\sinh\Phi\,dv' , \\ dx &= \sinh\Psi\,\cosh\Phi\,dt' + \cosh\Psi\,dx' + \sinh\Psi\,\sinh\Phi\,dv' , \\ dv &= \sinh\Phi\,dt' + \cosh\Phi\,dv' . \end{aligned} \tag{22}$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и скоростью $v = dx/dt$ и ускорением $a = dv/dt$ тела B, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов Ψ и Φ на основании уравнений структуры:

$$\delta||dx|| = (\delta\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1})\,||dx|| .$$

В нашем случае $\mathbf{U} = \mathbf{VA}$ и

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1}) &= \delta(\mathbf{VA})\,(\mathbf{VA})^{-1} \\ &= (\delta\mathbf{V}\,\mathbf{A} + \mathbf{V}\,\delta\mathbf{A})\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{V}^{-1} \\ &= \delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\,(\delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{V}^{-1} . \end{aligned}$$

$$\delta\mathbf{V} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \hline \cosh\Psi & \sinh\Psi & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} ,$$

$$\delta\mathbf{A} = \delta\Phi \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ \hline & & \\ \hline \cos\Phi & & \sinh\Phi \\ \hline \end{array} ,$$

$$\delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,, \qquad \delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \delta\Phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\mathbf{V}\,(\delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1})\,\mathbf{V}^{-1} = \delta\Phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\Psi & \sinh\Psi & \\ \hline \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array}\,\cdot$$

$$\cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\Psi & -\sinh\Psi & \\ \hline -\sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array} =$$

$$= \delta\Phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \cosh\Psi \\ \hline & & \sinh\Psi \\ \hline \cosh\Psi & -\sinh\Psi & \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\delta\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array} + \delta\Phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \cosh\Psi \\ \hline & & \sinh\Psi \\ \hline \cosh\Psi & -\sinh\Psi & \\ \hline\end{array}\,.$$

Используя эту матрицу, получим

$$\begin{aligned} \delta dt &= \delta\Psi\, dx + \cosh\Psi\, \delta\Phi\, dv\,, \\ \delta dx &= \delta\Psi\, dt + \sinh\Psi\, \delta\Phi\, dv\,, \\ \delta dv &= \cosh\Psi\, \delta\Phi\, dt - \sinh\Psi\, \delta\Phi\, dx\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и скоростью тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} - dx\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.$$

Используя соотношения (23), получим

$$\delta v = \delta\Psi\,(1 - v^2) + \delta\Phi\,(\sinh\Psi - v\,\cosh\Psi)\,a\,, \tag{24}$$

где введено обозначение $a = dv/dt$.

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и ускорением тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{dv}{dt} = \frac{\delta dv}{dt} - dv\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.$$

Используя соотношения (23), получим

$$\delta a = -a\,v\,\delta\Psi + \big(\cosh\Psi\,(1 - a^2) - \sinh\Psi\, v\big)\;\delta\Phi\,. \tag{25}$$

Соотношения (22), (24) и (25) определяют преобразования координат, обобщенные на случай ускоренных движений тела B и системы отсчета K', и законы сложения скоростей и ускорений.

Далее рассмотрим решения уравнений (24) и (25) для случая, когда скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю. На Рис. 2 показаны вложенные системы отсчета, поясняющие этот случай.

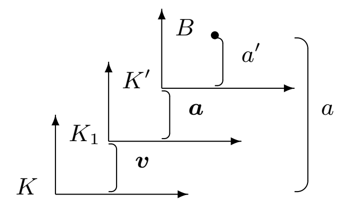


Рис. 2. Вложенные системы отсчета для случае **VA**-движения системы отсчета K'. Скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K_1 задана относительно системы отсчета K, ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K' задана относительно системы отсчета K_1, ускорение a' тела B задано относительно системы отсчета K', ускорение a тела B задано относительно системы отсчета K.

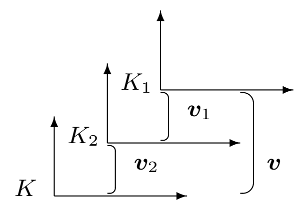


Рис. 3. Вложенные системы отсчета для сложения скоростей в случае **VA**-движения системы отсчета K'. Скорость $\boldsymbol{v}_2$ системы отсчета K_2 задана относительно системы отсчета K, скорость $\boldsymbol{v}_1$ системы отсчета K_1 задана относительно системы отсчета K_2, скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K_1 задана относительно системы отсчета K.

4.1. Закон сложения скоростей

В соответствии с Рис. 1а для **VA**-движения ускоренно движущаяся система отсчета K' не участвует в определении скорости $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K_1. Поэтому в этом случае закон сложения скоростей не зависит от ускорения. На Рис. 3 показаны вложенные системы отсчета, поясняющие закон сложения скоростей.

В рассматриваемом случае скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю и соответственно его скорость относительно системы отсчета K равна скорости движения системы отсчета K_1 относительно системы отсчета K, то есть $v = \boldsymbol{v}$. Таким образом, из выражения (24) при начальном условии ($\Psi = 0$, $v = 0$) имеем

$$v = \boldsymbol{v} = \tanh\Psi\,. \tag{26}$$

Отсюда следует закон сложения скоростей, известный из специальной теории относительности.

4.2. Закон сложения ускорений

Так как для **VA**-движения системы отсчета K' ускорение a ускоренно движущегося тела B определено по отношению к равномерно движущейся системе отсчета K_1 (см. Рис. 1a), то закон сложения ускорений, записанный по отношению к системе отсчета K, зависит от скорости движения системы отсчета K_1. Рассмотрим сначала случай, когда скорость $v = \boldsymbol{v} = 0$ и $\Psi = 0$. Уравнение (25) при этом сводится к

$$\delta a = \left(1 - a^2\right)\,\delta\Phi\,.$$

Отсюда имеем случай, рассмотренный в Разделе II.2

Для скорости v, отличной от нуля, уравнение (25) с учетом выражения (26) и принятого условия $v = \boldsymbol{v}$ дает

$$a = \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}\,\tanh(\Phi + \phi')\,.$$

Постоянную интегрирования ϕ' определим из следующих соображений. Будем полагать, что равенство $\phi' = 0$ соответствует случаю, когда ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю и соответственно его ускорение относительно системы отсчета K (или K_1) равно ускорению движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть $a = \boldsymbol{a}$. И, напротив, будем полагать, что равенство $\Phi = 0$ соответствует случаю, когда ускорение движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K равно нулю и соответственно ускорение тела B относительно системы отсчета K равно его ускорению относительно системы отсчета K', то есть $a = a'$. Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}\,\tanh\Phi\,, \tag{27}$$

$$a' = \sqrt{1 - (v')^2}\,\tanh\phi'\,.$$

Но в рассматриваемом случае скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю, то есть $v' = 0$, поэтому

$$a' = \tanh\phi'\,.$$

Из соотношения, (27) следует закон сложения ускорений в общем случае, когда скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K' отлична от нуля:

$$a = \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}\cdot\frac{\boldsymbol{a} + \sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}\,a'}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2} + \boldsymbol{a}\,a'}\,.$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$a = \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}\cdot\frac{\boldsymbol{a} + \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}\,a'}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} + \frac{\boldsymbol{a}\,a'}{A^2}}}\,.$$

4.3. Преобразование дифференциалов координат

Из

$$\tanh\Psi = \boldsymbol{v}\,, \qquad \tanh\Phi = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}$$

следует

$$\cosh\Psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}\,, \qquad \sinh\Psi = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}$$

и

$$\cosh\Phi = \frac{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}^2}}\,, \qquad \sinh\Phi = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}^2}}\,.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (22), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}\,dx' + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}\,\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,, \\
dx &= \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}\,dx' + \\
&\quad + \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}\,\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,, \\
dv &= \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \frac{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

В результате получен конкретный вид преобразований (22).

Для $v \ll 1$ и $a \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned}
dt &= \; dt' + \boldsymbol{v}\,dx' + \boldsymbol{a}\,dv'\,, \\
dx &= \; \boldsymbol{v}\,dt' + dx' + \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dv'\,, \\
dv &= \; \boldsymbol{a}\,dt' + dv'\,.
\end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned}
dt &= \; dt' + \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,dx' + \tfrac{1}{A^2}\,\boldsymbol{a}\,dv'\,, \\
dx &= \; \boldsymbol{v}\,dt' + dx' + \tfrac{1}{A^2}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{v}\,dv'\,, \\
dv &= \; \boldsymbol{a}\,dt' + dv'\,.
\end{aligned}$$

В ньютоновском пределе (при $c \to \infty$ и $A \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
dt &= \; dt'\,, \\
dx &= \; \boldsymbol{v}\,dt' + dx'\,, \\
dv &= \; \boldsymbol{a}\,dt' + dv'\,, \\
da &= \; da' = 0\,.
\end{aligned}$$

5. AV-движение системы отсчета K'

В этом случае матрица поворота имеет вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{AV} = \begin{bmatrix} \cosh\Phi \cosh\Psi & \cosh\Phi \sinh\Psi & \sinh\Phi \\ \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \sinh\Phi \cosh\Psi & \sinh\Phi \sinh\Psi & \cosh\Phi \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} dt = &\; \cosh\Phi \cosh\Psi \, dt' \cosh\Phi \sinh\Psi \, dx' + \sinh\Phi \, dv' \,, \\ dx = &\; \sinh\Psi \, dt' + \cosh\Psi \, dx' \,, \\ dv = &\; \sinh\Phi \cosh\Psi \, dt' + \sinh\Phi \sinh\Psi \, dx' + \cosh\Phi \, dv' \,. \end{aligned} \tag{29}$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ матрицы вращения и скоростью $v = dx/dt$ и ускорением $a = dv/dt$ тела B, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов Ψ и Φ матрицы поворота в соответствии с уравнением структуры

$$\delta dx = (\delta\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1})\, dx \,.$$

В нашем случае $\mathbf{U} = \mathbf{AV}$ и

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1} &= \delta(\mathbf{AV})\,(\mathbf{AV})^{-1} = \\ &= (\delta\mathbf{A}\,\mathbf{V} + \mathbf{A}\,\delta\mathbf{V})\,\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1} = \\ &= \delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}\,(\delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1})\,\mathbf{A}^{-1} \,. \end{aligned}$$

$$\delta\mathbf{V} = \delta\Psi \begin{bmatrix} \sinh\Psi & \cosh\Psi & \\ \cosh\Psi & \sinh\Psi & \\ & & \end{bmatrix},$$

$$\delta\mathbf{A} = \delta\Phi \begin{bmatrix} \sinh\Phi & & \cosh\Phi \\ & & \\ \cosh\Phi & & \sinh\Phi \end{bmatrix},$$

$$\delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1} = \delta\Psi \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}, \qquad \delta\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \delta\Phi \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\,(\delta\mathbf{V}\,\mathbf{V}^{-1})\,\mathbf{A}^{-1} = \delta\Psi \begin{bmatrix} \cosh\Phi & & \sinh\Phi \\ & 1 & \\ \sinh\Phi & & \cosh\Phi \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cosh\Phi & & -\sinh\Phi \\ & 1 & \\ -\sinh\Phi & & \cosh\Phi \end{bmatrix} =$$

$$= \delta\Psi \begin{bmatrix} & \cosh\Phi & \\ \cosh\Phi & & -\sinh\Phi \\ & \sinh\Phi & \end{bmatrix},$$

$$\delta\mathbf{U}\,\mathbf{U}^{-1} = \delta\Phi \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} + \delta\Psi \begin{bmatrix} & \cosh\Phi & \\ \cosh\Phi & & -\sinh\Phi \\ & \sinh\Phi & \end{bmatrix}.$$

Используя эту матрицу, получим

$$\begin{aligned} \delta dt = &\; \delta\Phi \, dv + \cosh\Phi \, \delta\Psi \, dx \,, \\ \delta dx = &\; \cosh\Phi \, \delta\Psi \, dt - \sinh\Phi \, \delta\Psi \, dv \,, \\ \delta dv = &\; \delta\Phi \, dt + \sinh\Phi \, \delta\Psi \, dx \,. \end{aligned} \tag{30}$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и скоростью тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} - dx\,\frac{\delta dt}{(dt)^2} \,.$$

Используя выражения (30), получим

$$\delta v = \delta\Psi \, \big((1 - v^2)\cosh\Phi - a\sinh\Phi\big) - \delta\Phi \, v\, a \,. \tag{31}$$

Для того, чтобы установить связь между углами Ψ и Φ и ускорением тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{dv}{dt} = \frac{\delta dv}{dt} - dv\,\frac{\delta dt}{dt^2} \,.$$

Используя выражения (30), получим

$$\delta a = (\sinh\Phi - \cosh\Phi\, a)\, v\, \delta\Psi + (1 - a^2)\delta\Phi \,. \tag{32}$$

Соотношения (28), (30), (31) определяют преобразования координат, обобщенные на случай ускоренных движений тела B и системы отсчета K', и законы сложения скоростей и ускорений.

Далее рассмотрим решения уравнений (30), (31) для случая, когда ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю. На Рис. 4 показаны вложенные системы отсчета, поясняющие рассматриваемый случай.

5.1. Закон сложения ускорений

В соответствии с Рис. 1b для **AV**-движения равномерно движущаяся система отсчета K' не участвует в определении ускорения $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K_1. Поэтому в этом случае закон сложения ускорений не зависит от скорости v' тела B. На Рис. 5 показаны вложенные системы отсчета, поясняющие закон сложения ускорений.

Для рассматриваемого случая ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю и соответственно его ускорение относительно системы отсчета K равно ускорению системы отсчета K_1 относительно

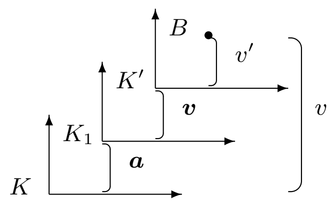


Рис. 4. Вложенные системы отсчета для сложения скоростей в случае **AV**-движения системы отсчета K'. Ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K_1 задано относительно системы отсчета K, скорость $\boldsymbol{v}$ системы отсчета K' задана относительно системы отсчета K_1, скорость v' тела B задана относительно системы отсчета K', скорость v тела B задана относительно системы отсчета K.

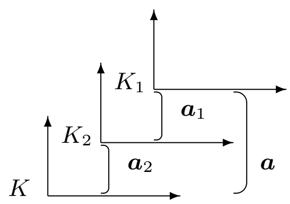


Рис. 5. Вложенные системы отсчета для сложения ускорений в случае **AV**-движения системы отсчета K'. Ускорение $\boldsymbol{a}_2$ системы отсчета K_2 задано относительно системы отсчета K, ускорение $\boldsymbol{a}_1$ системы отсчета K_1 задано относительно системы отсчета K_2, ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K_1 задано относительно системы отсчета K.

системы отсчета K, то есть $a = \boldsymbol{a}$. Таким образом, из формулы (31) при начальном условии ($\Phi = 0$, $a = 0$) имеем

$$a = \boldsymbol{a} = \tanh\Phi\,. \tag{33}$$

Отсюда следует ранее рассмотренный закон сложения ускорений.

5.2. *Закон сложения скоростей*

Так как для **AV**-движения системы отсчета K' скорость v тела B определена по отношению к ускоренно движущейся системе отсчета K_1 (см. Рис. 1b), то закон сложения скоростей, записанный по отношению к системе отсчета K, зависит от ускорения системы отсчета K_1.

Для частного случая, когда ускорение $a = \boldsymbol{a} = 0$ и $\Phi = 0$ уравнение (30) сводится к

$$\delta v = (1 - v^2)\,\delta\Psi\,.$$

Отсюда имеем преобразование Лоренца.

Для произвольного ускорения уравнение (30) с учетом (33) и принятого условия $a = \boldsymbol{a}$ дает

$$v = \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}\,\tanh(\Psi + \psi')\,.$$

Отсюда следует, что максимальное значение скорости

$$v_m = \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}$$

или в размерных единицах

$$v_m = c\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}\,. \tag{34}$$

Отсюда следует, что при наличии ускорения возможная максимальная скорость движения меньше скорости света. В частности, если источник света движется ускоренно относительно системы отсчета K, то скорость света относительно K меньше c и определяется выражением (34).

Постоянную интегрирования ψ' определим из следующих соображений. Будем полагать, что равенство $\psi' = 0$ соответствует случаю, когда скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю и соответственно его скорость относительно системы отсчета K (или K_1) равна скорости движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть $v = \boldsymbol{v}$. И, напротив, будем полагать, что равенство $\Psi = 0$ соответствует случаю, когда скорость движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K равна нулю и соответственно скорость тела B относительно системы отсчета K равна его скорости относительно системы отсчета K', то есть $v = v'$. Таким образом,

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}\,\tanh\Psi\,. \tag{35}$$

$$v' = \sqrt{1 - (a')^2}\,\tanh\psi'\,.$$

Но в рассматриваемом случае ускорение тела B относительно системы отсчета K' равно нулю, то есть $a' = 0$, поэтому

$$v' = \tanh\psi'\,.$$

Из соотношения (35) следует закон сложения скоростей в общем случае, когда ускорение $\boldsymbol{a}$ системы отсчета K' отлично от нуля:

$$v = \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}\cdot\frac{\boldsymbol{v} + \sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2}\,v'}{\sqrt{1 - \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{v}\,v'}}\,.$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$v = \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}\cdot\frac{\boldsymbol{v} + \sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{a}^2}{A^2}}\,v'}{\sqrt{1 - \dfrac{\boldsymbol{a}^2}{A^2} + \dfrac{\boldsymbol{v}\,v'}{c^2}}}\,.$$

5.3. Преобразование дифференциалов координат

Из

$$\tanh\Phi = \boldsymbol{a}\,, \qquad \tanh\Psi = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}$$

следует

$$\cosh\Phi = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,, \qquad \sinh\Phi = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}$$

и

$$\cosh\Psi = \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,, \quad \sinh\Psi = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (29), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dx' + \\
&\quad + \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,,\\
dx &= \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dx'\,,\\
dv &= \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dx' + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,.
\end{aligned} \tag{36}$$

В результате получен конкретный вид преобразований (29).

Для $v \ll 1$ и $a \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned}
dt &= dt' + \boldsymbol{v}\,dx' + \boldsymbol{a}\,dv'\,,\\
dx &= \boldsymbol{v}\,dt' + dx'\,,\\
dv &= \boldsymbol{a}\,dt' + \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dx' + dv'\,.
\end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned}
dt &= (dt)' + \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,(dx)' + \tfrac{1}{A^2}\,\boldsymbol{a}\,(dv)'\,,\\
dx &= \boldsymbol{v}\,(dt)' + (dx)'\,,\\
dv &= \boldsymbol{a}\,(dt)' + \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,(dx)' + (dv)'\,.
\end{aligned}$$

В ньютоновском пределе (при $c \to \infty$ и $A \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
dt &= (dt)'\,,\\
dx &= \boldsymbol{v}\,(dt)' + (dx)'\,,\\
dv &= \boldsymbol{a}\,(dt)' + (dv)'\,.
\end{aligned}$$

6. Связь с преобразованием Риндлера

Связь между рассматриваемыми преобразованиями и преобразованием Риндлера рассмотрим на примере преобразований для **VA**-движения системы отсчета K', а именно, рассмотрим преобразования (22) для случая, когда

$$dx' = 0\,, \quad dv' = 0\,, \tag{37}$$

то есть когда тело B неподвижно относительно системы отсчета K'. В этом случае $v = \boldsymbol{v}$, $a = \boldsymbol{a}$,

$$\begin{aligned}
dt &= \cosh\Psi\,\cosh\Phi\,dt'\,,\\
dx &= \sinh\Psi\,\cosh\Phi\,dt'\,,\\
dv &= \sinh\Phi\,dt'\,.
\end{aligned} \tag{38}$$

Здесь углы Ψ и Φ связаны со скоростью и ускорением системы отсчета K' следующим образом:

$$\tanh\Psi = v\,, \qquad \tanh\Phi = \frac{a}{\sqrt{1-v^2}}\,.$$

Далее рассмотрим преобразования (38) для случая, когда

$$\Psi \approx \tanh\Psi = v\,, \sinh\Phi \approx \tanh\Phi = a\,, \cosh\Phi = 1\,,$$

то есть по существу для нерелятивистских скоростей и ускорений $a \ll A$.

Преобразования (38) приобретают вид

$$\begin{aligned}
dt &= \cosh(v)\,dt'\,,\\
dx &= \sinh(v)\,dt'\,,\\
dv &= a\,dt'\,.
\end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом, что ускорение a постоянно, получим

$$v = a\,t'\,.$$

Используя это соотношение, запишем преобразования следующим образом:

$$\begin{aligned}
dt &= \cosh(a\,t')\,dt'\,,\\
dx &= \sinh(a\,t')\,dt'\,.
\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и принимая постоянные интегрирования равными нулю, получим

$$\begin{aligned}
t &= \tfrac{1}{a}\,\sinh(a\,t')\,,\\
x &= \tfrac{1}{a}\,\cosh(a\,t')\,.
\end{aligned}$$

Отсюда после перехода к размерным величинам получим

$$\begin{aligned}
\tfrac{t}{T} &= \tfrac{A}{a}\,\sinh\left(\tfrac{a}{A}\,\tfrac{t'}{T}\right)\,,\\
\tfrac{x}{R} &= \tfrac{A}{a}\,\cosh\left(\tfrac{a}{A}\,\tfrac{t'}{T}\right)\,.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$A\,T = c\,, \qquad R\,A = (c\,T)\,A = c^2\,,$$

получим преобразования Риндлера в следующем виде:

$$\begin{aligned}
t &= \tfrac{c}{a}\,\sinh\left(\tfrac{a\,t'}{c}\right)\,,\\
x &= \tfrac{c^2}{a}\,\cosh\left(\tfrac{a\,t'}{c}\right)\,.
\end{aligned}$$

Заметим, что, как это и необходимо для преобразований Риндлера, время t' совпадает с собственным временем x^0/c с точностью до постоянной величины, так как в силу соотношения (37)

$$(dx^0)^2 = c^2\,(dt')^2\,.$$

7. Равноускоренное движение

Рассмотрим теперь равноускоренное движение. Как и прежде с целью упрощения дальнейших преобразований перейдем к безразмерным координатам. Для этого квадрат интервала (14) разделим на $(L_0)^2$ и выполним следующие переобозначения

$$\frac{dx^0}{L_0} \to dx^0\,, \quad \frac{dt}{T} \to dt\,, \quad \frac{dx}{L_0} \to dx\,, \quad \frac{dv}{c} \to dv\,.$$

Получим квадрат дифференциала интервала в следующем виде:

$$(dx^0)^2 = dt^2 - dx^2 - dv^2\,.$$

Линейное преобразование в пространстве дифференциалов координат

$$||dx|| = \mathrm{U}\,||dx'||\,, \tag{39}$$

сохраняющее квадрат интервала, есть поворот. Здесь подобно Разделу I.1. выражение вида $||dx||$ – это столбец из дифференциалов dt, dx и dv, а U – матрица поворота в некоторой плоскости рассматриваемого пространства. В частности, поворот в псевдоплоскости (dt, dx), представленный матрицей

$$\mathrm{V} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\psi & \sinh\psi & \\ \hline \sinh\psi & \cosh\psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array}\,,$$

соответствует равномерному движению системы отсчета.

Поворот в псевдоплоскости (dt, dv), представленный матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\phi & & \sinh\phi \\ \hline & 1 & \\ \hline \sinh\phi & & \cosh\phi \\ \hline\end{array}\,,$$

соответствует ускоренному движению системы отсчета в начале движения.

Кроме того, поворот в плоскости (dx, dv), представленный матрицей

$$\mathrm{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \cos\tau & \sin\tau \\ \hline & -\sin\tau & \cos\tau \\ \hline\end{array}\,,$$

также сохраняет квадрат интервала. Смысл этого преобразования пока оставим невыясненным. Вышеуказанные три матрицы являются по нашему определению матрицами базисных поворотов.

Теперь задача состоит в том, чтобы из всех поворотов U выделить такой, который соответствует равноускоренному движению системы отсчета.

Произвольное линейное преобразование U, сохраняющее квадрат интервала, представляет собой поворот в произвольной плоскости в трехмерном пространстве (dt, dx, dv) на угол θ. Матрица поворота может быть записана в следующем виде:

$$\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta\cdot K_\theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\theta\cdot K_\theta) + \frac{1}{2!}\,(\theta\cdot K_\theta)^2 + \ldots\,, \tag{40}$$

где

$$K_\theta = \left.\frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\right|_{\theta=0}$$

– генератор поворота. Матрица поворота удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению[6]:

$$\delta\mathrm{U}(\theta) = \delta\theta\cdot K_\theta\cdot\mathrm{U}(\theta)\,, \tag{41}$$

В частности вышеуказанным соотношениям удовлетворяют базисные матрицы поворотов V, A, T. Им соответствуют следующие генераторы поворотов

$$K_\psi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,, \quad K_\phi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline\end{array}\,, \quad K_\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline\end{array}$$

Чтобы установить связь между углами ψ и ϕ и скоростью $v = dx/dt$ и ускорением $a = dv/dt$ тела B, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов ψ, ϕ и τ в соответствии с уравнениями структуры:

$$\delta||dx|| = (\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1})\,||dx||\,. \tag{42}$$

Из соотношения (45) следует

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\theta\cdot K_\theta\,. \tag{43}$$

Выразим $\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}$ через матрицы поворотов в базисных плоскостях[7]

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\mathrm{V}\,\mathrm{V}^{-1} + \delta\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} + \delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1}\,. \tag{44}$$

Здесь

$$\delta\mathrm{V}\,\mathrm{V}^{-1} = \delta\psi\,K_\psi = \delta\psi\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\,,$$

---

[6] Как и прежде при дифференцировании по углу дифференциал будем обозначать δ.

[7] Матрица вращений относительно произвольной оси выражается через матрицы вращений относительно базисных плоскостей следующим образом:

$$\mathrm{U} = \frac{1}{6}(\mathrm{VAT} + \mathrm{ATV} + \mathrm{TVA} + \mathrm{VTA} + \mathrm{AVT} + \mathrm{TAV})\,,$$

только в этом случае указанное представление не зависит от порядка представляющих матриц, как это следует из выражения (44).

$$\delta \mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} = \delta\phi\, K_\phi = \delta\phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array},$$

$$\delta \mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1} = \delta\tau\, K_\tau = \delta\tau \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline \end{array}.$$

Рассматривая функции $\psi(\theta)$, $\phi(\theta)$, $\tau(\theta)$ как линейные введем соотношения

$$\delta\psi = \delta\theta\, C^\psi, \quad \delta\phi = \delta\theta\, C^\phi, \quad \delta\tau = \delta\theta\, C^\tau\,. \tag{45}$$

Здесь C^ψ, C^ϕ, C^τ – "направляющие косинусы": постоянные величины, определяющие положение произвольной плоскости относительно базисных плоскостей. Они удовлетворяют условию

$$(C^\psi)^2 + (C^\phi)^2 - (C^\tau)^2 = 1\,. \tag{46}$$

Соотношения (43), (44) и (45) позволяют выразить генератор произвольного поворота через генераторы базисных поворотов

$$K_\theta = C^\psi\, K_\psi + C^\phi\, K_\phi + C^\tau\, K_\tau\,. \tag{47}$$

Используя это соотношение, запишем уравнения структуры (42) в следующем виде:

$$\delta||dx|| = \delta \mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}\,||dx|| = \delta\theta \begin{array}{|c|c|c|}\hline & C^\psi & C^\phi \\ \hline C^\psi & & C^\tau \\ \hline C^\phi & -C^\tau & \\ \hline \end{array} ||dx||\,.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \delta dt &= \delta\theta\, (C^\psi\, dx + C^\phi\, dv)\,, \\ \delta dx &= \delta\theta\, (C^\psi\, dt + C^\tau\, dv)\,, \\ \delta dv &= \delta\theta\, (C^\phi\, dt - C^\tau\, dx)\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Чтобы установить связь между углами ψ, ϕ и τ с одной стороны и скоростью и ускорением тела B с другой, рассмотрим дифференциал

$$\delta v = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} - v\, \frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя выражения (48), получим

$$\delta v = \delta\theta\, \left(C^\psi\, (1 - v^2) + C^\tau\, a - C^\phi\, v\, a \right)\,, \tag{49}$$

где введено обозначение $a = dv/dt$.

Аналогично рассмотрим дифференциал

$$\delta a = \delta \frac{dv}{dt} = \frac{\delta dv}{dt} - a\, \frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя выражения (48), получим

$$\delta a = \delta\theta\, \left(C^\phi\, (1 - a^2) - C^\tau\, v - C^\psi\, v\, a \right)\,. \tag{50}$$

Кроме того, рассмотрим дифференциал

$$\delta \frac{dx}{dv} = \delta \frac{v}{a}\,.$$

Используя соотношение

$$v = a\, t\,,$$

его можно записать

$$\delta \frac{dx}{dv} = \delta t\,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta t = \frac{\delta dx}{dv} - t\, \frac{\delta dv}{dv}\,.$$

Используя выражения (48), получим

$$\delta t = \delta\theta\, \left(C^\psi\, \frac{1}{a} + C^\tau + t\, (-C^\phi\, \frac{1}{a} + C^\tau\, t) \right)\,. \tag{51}$$

Для равноускоренного движения должно выполняться

$$\delta v = a\, \delta t\,, \qquad \delta a = 0\,.$$

Подставляя в первое соотношение значения (49) и (51), получим

$$\begin{gathered} C^\psi\, (1 - v^2) + C^\tau\, a - C^\phi\, v\, a = \\ a\, \left(C^\psi\, \tfrac{1}{a} + C^\tau + t\, (-C^\phi\, \tfrac{1}{a} + C^\tau\, t) \right)\,, \end{gathered}$$

или

$$C^\phi\, (1 - a^2) - C^\tau\, v - C^\psi\, a\, v = 0\,. \tag{52}$$

Это же соотношение следует из условия $\delta a = 0$.

Таким образом, для равноускоренного движения вытекает условие, накладываемое на "направляющие косинусы". Значения "направляющих косинусов"определяются значениями скорости и ускорения. В частности, для равномерного движения, когда $a = 0$, должно выполняться

$$C^\phi = 0\,, \quad C^\tau = 0\,, \quad C^\psi = 1\,.$$

Эти соотношения будут следствием (52) и (46), если положить

$$C^\phi = 0\,, \qquad C^\tau\, v + C^\psi\, a\, v = 0\,.$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений для определения C^τ и C^ψ.

$$\begin{gathered} C^\tau\, v + C^\psi\, a\, v = 0\,, \\ (C^\psi)^2 - (C^\tau)^2 = 1\,. \end{gathered}$$

Она имеет следующее решение[8]:

$$C^\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}\,, \quad C^\tau = -\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\,.$$

[8] Другое решение отличается от указанного знаком.

Таким образом, "направляющие косинусы" определены и можно, используя выражение (47), вычислить генератор группы ускоренных движений

$$K_\theta = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & -a \\ \hline & a & \\ \hline\end{array} .$$

Зная генератор K_θ, на основании (40) можно вычислить матрицу преобразования координат при ускоренном движении. Так как

$$(K_\theta)^3 = K_\theta\,, \quad (K_\theta)^4 = (K_\theta)^2\,,$$

матрица U выражается через гиперболические функции

$$\mathrm{U} = \Delta - (K_\theta)^2 + (K_\theta)^2 \cosh\theta + K_\theta \sinh\theta\,,$$

или

$$\mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline\end{array} - \frac{1}{1-a^2} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & -a \\ \hline & 1-a^2 & \\ \hline a & & -a^2 \\ \hline\end{array} +$$

$$+ \frac{1}{1-a^2} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & -a \\ \hline & 1-a^2 & \\ \hline a & & -a^2 \\ \hline\end{array} \cosh\theta +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & -a \\ \hline & a & \\ \hline\end{array} \sinh\theta\,. \tag{53}$$

Теперь установим связь между параметрами ускоренного движения и углом θ. Для этого можно воспользоваться либо соотношением (49), либо (51). Мы остановимся на соотношении (49). Имеем

$$\delta v = \delta\theta\, \left(C^\psi\,(1-v^2) + C^\tau\, a\right)\,.$$

Отсюда получим

$$\delta \frac{v}{\sqrt{1-a^2}} = \delta\theta\, \left(1 - \frac{v^2}{1-a^2}\right)\,.$$

Из этого уравнения имеем

$$\frac{v}{\sqrt{1-a^2}} = \tanh\theta\,.$$

7.1. Преобразование дифференциалов координат

Соотношения (22), (24) и (25) определяют преобразования координат, обобщенные на случай ускоренных движений тела B и системы отсчета K', и законы сложения скоростей и ускорений. Из последнего соотношения следует

$$\cosh\theta = \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,,$$
$$\sinh\theta = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (39), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned}
dt = {} & \left(1 - \frac{1}{1-\boldsymbol{a}^2} + \frac{1}{1-\boldsymbol{a}^2}\,\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\right) dt' + \\
& + \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dx' + \\
& + \left(\frac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2} - \frac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2}\,\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\right) dv'\,, \\
dx = {} & \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dt' + \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,dx' - \\
& - \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dv'\,, \\
dv = {} & \left(-\frac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2} + \frac{\boldsymbol{a}}{1-\boldsymbol{a}^2}\,\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\right) dt' + \\
& + \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\,\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}\,dx' + \\
& + \left(1 + \frac{\boldsymbol{a}^2}{1-\boldsymbol{a}^2} - \frac{\boldsymbol{a}^2}{1-\boldsymbol{a}^2}\,\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{a}^2}}\right) dv'\,.
\end{aligned} \tag{54}$$

В результате получен конкретный вид преобразований (39).

Для $v \ll 1$ и $a \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned}
dt &= dt' + \boldsymbol{v}\,dx'\,, \\
dx &= \boldsymbol{v}\,dt' + dx' - \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dv'\,, \\
dv &= \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dx' + dv'\,.
\end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned}
dt &= dt' + \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,dx'\,, \\
dx &= \boldsymbol{v}\,dt' + dx' - \tfrac{1}{A^2}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dv'\,, \\
dv &= \tfrac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{a}\,dx' + dv'\,.
\end{aligned}$$

В ньютоновском пределе (при $c \to \infty$ и $A \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
dt &= dt'\,, \\
dx &= \boldsymbol{v}\,dt' + dx'\,, \\
dv &= dv'\,.
\end{aligned}$$

III. РАВНОМЕРНОЕ ПЛОСКОЕ ВРАЩЕНИЕ

Рассмотрим частный вектор в пространстве–времени лептона

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\, dx^0 + \varepsilon_4\, c\, dt + \varepsilon_{21}\, R\, d\varphi^{21}\,.$$

Для квадрата интервала этого вектора имеем

$$(dx^0)^2 = c^2\, dt^2 + R^2\, (d\varphi)^2\,.$$

Зададим линейные преобразования вектора в следующем виде:

$$||dx|| = \Omega\, ||dx'||\,,$$
$$\Omega = \mathbf{\Omega} \cdot \Omega'\,,$$

где выражение вида $||dx||$ – это столбец из дифференциалов $c\,dt$ и $R\,d\varphi$, а Ω, $\mathbf{\Omega}$, Ω' – матрицы преобразований. Для того, чтобы преобразование $\mathbf{\Omega}$ сохраняло $(dx^0)^2$, оно должно быть *поворотом* в евклидовой плоскости $(c\,dt, R\,d\varphi)$, то есть, необходимо положить

$$\mathbf{\Omega} = \begin{array}{|c|c|}\hline \cos\Psi & -\sin\Psi \\ \hline \sin\Psi & \cos\Psi \\ \hline\end{array}$$

и

$$\begin{aligned} c\,dt &= \cos\Psi\, c\,(dt)' - \sin\Psi\, R\,(d\varphi)'\,, \\ R\,d\varphi &= \sin\Psi\, c\,(dt)' + \cos\Psi\, R\,(d\varphi)'\,, \end{aligned} \tag{55}$$

где Ψ – угол поворота в указанной плоскости, причем этот угол как-то связан с параметрами движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K. Связь между углом Ψ и параметрами движения системы отсчета K' найдем из уравнения структуры группы преобразований[9]

$$\delta||dx|| = (\delta\mathbf{\Omega}\,\mathbf{\Omega}^{-1})\,||dx||\,.$$

Далее с помощью уравнения структуры получим искомые преобразования координат. Итак, в нашем случае

$$\delta\mathbf{\Omega}\,\mathbf{\Omega}^{-1} = \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline -\sin\Psi & -\cos\Psi \\ \hline \cos\Psi & -\sin\Psi \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \cos\Psi & \sin\Psi \\ \hline -\sin\Psi & \cos\Psi \\ \hline\end{array} =$$

$$= \delta\Psi \begin{array}{|c|c|}\hline & -1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}$$

и

$$\begin{aligned} c\,\delta dt &= -\delta\Psi\, R\, d\varphi\,, \\ R\,\delta d\varphi &= \delta\Psi\, c\, dt\,. \end{aligned} \tag{56}$$

[9] Сравните Раздел I.1.

Используя эти соотношения, вычислим ту часть изменения угловой скорости тела B относительно системы отсчета K, которая вызвана изменением параметров движения системы отсчета K', связанных с углом Ψ.

$$\delta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\delta d\varphi}{dt} - d\varphi\,\frac{\delta dt}{(dt)^2}\,.$$

Учитывая соотношения (56), получим

$$\delta\frac{\omega}{\Omega} = \delta\Psi\,\left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)\,. \tag{57}$$

Здесь

$$\Omega = \frac{c}{R}$$

– постоянная величина, имеющая размерность угловой скорости. Отсюда имеем

$$\omega = \Omega\,\tan(\Psi + \psi')\,, \tag{58}$$

где ψ' – постоянная интегрирования. Это соотношение будем истолковывать следующим образом. Будем полагать, что $\Psi = 0$ соответствует случаю, когда система отсчета K' неподвижна относительно системы отсчета K и соответственно угловая скорость тела B относительно системы отсчета K равна его угловой скорости относительно системы отсчета K', то есть

$$\omega = \Omega\,\tan\psi' = \omega'.$$

Когда угол $\psi' = 0$, угловая скорость тела B относительно системы отсчета K' равна нулю и соответственно его угловая скорость относительно системы отсчета K равна угловой скорости вращения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, то есть

$$\omega = \Omega\,\tan\Psi = \boldsymbol{\omega}.$$

В результате поставленная задача решена: угол Ψ связан только с угловой скоростью вращения системы отсчета K' и следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega\,\tan\Psi\,. \tag{59}$$

Теперь, используя равенство (59), получим

$$\cos\Psi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\Omega^2}}}\,, \qquad \sin\Psi = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\Omega\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\Omega^2}}}\,.$$

Искомое соотношение между дифференциалами координат тела B в системах отсчета K и K' примет вид

$$dt = \frac{dt' - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\Omega^2}\,d\varphi'}{\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\Omega^2}}}\,, \qquad d\varphi = \frac{\boldsymbol{\omega}\,dt' + d\varphi'}{\sqrt{1+\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\Omega^2}}}\,, \tag{60}$$

а из равенства (59) следует закон сложения угловых скоростей

$$\omega = \frac{\boldsymbol{\omega} + \omega'}{1 - \frac{\boldsymbol{\omega}\,\omega'}{\Omega^2}}\,. \tag{61}$$

Этот закон корреспондируется с преобразованием дифференциалов угла и времени. Замечательное свойство приведенного закона сложения состоит в том, что в отличие от сложения скоростей и ускорений сложение угловых скоростей не ограничено фундаментальной угловой скоростью Ω, а при сложении угловых $\boldsymbol{\omega}$ и ω', близких к Ω, закон сложения имеет особенность. Возможно, этим обстоятельством может быть объяснен принцип Паули.

IV. УСКОРЕННОЕ ПЛОСКОЕ ВРАЩЕНИЕ

Рассмотрим частный вектор в пространстве–времени лептона

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\, dx^0 + \varepsilon_4\, c\, dt + \varepsilon_{21}\, R\, d\varphi^{21} + \varepsilon_{124}\, \frac{R\, d\omega^{12}}{\Omega}\,.$$

Множество таких векторов составляет подалгебру алгебры Клиффорда $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$, которую назовем алгеброй ускоренных вращений. Для квадрата интервала этого вектора имеем

$$(dx^0)^2 = c^2\, dt^2 + R^2\, (d\varphi)^2 - \frac{R^2}{(\Omega)^2}\, (d\omega)^2\,.$$

С целью упрощения дальнейших преобразований перейдем к безразмерным координатам. Для этого квадрат интервала разделим на $(L_0)^2$ и выполним следующие переобозначения:

$$\frac{dx^0}{L_0} \to dx^0\,, \quad \frac{dt}{T} \to dt\,, \quad \frac{d\varphi}{2\pi} \to d\varphi\,, \quad \frac{d\omega}{2\pi\Omega} \to d\omega\,.$$

Получим квадрат интервала в следующем виде:

$$(dx^0)^2 = dt^2 + (d\varphi)^2 - (d\omega)^2\,.$$

Поворот в пространстве дифференциалов координат

$$||dx|| = \mathrm{U}\, ||dx'|| \tag{62}$$

сохраняет квадрат интервала. Здесь подобно Разделу I.1. выражение вида $||dx||$ – это столбец из дифференциалов dt, $d\varphi$ и $d\omega$, а U – матрица поворота в некоторой плоскости рассматриваемого пространства. В частности, поворот в плоскости $(dt, d\varphi)$

$$\Omega = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\psi & -\sin\psi & \\ \hline \sin\psi & \cos\psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$$

соответствует равномерному вращению системы отсчета K'. Поворот в псевдоплоскости $(dt, d\omega)$

$$\mathrm{E} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cosh\phi & & \sinh\phi \\ \hline & 1 & \\ \hline \sinh\phi & & \cosh\phi \\ \hline \end{array}$$

соответствует ускоренному вращению системы отсчета K'.

Поворот в псевдоплоскости $(d\varphi, d\omega)$

$$\mathrm{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \cosh\tau & \sinh\tau \\ \hline & \sinh\tau & \cosh\tau \\ \hline \end{array}$$

также сохраняет квадрат интервала.

Произвольное преобразование U, сохраняющее квадрат интервала, представляет собой поворот в произвольной плоскости в трехмерном пространстве $(dt, d\varphi, d\omega)$ на угол θ. Матрица поворота записывается в следующем виде [10]:

$$\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta \cdot K_\theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\theta \cdot K_\theta) + \frac{1}{2!}\,(\theta \cdot K_\theta)^2 + \ldots\,, \tag{63}$$

где

$$K_\theta = \left.\frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\right|_{\theta=0}$$

– генератор поворота. Матрица поворота удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению[11]:

$$\delta\mathrm{U}(\theta) = \delta\theta \cdot K_\theta \cdot \mathrm{U}(\theta)\,. \tag{64}$$

В частности, вышеуказанным соотношениям удовлетворяют матрицы поворотов Ω, E, T. Им соответствуют следующие генераторы поворотов:

$$K_\psi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\,, \quad K_\phi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}\,, \quad K_\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}\,.$$

Чтобы установить связь между углами ψ, ϕ и τ с одной стороны и угловой скоростью $\omega = d\varphi/dt$ и угловым ускорением $\varepsilon = d\omega/dt$ тела B с другой, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов в соответствии с уравнениями структуры группы преобразований:

$$\delta||dx|| = (\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1})\,||dx||\,. \tag{65}$$

Из соотношения (64) следует

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\theta \cdot K_\theta\,. \tag{66}$$

Выразим $\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}$ через матрицы поворотов в базисных плоскостях

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\Omega\,\Omega^{-1} + \delta\mathrm{E}\,\mathrm{E}^{-1} + \delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1}\,. \tag{67}$$

---

[10] См. Раздел I.2.

[11] Как и прежде, при дифференцировании по углу дифференциал будем обозначать δ.

Здесь

$$\delta\Omega\,\Omega^{-1} = \delta\psi\,K_\psi = \delta\psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\delta\mathrm{E}\,\mathrm{E}^{-1} = \delta\phi\,\mathrm{K}_\phi = \delta\phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1} = \delta\tau\,K_\tau = \delta\tau \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}\,.$$

Рассматривая функции $\psi(\theta)$, $\phi(\theta)$, $\tau(\theta)$ как линейные, введем соотношения

$$\delta\psi = \delta\theta\,C^\psi\,, \quad \delta\phi = \delta\theta\,C^\phi\,, \quad \delta\tau = \delta\theta\,C^\tau\,. \tag{68}$$

Здесь C^ψ, C^ϕ, C^τ – "направляющие косинусы" – постоянные величины, определяющие положение произвольной плоскости относительно базисных плоскостей. Они удовлетворяют условию

$$(C^\psi)^2 - (C^\phi)^2 - (C^\tau)^2 = 1\,. \tag{69}$$

Соотношения (66), (67) и (68) позволяют выразить генератор произвольного поворота через генераторы базисных поворотов

$$K_\theta = C^\psi\,K_\psi + C^\phi\,K_\phi + C^\tau\,K_\tau\,. \tag{70}$$

Используя это соотношение, запишем уравнение структуры (65) в следующем виде:

$$\delta||dx|| = \delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}\,||dx|| = \delta\theta \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -C^\psi & C^\phi \\ \hline C^\psi & & C^\tau \\ \hline C^\phi & C^\tau & \\ \hline \end{array}\,||dx||\,.$$

Используя эту матрицу, получим

$$\begin{aligned} \delta dt &= \delta\theta\,(-C^\psi\,d\varphi + C^\phi\,d\omega)\,, \\ \delta d\varphi &= \delta\theta\,(C^\psi\,dt + C^\tau\,d\omega)\,, \\ \delta d\omega &= \delta\theta\,(C^\phi\,dt + C^\tau\,d\varphi)\,. \end{aligned} \tag{71}$$

Чтобы установить связь между углами ψ, ϕ и τ и угловой скоростью тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\omega = \delta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\delta d\varphi}{dt} - \omega\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя соотношения (71), получим

$$\delta\omega = \delta\theta\,\left(C^\psi\,(1+\omega^2) + C^\tau\,\varepsilon - C^\phi\,\omega\,\varepsilon\right)\,, \tag{72}$$

где введено обозначение $\varepsilon = d\omega/dt$.

Аналогично рассмотрим дифференциал

$$\delta\varepsilon = \delta\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta d\omega}{dt} - \varepsilon\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя соотношения (71), получим

$$\delta\varepsilon = \delta\theta\,\left(C^\phi\,(1-\varepsilon^2) + C^\tau\,\omega + C^\psi\,\omega\,\varepsilon\right)\,, \tag{73}$$

Кроме того, рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{d\varphi}{d\omega} = \delta\frac{\omega}{\varepsilon}\,.$$

Используя соотношение

$$\omega = \varepsilon\,t\,,$$

этот дифференциал можно записать в виде

$$\delta\frac{d\varphi}{d\omega} = \delta t\,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta t = \frac{\delta d\varphi}{d\omega} - t\,\frac{\delta d\omega}{d\omega}\,.$$

Используя соотношения (71), получим

$$\delta t = \delta\theta\,\left(C^\psi\,\tfrac{1}{\varepsilon} + C^\tau - t\,(C^\phi\,\tfrac{1}{\varepsilon} + C^\tau\,t)\right)\,. \tag{74}$$

Для равноускоренного движения должно выполняться

$$\delta\omega = \varepsilon\,\delta t\,, \qquad \delta\varepsilon = 0\,.$$

Подставляя в первое соотношение выражения (72) и (74), получим

$$\begin{aligned} &C^\psi\,(1+\omega^2) + C^\tau\,\varepsilon - C^\phi\,\omega\,\varepsilon = \\ &\qquad \varepsilon\,\left(C^\psi\,\tfrac{1}{\varepsilon} + C^\tau - t\,(C^\phi\,\tfrac{1}{\varepsilon} + C^\tau\,t)\right) \end{aligned}$$

или

$$C^\phi\,(1-\varepsilon^2) + C^\tau\,\omega + C^\psi\,\varepsilon\,\omega = 0\,. \tag{75}$$

Это же соотношение следует из условия $\delta\varepsilon = 0$. Оно представляет собой условие, накладываемое на "направляющие косинусы" для равноускоренного движения. Значения "направляющих косинусов" определяются значениями угловых скорости и ускорения. В частности, для равномерного вращения, когда $\varepsilon = 0$, должно выполняться

$$C^\phi = 0\,, \quad C^\tau = 0\,, \quad C^\psi = 1\,.$$

Эти соотношения будут следствием соотношений (69) и (75), если положить

$$C^\phi = 0\,, \qquad C^\tau\,\omega + C^\psi\,\varepsilon\,\omega = 0\,.$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений для определения C^τ и C^ψ:

$$C^\tau\,\omega + C^\psi\,\varepsilon\,\omega = 0\,,$$
$$(C^\psi)^2 - (C^\tau)^2 = 1\,.$$

Она имеет следующее решение[12]:

$$C^\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,, \quad C^\tau = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,.$$

В результате "направляющие косинусы" определены и можно, используя выражение (70), вычислить генератор группы ускоренных движений

$$K_\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -1 & \\ \hline 1 & & -\varepsilon \\ \hline & -\varepsilon & \\ \hline \end{array}\,.$$

Зная генератор K_θ, на основании равенства (63) можно вычислить матрицу преобразования координат при ускоренном движении. Так как

$$(K_\theta)^3 = -K_\theta\,, \quad (K_\theta)^4 = -(K_\theta)^2\,,$$

эта матрица выражается через тригонометрические функции

$$\mathrm{U} = \Delta + (K_\theta)^2 - (K_\theta)^2\,\cos\theta + K_\theta\,\sin\theta \tag{76}$$

или

$$\mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & & \varepsilon \\ \hline & -1+\varepsilon^2 & \\ \hline -\varepsilon & & \varepsilon^2 \\ \hline \end{array} -$$

$$- \frac{1}{1-\varepsilon^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & & \varepsilon \\ \hline & -1+\varepsilon^2 & \\ \hline -\varepsilon & & \varepsilon^2 \\ \hline \end{array} \cos\theta \; +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -1 & \\ \hline 1 & & -\varepsilon \\ \hline & -\varepsilon & \\ \hline \end{array} \sin\theta\,.$$

Теперь установим связь между параметрами ускоренного движения и углом θ. Для этого можно воспользоваться либо соотношением (73), либо (72). Мы остановимся на последнем. Имеем

$$\delta\omega = \delta\theta\,\left(C^\psi\,(1+\omega^2) + C^\tau\,\varepsilon\right)\,.$$

Отсюда получим

$$\delta\frac{\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \delta\theta\,\left(1 + \frac{\omega^2}{1-\varepsilon^2}\right)\,.$$

Из этого уравнения имеем

$$\frac{\omega}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \tan\theta\,. \tag{77}$$

1. Преобразование дифференциалов координат

Соотношения (62), (76) и (77) определяют преобразования координат, обобщенные на случай ускоренных вращений тела B и системы отсчета K', и законы сложения угловых скоростей и ускорений. Из последнего соотношения следует

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,,$$
$$\sin\theta = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (62), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned} dt = &\left(1 - \frac{1}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} + \frac{1}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}\,\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right) dt' - \\ &- \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,d\varphi' + \\ &+ \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}\,\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right) d\omega'\,, \\ d\varphi = &\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,dt' + \frac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,d\varphi' - \\ &- \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,dv'\,, \\ d\omega = &\left(-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}\,\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right) dt' - \\ &- \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\,d\varphi' + \\ &+ \left(1 + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}\,\frac{\sqrt{1-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}}\right) d\omega'\,. \end{aligned} \tag{78}$$

В результате получен конкретный вид преобразований (62).

Для $\omega \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned} dt &= dt' - \boldsymbol{\omega}\,d\varphi'\,, \\ d\varphi &= \boldsymbol{\omega}\,dt' + d\varphi' - \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\omega'\,, \\ d\omega &= -\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\varphi' + d\omega'\,. \end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned} dt &= dt' - \tfrac{1}{\Omega^2}\,\boldsymbol{\omega}\,d\varphi'\,, \\ d\varphi &= \boldsymbol{\omega}\,dt' + d\varphi' - \tfrac{1}{\mathrm{E}^2}\,\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\omega'\,, \\ d\omega &= -\tfrac{1}{\Omega^2}\,\boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\varphi' + d\omega'\,. \end{aligned}$$

Здесь Ω - предельная угловая скорость, E - предельное угловое ускорение. В ньютоновском пределе (при $\Omega \to \infty$ и $\mathrm{E} \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dt &= dt'\,, \\ d\varphi &= \boldsymbol{\omega}\,dt' + d\varphi'\,, \\ d\omega &= d\omega' \equiv \boldsymbol{\varepsilon}\,dt'\,. \end{aligned}$$

[12] Другое решение отличается от указанного знаком.

V. УСКОРЕННОЕ ТЕЛЕСНОЕ ВРАЩЕНИЕ

Рассмотрим частный вектор в пространстве-времени лептона

$$d\mathbf{x} = \varepsilon_0\, dx^0 + \varepsilon_4\, c\, dt + \varepsilon_{123}\, R\, d\varphi^{123} + \varepsilon_{1324}\, \frac{R\, d\omega^{132}}{\Omega_T}\,.$$

Множество таких векторов составляет подалгебру алгебры Клиффорда $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$. Назовем ее алгеброй ускоренных телесных вращений. Для квадрата интервала этого вектора имеем

$$(dx^0)^2 = c^2\, dt^2 + R^2\, (d\varphi)^2 + \frac{R^2}{(\Omega_T)^2}\, (d\omega)^2\,.$$

С целью упрощения дальнейших преобразований перейдем к безразмерным координатам. Для этого квадрат интервала разделим на $(L_0)^2$ и выполним следующие переобозначения:

$$\frac{dx^0}{L_0} \to dx^0\,, \quad \frac{dt}{T} \to dt\,, \quad \frac{d\varphi}{2\pi} \to d\varphi\,, \quad \frac{d\omega}{2\pi\Omega_T} \to d\omega\,.$$

Получим квадрат интервала в следующем виде:

$$(dx^0)^2 = dt^2 + d\varphi^2 + d\omega^2\,.$$

Поворот в пространстве дифференциалов координат

$$||dx|| = \mathrm{U}\, ||dx'|| \tag{79}$$

сохраняет квадрат интервала. Здесь подобно Разделу I.1. выражение вида $||dx||$ – это столбец из дифференциалов dt, $d\varphi$ и $d\omega$, а U – матрица поворота в некоторой плоскости рассматриваемого пространства. В частности, поворот в плоскости $(dt, d\varphi)$

$$\Omega = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\psi & -\sin\psi & \\ \hline \sin\psi & \cos\psi & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$$

соответствует равномерному вращению системы отсчета K'. Поворот в плоскости $(dt, d\omega)$

$$\mathrm{E} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \cos\phi & & \sin\phi \\ \hline & 1 & \\ \hline -\sin\phi & & \cos\phi \\ \hline \end{array}$$

соответствует ускоренному вращению системы отсчета K'. Поворот в плоскости $(d\varphi, d\omega)$

$$\mathrm{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & \cos\tau & -\sin\tau \\ \hline & \sin\tau & \cos\tau \\ \hline \end{array}$$

также приводит к сохранению квадрата интервала.

Отсюда следует, что группа ускоренных телесных вращений изоморфна группе поворотов в трехмерном пространстве $O(3)$. Это обстоятельство будет использовано в Главе 5.2. при формулировке электрослабого взаимодействия.

Произвольное преобразование U, сохраняющее квадрат интервала, представляет собой поворот в произвольной плоскости в трехмерном пространстве $(dt, d\varphi, d\omega)$ на угол θ. Матрицу поворота можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta \cdot K_\theta) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\theta \cdot K_\theta) + \frac{1}{2!}\,(\theta \cdot K_\theta)^2 + \ldots\,, \tag{80}$$

где

$$K_\theta = \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}_{\,\theta=0}$$

– генератор поворота. Матрица поворота удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\delta\mathrm{U}(\theta) = \delta\theta \cdot K_\theta \cdot \mathrm{U}(\theta)\,. \tag{81}$$

В частности, вышеуказанным соотношениям удовлетворяют матрицы поворотов Ω, E, T. Им соответствуют следующие генераторы поворотов:

$$K_\psi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\,, \quad K_\phi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline -1 & & \\ \hline \end{array}\,, \quad K_\tau = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & -1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}\,.$$

Для того, чтобы установить связь между углами ψ, ϕ и τ с одной стороны и телесной угловой скоростью $\omega = dx/dt$ и телесным угловым ускорением $\varepsilon = d\omega/dt$ тела B с другой стороны, рассмотрим изменение дифференциалов координат при изменении углов ψ, ϕ и τ, обусловленное уравнениями структуры группы преобразований

$$\delta||dx|| = (\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1})\, ||dx||\,. \tag{82}$$

Из соотношения (81) следует

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\theta \cdot K_\theta\,. \tag{83}$$

Выразим $\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}$ через матрицы поворотов в базисных плоскостях

$$\delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1} = \delta\Omega\,\Omega^{-1} + \delta\mathrm{E}\,\mathrm{E}^{-1} + \delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1}\,. \tag{84}$$

Здесь

$$\delta\Omega\,\Omega^{-1} = \delta\psi\, K_\psi = \delta\psi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\delta\mathrm{E}\,\mathrm{E}^{-1} = \delta\phi\, \mathrm{K}_\phi = \delta\phi \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\delta\mathrm{T}\,\mathrm{T}^{-1} = \delta\tau\,K_\tau = \delta\tau \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & -1 & \\ \hline\end{array} . \tag{85}$$

Рассматривая функции $\psi(\theta)$, $\phi(\theta)$, $T(\theta)$ как линейные, введем соотношения

$$\delta\psi = \delta\theta\, C^\psi\,, \quad \delta\phi = \delta\theta\, C^\phi\,, \quad \delta\tau = \delta\theta\, C^\tau\,.$$

Здесь C^ψ, C^ϕ, C^τ – "направляющие косинусы" – постоянные величины, определяющие положение произвольной плоскости относительно базисных плоскостей. Они удовлетворяют условию

$$(C^\psi)^2 + (C^\phi)^2 + (C^\tau)^2 = 1\,. \tag{86}$$

Соотношения (83), (84) и (85) позволяют выразить генератор произвольного поворота через генераторы базисных поворотов

$$K_\theta = C^\psi\, K_\psi + C^\phi\, K_\phi + C^\tau\, K_\tau\,. \tag{87}$$

Используя это соотношение, запишем выражение (82) в следующем виде:

$$\delta||dx|| = \delta\mathrm{U}\,\mathrm{U}^{-1}\,||dx|| = \delta\theta \begin{array}{|c|c|c|}\hline & -C^\psi & C^\phi \\ \hline C^\psi & & -C^\tau \\ \hline -C^\phi & C^\tau & \\ \hline\end{array} ||dx||\,.$$

Используя эту матрицу, получим

$$\begin{aligned} \delta dt &= \delta\theta\,(-C^\psi\, d\varphi + C^\phi\, d\omega)\,, \\ \delta d\varphi &= \delta\theta\,(C^\psi\, dt - C^\tau\, d\omega)\,, \\ \delta d\omega &= \delta\theta\,(-C^\phi\, dt + C^\tau\, d\varphi)\,. \end{aligned} \tag{88}$$

Чтобы установить связь между углами ψ и ϕ и скоростью тела B, рассмотрим дифференциал

$$\delta\omega = \delta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\delta d\varphi}{dt} - \omega\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя выражения (88), получим

$$\delta\omega = \delta\theta\,\left(C^\psi\,(1+\omega^2) - C^\tau\,\varepsilon - C^\phi\,\omega\,\varepsilon\right)\,, \tag{89}$$

где введено обозначение $\varepsilon = d\omega/dt$.

Аналогично рассмотрим дифференциал

$$\delta\varepsilon = \delta\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta d\omega}{dt} - \varepsilon\,\frac{\delta dt}{dt}\,.$$

Используя выражения (89), получим

$$\delta\varepsilon = \delta\theta\,\left(-C^\phi\,(1+\varepsilon^2) + C^\tau\,\omega + C^\psi\,\omega\,\varepsilon\right)\,. \tag{90}$$

Кроме того, рассмотрим дифференциал

$$\delta\frac{d\varphi}{d\omega} = \delta\frac{\omega}{\varepsilon}\,.$$

Используя соотношение

$$\omega = \varepsilon\, t\,,$$

его можно записать в виде

$$\delta\frac{d\varphi}{d\omega} = \delta t\,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta t = \frac{\delta d\varphi}{d\omega} - t\,\frac{\delta d\omega}{d\omega}\,.$$

Используя выражения (88), получим

$$\delta t = \delta\theta\,\left(C^\psi\,\frac{1}{\varepsilon} + + C^\tau + t\,(-C^\phi\,\frac{1}{\varepsilon} + C^\tau\, t)\right)\,. \tag{91}$$

Для равноускоренного движения должно выполняться

$$\delta\omega = \varepsilon\,\delta t\,, \qquad \delta\varepsilon = 0\,.$$

Подставляя в первое соотношение выражения (89) и (91), получим

$$\begin{gathered} C^\psi\,(1+\omega^2) - C^\tau\,\varepsilon - C^\phi\,\omega\,\varepsilon = \\ \varepsilon\,\left(C^\psi\,\tfrac{1}{\varepsilon} - C^\tau + t\,(C^\phi\,\tfrac{1}{\varepsilon} - C^\tau\, t)\right) \end{gathered}$$

или

$$-C^\phi\,(1+\varepsilon^2) + C^\tau\,\omega + C^\psi\,\varepsilon\,\omega = 0\,. \tag{92}$$

Это же соотношение следует из условия $\delta\varepsilon = 0$.

Таким образом, для равноускоренного движения вытекает условие, накладываемое на "направляющие косинусы". Значения "направляющих косинусов" определяются значениями угловых скорости и ускорения. В частности, для равномерного вращения, когда $\varepsilon = 0$, должно выполняться

$$C^\phi = 0\,, \quad C^\tau = 0\,, \quad C^\psi = 1\,.$$

Эти соотношения будут следствием равенств (86) и (92), если положить

$$C^\phi = 0\,, \qquad C^\tau\,\omega + C^\psi\,\varepsilon\,\omega = 0\,.$$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений для определения C^τ и C^ψ:

$$\begin{gathered} C^\tau + C^\psi\,\varepsilon = 0\,, \\ (C^\psi)^2 + (C^\tau)^2 = 1\,. \end{gathered}$$

Она имеет следующее решение[13]:

$$C^\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,, \quad C^\tau = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,.$$

---

[13] Другое решение отличается от указанного знаком.

Таким образом, "направляющие косинусы" определены и можно, используя выражение (87), вычислить генератор группы ускоренных движений

$$K_\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -1 & \\ \hline 1 & & \varepsilon \\ \hline & -\varepsilon & \\ \hline \end{array} .$$

Зная генератор K_θ, на основании выражения (80) можно вычислить матрицу преобразования координат при ускоренном движении. Так как

$$(K_\theta)^3 = -K_\theta \,, \quad (K_\theta)^4 = -(K_\theta)^2 \,,$$

эта матрица выражается через тригонометрические функции

$$\mathrm{U} = \Delta + (K_\theta)^2 - (K_\theta)^2 \cos\theta + K_\theta \sin\theta$$

или

$$\mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \; - \frac{1}{1+\varepsilon^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \varepsilon \\ \hline & 1+\varepsilon^2 & \\ \hline \varepsilon & & \varepsilon^2 \\ \hline \end{array} \; +$$

$$+ \frac{1}{1+\varepsilon^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \varepsilon \\ \hline & 1+\varepsilon^2 & \\ \hline \varepsilon & & \varepsilon^2 \\ \hline \end{array} \cos\theta \; +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -1 & \\ \hline 1 & & \varepsilon \\ \hline & -\varepsilon & \\ \hline \end{array} \sin\theta \,.$$

Теперь установим связь между параметрами ускоренного движения и углом θ. Для этого можно воспользоваться либо соотношением (89), либо (91). Мы остановимся на соотношении (89). Имеем

$$\delta\omega = \delta\theta \,\left(C^\psi \,(1+\omega^2) + C^\tau \,\varepsilon \right) \,.$$

Отсюда получим

$$\delta \frac{\omega}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \delta\theta \left(1 + \frac{\omega^2}{1+\varepsilon^2} \right) \,.$$

Из этого уравнения имеем

$$\frac{\omega}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \tan\theta \,.$$

1. Преобразование дифференциалов координат

Из последнего соотношения следует

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \,,$$

$$\sin\theta = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \,.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (79), получим преобразования дифференциалов координат:

$$\begin{aligned}
dt = & \left(1 - \frac{1}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2} + \frac{1}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2} \, \frac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \right) dt' - \\
& - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \frac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, d\varphi' + \\
& + \left(- \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \frac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \right) d\omega' \,, \\
d\varphi = & \frac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, dt' + \frac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, d\varphi' + \\
& + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, d\omega' \,, \\
d\omega = & \left(- \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2} \, \frac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \right) dt' - \\
& - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2-\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \, d\varphi' + \\
& + \left(1 - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^2}{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2} \, \frac{\sqrt{1+\boldsymbol{\varepsilon}^2}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\omega}^2+\boldsymbol{\varepsilon}^2}} \right) d\omega' \,. \qquad (93)
\end{aligned}$$

Таким образом, в результате получен конкретный вид преобразований (79).

Для $\omega \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$ преобразования сводятся к

$$\begin{aligned}
dt = & \; dt' - \boldsymbol{\omega} \, d\varphi' \,, \\
d\varphi = & \; \boldsymbol{\omega} \, dt' + d\varphi' + \boldsymbol{\omega} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, d\omega' \,, \\
d\omega = & \; - \boldsymbol{\omega} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, d\varphi' + d\omega' \,.
\end{aligned}$$

Переходя к размерным величинам, получим

$$\begin{aligned}
dt \; & = dt' - \tfrac{1}{(\Omega_T)^2} \, \boldsymbol{\omega} \, d\varphi' \,, \\
d\varphi \; & = \boldsymbol{\omega} \, dt' + d\varphi' + \tfrac{1}{(\mathrm{E_T})^2} \, \boldsymbol{\omega} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, d\omega' \,, \\
d\omega \; & = - \tfrac{1}{(\Omega_T)^2} \, \boldsymbol{\omega} \, \boldsymbol{\varepsilon} \, d\varphi' + d\omega' \,.
\end{aligned}$$

Здесь Ω_T – предельная телесная угловая скорость, $\mathrm{E_T}$ – предельное телесное угловое ускорение. В ньютоновском пределе (при $\Omega_T \to \infty$ и $\mathrm{E_T} \to \infty$) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
dt \; & = dt' \,, \\
d\varphi \; & = \boldsymbol{\omega} \, dt' + d\varphi' \,, \\
d\omega \; & = d\omega' \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \, dt' \,.
\end{aligned}$$

VI. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Специальная теория относительности в пространстве-времени лептона обобщает специальную теорию относительности в 4-х мерном пространстве-времени.

- Из линейных преобразований в пространстве-времени лептона можно выделить повороты, которые описывают:

1) прямолинейное ускоренное движение,

2) равномерное плоское вращение,

3) ускоренное плоское вращение,

4) ускоренное телесное вращение.

- Группа ускоренных телесных вращений изоморфна группе $O(3)$. Это обстоятельство следует иметь в виду при формулировке электрослабого взаимодействия лептонов.

Глава 1.5 Линейные преобразования пространства-времени

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Фундаментальные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с пространством-временем $\mathbb{X}$. В соответствии с Главой 1.1. Раздел III. *движение* пространства-времени (тел и процессов) определено, если определено *преобразование* $f\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ ($\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$). Таким образом, движение как физическое явление отождествляется с преобразованием $f\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ ($\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$) как элементом математики. Пространство-время $\mathbb{X}$, по отношению к которому определяется движущееся пространство-время $\mathbb{X}'$, называется *системой отсчета*. Исследование преобразования общего вида $\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$ начнем с *линейного* преобразования, которое обозначим $\mathbb{X}' = l(\mathbb{X})$.[1]

В классической физике ключевую роль играют преобразования, которые не влияют на физические явления. Такие преобразования составляют группу Пуанкаре. И в этом смысле мы будем называть преобразования группы Пуанкаре *инвариантными преобразованиями*. К преобразованиям группы Пуанкаре относятся сдвиги (трансляции) и повороты в пространстве-времени СТО – сдвиги геометрических точек и времени, повороты в геометрических плоскостях и движения с постоянной скоростью. В теории, которую мы излагаем, для фундаментальных объектов, примером которых служат фундаментальные частицы, вводится пространство-время $\mathbb{X}$, обобщающее пространство-время СТО. Отсюда возникает необходимость обобщения группы Пуанкаре как группы инвариантных преобразований. В частности, сдвиги геометрических точек и сдвиги времени, входящие в группу Пуанкаре, необходимо дополнить сдвигами отрезков линий, площадей, сдвигами скорости, угловой скорости и телесной угловой скорости. В отличие от сдвигов в пространстве-времени СТО сдвиги в пространстве-времени $\mathbb{X}$ образуют алгебру. Кроме того, повороты в геометрических плоскостях и движения с постоянной скоростью, входящие в группу Пуанкаре, необходимо обобщить до поворотов относительно всех базисных векторов в пространстве-времени $\mathbb{X}$.

Взаимодействие частиц приводит к преобразованию пространства действия этих частиц. Помимо этого, взаимодействие приводит к преобразованию пространства-времени частиц. Результатом взаимодействия является образование новых частиц со своим пространством действия и со своим пространством-временем. Каждой фундаментальной частице соответствует свой тип пространства-времени $\mathbb{X}$, поэтому наряду с инвариантными преобразованиями, не выводящими за рамки типа пространства-времени, необходимо ввести преобразования, изменяющие тип пространства-времени. Такие преобразования сопутствуют взаимодействию элементарных частиц.

Для фундаментальных антиобъектов, примером которых служат фундаментальные античастицы, вводится сопряженное пространство-время $\mathbb{X}^*$. Движение фундаментальных антиобъектов отождествляется с *сопряженным* преобразованием общего вида $f^*\colon\ \mathbb{X}^*\to\mathbb{X}'^*$ ($\mathbb{X}'^* = f^*(\mathbb{X}^*)$). Исследование сопряженного преобразования общего вида $\mathbb{X}'^* = f^*(\mathbb{X}^*)$ также начнем с *линейного сопряженного* преобразования, которое обозначим $l^*\colon\ \mathbb{X}^*\to\mathbb{X}'^*$ ($\mathbb{X}'^* = l^*(\mathbb{X}^*)$). Вышеуказанные преобразования объединяются в *общую кинематическую алгебру*, которая является обобщением классической группы инвариантных преобразований – группы Пуанкаре.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ СТО

При *движении* вектор $\mathbf{x}$ пространства-времени СТО X, принятого за систему отсчета, преобразуется в вектор $\mathbf{x}'$ движущегося (или сдвинутого) пространства-времени X'. Введем оператор, который ставит в соответствие вектору $\mathbf{x} \in X$ вектор $\mathbf{x}' \in X'$. Обозначим такой оператор $\mathbf{l}(\ )$ и назовем его *преобразованием*. Таким образом,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x})\,.$$

Будем считать, что преобразования $\mathbf{l}(\ )$ *линейны* относительно сложения векторов и умножения вектора на число, то есть,

$$\mathbf{l}(\alpha_1\cdot\mathbf{x}_1 + \alpha_2\cdot\mathbf{x}_2) = \alpha_1\cdot\mathbf{l}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2\cdot\mathbf{l}(\mathbf{x}_2).$$

Обозначим множество линейных преобразований пространства-времени СТО следующим образом: L. Введем на множестве преобразований L операции сложения $\oplus$

$$\mathbf{l}_1(\ ) \oplus \mathbf{l}_2(\ ) = \mathbf{l}(\ ) \in L$$

и умножения на число $\odot$

$$\alpha \odot \mathbf{l}_1(\ ) = \mathbf{l}(\ ) \in L\,.$$

Пусть эти операции также удовлетворяют закону дистрибутивности

$$\alpha \odot [\mathbf{l}_1(\ ) \oplus \mathbf{l}_2(\ )] = \alpha \odot \mathbf{l}_1(\ ) \oplus \alpha \odot \mathbf{l}_2(\ )\,.$$

В результате множество преобразований L становится векторным пространством.

---

[1] Подобно тому, как исследование функциональной зависимости общего вида начинается с линейной функции.

Необходимо отметить, что операция сложения $\oplus$ и операция умножения на число $\odot$ в векторном пространстве L должны быть *согласованы* соответственно с операцией сложения $+$ и операцией умножения на число $\cdot$ в векторном пространстве X'. Условие согласования состоит в том, что результатом действия оператора

$$\alpha_1 \odot \mathbf{l}_1(\ ) \oplus \alpha_2 \odot \mathbf{l}_2(\ )$$

на вектор $\mathbf{x} \in X$ должен быть вектор

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{x}'_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}'_2 \in X'\,,$$

то есть после действия оператора $\oplus$-сложение становится $+$-сложением, а $\odot$-умножение становится $\cdot$-умножением.

Введем *базисные преобразования* $\mathbf{I}^i{}_m(\ )$, чтобы имело место

$$\mathbf{l}(\ ) = \mathbf{I}^i{}_m(\ ) \cdot l^m{}_i\,,$$

где $l^m{}_i$ – *координаты преобразования* $\mathbf{l}(\ )$. Линейное преобразование вектора $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot x^k$ должно иметь вид:

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}(\mathbf{e}_k \cdot x^k) = \mathbf{e}_m \cdot l^m{}_k \cdot x^k\,.$$

Из этого условия найдем правило преобразования базисных векторов $\mathbf{e}_k$ пространства X с помощью базисных преобразований $\mathbf{I}^i{}_m(\ )$:

$$\mathbf{I}^i{}_m(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_m \cdot \delta^i{}_k\,.$$

Для него выполняется требуемое соотношение

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}) = l^m{}_i \cdot \mathbf{I}^i{}_m(\mathbf{x}) = l^m{}_i \cdot x^k \cdot \mathbf{I}^i{}_m(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_m \cdot l^m{}_k \cdot x^k\,.$$

III. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Далее будем рассматривать линейные преобразования обобщенного пространства-времени $\mathbb{X}$. Введем оператор, который ставит в соответствие вектору $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ вектор $\mathbf{x}' \in \mathbb{X}'$. Как и прежде обозначим такой оператор $\mathbf{l}(\ )$ и назовем его *преобразованием*. Указанное соответствие будем записывать так:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x})\,.$$

Потребуем, чтобы преобразование $\mathbf{l}(\ )\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ было *линейным*, то есть, выполнялось соотношение

$$\mathbf{l}(\alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \cdot \mathbf{l}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \cdot \mathbf{l}(\mathbf{x}_2).$$

Вектор $\mathbf{x}$ обобщенного пространства-времени $\mathbb{X}$ может быть разложен по базисным векторам $\mathbf{e}_K$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0\, x^0 + \mathbf{e}_i\, x^i + \mathbf{e}_{ij}\, x^{ij} + \mathbf{e}_{ijk}\, x^{ijk} + \mathbf{e}_{1324}\, x^{1324}\,.$$

Как принято, мы записываем это соотношение, используя собирательные индексы

$$I,\ J,\ K,\ L, \sim (0,\ i,\ ij,\ ijk,\ 1324)\,,$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot x^K\,.$$

Поэтому вектор $\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x})$ в силу линейности преобразования может быть записан в виде

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{e}_K) \cdot x^K\,.$$

Введем разложение векторов $\mathbf{l}(\mathbf{e}_K)$ по базисным векторам $\mathbf{e}_M$

$$\mathbf{l}(\mathbf{e}_K) = \mathbf{e}_M \cdot l^M{}_K\,.$$

Здесь $l^M{}_K$–коэффициенты разложения. Используя это соотношение, получим[2]

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}_M \cdot l^M{}_K \cdot x^K\,. \tag{1}$$

1. Векторное пространство линейных преобразований

Обозначим множество линейных преобразований $\mathbb{L}$. На нем определим операции сложения $\oplus$

$$\mathbf{l}_1(\ ) \oplus \mathbf{l}_2(\ ) \in \mathbb{L}$$

и умножения на число $\odot$

$$\alpha \odot \mathbf{l}(\ ) \in \mathbb{L}\,.$$

Пусть эти операции удовлетворяют закону дистрибутивности.

$$\alpha \odot [\mathbf{l}_1(\ ) \oplus \mathbf{l}_2(\ )] = \alpha \odot \mathbf{l}_1(\ ) \oplus \alpha \odot \mathbf{l}_2(\ )\,. \tag{2}$$

В результате множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ становится векторным пространством. Соответствие закона дистрибутивности в $\mathbb{L}$ закону дистрибутивности в $\mathbb{X}$

$$\alpha \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha \cdot \mathbf{x}_2$$

---

[2] Заметим, что выражение (1) для преобразованного вектора допускает двойное толкование преобразования $\mathbf{l}(\ )\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$:
первое – преобразованный вектор

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}_M \cdot x'^M\,,\quad \text{где}\ \ x'^M = l^M{}_I \cdot x^I$$

имеет преобразованные координаты и принадлежит системе отсчета (записан в базисе $\mathbf{e}_M$)
второе – преобразованный вектор

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}'_K \cdot x^K\,,\quad \text{где}\ \ \mathbf{e}'_K = \mathbf{e}_M \cdot l^M{}_K$$

имеет имеет координаты исходного вектора и принадлежит преобразованному пространству (записан в базисе $\mathbf{e}'_K$).

можно рассматривать как условия согласования сложений "$\oplus$"и "+"и умножений "$\odot$"и " $\cdot$ ". Эти условия сводятся к тому, что $\oplus$ -сложение становится $+$ -сложением, а $\odot$ -умножение становится $\cdot$ -умножением после действия оператора (2) на вектор $\mathbf{x}$.

На векторном пространстве $\mathbb{L}$ введем *базисные преобразования* $\mathbf{I}^I{}_M(\ )$, чтобы

$$\mathbf{l}(\ ) = \mathbf{I}^I{}_M(\ ) \cdot l^M{}_I\,,$$

где $l^M{}_I$ есть *координаты* преобразования $\mathbf{l}(\ )$, представляющие собой ранее введенные коэффициенты разложения векторов $\mathbf{l}(\mathbf{e}_K)$ по базисным векторам $\mathbf{e}_M$. Линейное преобразование вектора $\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot x^K$ должно иметь вид (1). Таким образом, должно выполняться

$$\mathbf{I}^I{}_M(\mathbf{e}_K) \cdot l^M{}_I \cdot x^K = \mathbf{e}_M \cdot l^M{}_K \cdot x^K\,.$$

Из этого условия найдем правило преобразования базисных векторов $\mathbf{e}_K$ пространства $\mathbb{X}$ с помощью базисных преобразований $\mathbf{I}^I{}_M(\ )$:

$$\mathbf{I}^I{}_M(\mathbf{e}_K) = \mathbf{e}_M \cdot \delta^I{}_K\,, \tag{3}$$

где $\delta^I{}_K$ есть символ Кронекера.

2. Группа линейных преобразований. Алгебра линейных преобразований

На множестве линейных преобразований $\mathbb{L}$ введем *закон композиции*[3], то есть двум преобразованиям $\mathbf{l}_1(\ )$ и $\mathbf{l}_2(\ )$ ставится в соответствие преобразование $\mathbf{l}(\ )$, называемое композицией или произведением преобразований $\mathbf{l}_1(\ )$ и $\mathbf{l}_2(\ )$. Возможны два вида композиции:

левая, когда

$$_l\mathbf{l}(\ ) = \mathbf{l}_2(\mathbf{l}_1(\ ))\,, \tag{4}$$

правая, когда

$$_r\mathbf{l}(\ ) = \mathbf{l}_1(\mathbf{l}_2(\ ))\,. \tag{5}$$

Здесь $_l\mathbf{l}(\ )$, $_r\mathbf{l}(\ )$, $\mathbf{l}_1(\ )$, $\mathbf{l}_2(\ ) \in \mathbb{L}$.

Потребуем, чтобы композиция преобразований была *групповым* законом, то есть, чтобы на множестве линейных преобразований $\mathbb{L}$ было определено

1) *единичное* преобразование $\delta(\ )$, для которого выполняются соотношения:

$$\delta(\mathbf{l}(\ )) = \mathbf{l}(\ )\,, \qquad \mathbf{l}(\delta(\ )) = \mathbf{l}(\ )\,;$$

2) *обратное* преобразование $\tilde{\mathbf{l}}(\ )$, для которого выполняются соотношения:

$$\mathbf{l}(\tilde{\mathbf{l}}(\ )) = \delta(\ )\,, \qquad \tilde{\mathbf{l}}(\mathbf{l}(\ )) = \delta(\ )\,.$$

[3] См. Главу 1.1. Раздел III.

Указанные определения делают множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ *группой*. Точнее, закону композиции (4) соответствует *левая* группа линейных преобразований $_l\mathbb{L}$, а закону композиции (5) соответствует *правая* группа линейных преобразований $_r\mathbb{L}$.

2.1. Левая группа линейных преобразований. Левая алгебра линейных преобразований

Найдем связь между базисными векторами и координатами преобразования-композиции и базисными векторами и координатами преобразований, участвующих в композиции, для левой группы $_l\mathbb{L}$. Для этого перепишем закон композиции (4), подчеркнув, что все линейные преобразования, участвующие в композиции, относятся к левой группе линейных преобразований $_l\mathbb{L}$:

$$_l\mathbf{l}(\ ) = {_l\mathbf{l}_2}({_l\mathbf{l}_1}(\ ))\,, \tag{6}$$

где $_l\mathbf{l}(\ )$, $_l\mathbf{l}_1(\ )$, $_l\mathbf{l}_2(\ ) \in {_l\mathbb{L}}$.

Запишем преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования и координаты (матрицы) преобразований:

$$_l\mathbf{l}(\ ) = {_l l^K{}_I} \cdot {_l\mathbf{I}^I{}_K}(\ )\,,$$
$$_l\mathbf{l}_2(\ ) = {_l(l_2)^K{}_L} \cdot {_l\mathbf{I}^L{}_K}(\ )\,, \quad {_l\mathbf{l}_1}(\ ) = {_l(l_1)^M{}_I} \cdot {_l\mathbf{I}^I{}_M}(\ )\,.$$

Исходим из того, что матрицы-координаты преобразования-композиции равны произведению матриц-координат преобразований, участвующих в композиции:

$$_l l^K{}_I = {_l(l_2)^K{}_N} \cdot {_l(l_1)^N{}_I}\,, \tag{7}$$

то есть

$$_l\mathbf{l}(\ ) = {_l(l_2)^K{}_N} \cdot {_l(l_1)^N{}_I} \cdot {_l\mathbf{I}^I{}_K}(\ )\,. \tag{8}$$

С другой стороны из соотношения (6) имеем

$$_l\mathbf{l}(\ ) = {_l\mathbf{l}_2}({_l\mathbf{l}_1}(\ )) = {_l(l_2)^K{}_L} \cdot {_l(l_1)^M{}_I} \cdot {_l\mathbf{I}^L{}_K}({_l\mathbf{I}^I{}_M}(\ ))\,.$$

Из сравнения этого выражения с соотношением(8) получим

$$\begin{aligned} &{_l(l_2)^K{}_L} \cdot {_l(l_1)^M{}_I} \cdot {_l\mathbf{I}^L{}_K}({_l\mathbf{I}^I{}_M}(\ )) = \\ &\quad = {_l(l_2)^K{}_L} \cdot \delta^L{}_M \cdot {_l(l_1)^M{}_I} \cdot {_l\mathbf{I}^I{}_K}(\ )\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует закон композиции базисных преобразований в левой группе $_l\mathbb{L}$

$$_l\mathbf{I}^L{}_K({_l\mathbf{I}^I{}_M}(\ )) = \delta^L{}_M \cdot {_l\mathbf{I}^I{}_K}(\ )\,.$$

Левый закон композиции, действующий на векторах пространства $_l\mathbb{L}$, можно рассматривать как вид умножения и записывать его в в алгебраической, а не в операторной форме

$$_l\mathbf{l} = {_l\mathbf{l}_2} \circ {_l\mathbf{l}_1}\,.$$

Закон композиции для базисных векторов приобретает вид $\circ$-умножения:

$$ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K \,. \tag{9}$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*. Алгебру линейных преобразований, основанную на умножении (4), назовем *левой* и обозначим так же, как и группу ${}_l\mathbb{L}$.

Действие линейного преобразования на вектор

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x})$$

можно также рассматривать как вид умножения. При этом также нужно различать два вида линейного преобразования и, соответственно, два вида умножения – левое и правое. Для левого умножения имеем

$$ {}_l\mathbf{x}' = {}_l\mathbf{l} \circ {}_l\mathbf{x} \,.$$

Левый закон композиции для базисных векторов (3) приобретает вид:

$$ {}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K = \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M \,.$$

Действительно, пусть

$$ {}_l\mathbf{l} = {}_l(l)^M{}_I \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_M \quad \text{и} \quad {}_l\mathbf{x} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_l x^K \,.$$

Тогда

$$ {}_l\mathbf{x}' = {}_l\mathbf{l} \circ {}_l\mathbf{x} = {}_l(l)^M{}_I \cdot {}_l x^K \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_M \cdot {}_l(l)^M{}_K \cdot {}_l x^K .$$

2.2. Правая группа линейных преобразований. Правая алгебра линейных преобразований

Найдем связь между базисными векторами и координатами преобразования-композиции и базисными векторами и координатами преобразований, участвующих в композиции, для правой группы ${}_r\mathbb{L}$. Для этого перепишем закон композиции (5), подчеркнув, что все линейные преобразования, участвующие в композиции, относятся к правой группе линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$

$$ {}_r\mathbf{l}(\ ) = {}_r\mathbf{l}_1({}_r\mathbf{l}_2(\ )) \,, \tag{10}$$

где ${}_r\mathbf{l}(\ )$, ${}_r\mathbf{l}_1(\ )$, ${}_r\mathbf{l}_2(\ ) \in {}_r\mathbb{L}$.

Запишем преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования и координаты (матрицы) преобразований:

$$ {}_r\mathbf{l}(\ ) = {}_r l^M{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M(\ ) \,,$$
$$ {}_r\mathbf{l}_1(\ ) = {}_r(l_1)^K{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_K(\ ) \,, \quad {}_r\mathbf{l}_2(\ ) = {}_r(l_2)^M{}_I \cdot {}_r\mathbf{I}^I{}_M(\ ) \,.$$

Исходим из того, что матрицы-координаты преобразования-композиции равны произведению матриц-координат преобразований, участвующих в композиции:

$$ {}_r l^M{}_L = {}_r(l_2)^M{}_N \cdot {}_r(l_1)^N{}_L \,, \tag{11}$$

то есть

$$ {}_r\mathbf{l}(\ ) = {}_r(l_2)^M{}_N \cdot {}_r(l_1)^N{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M(\ ) \,. \tag{12}$$

С другой стороны, из соотношения (10) имеем

$$ {}_r\mathbf{l}(\ ) = {}_r\mathbf{l}_1({}_r\mathbf{l}_2(\ )) = {}_r(l_2)^M{}_I \cdot {}_r(l_1)^K{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_K({}_r\mathbf{I}^I{}_M(\ )) \,.$$

Из сравнения этого выражения с равенством (12) получим

$$ {}_r(l_2)^M{}_I \cdot {}_r(l_1)^K{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_K({}_r\mathbf{I}^I{}_M(\ )) = $$
$$ = {}_r(l_2)^M{}_I \cdot \delta^I{}_K \cdot {}_r(l_1)^K{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M(\ ) \,.$$

Отсюда следует закон композиции базисных преобразований в правой группе ${}_r\mathbb{L}$

$$ {}_r\mathbf{I}^L{}_K({}_r\mathbf{I}^I{}_M(\ )) = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M(\ ) \,.$$

Правый закон композиции, действующий на векторах пространства ${}_r\mathbb{L}$, можно рассматривать как вид умножения и записывать его в алгебраической, а не в операторной форме

$$ {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{l}_1 \circ {}_r\mathbf{l}_2 \,.$$

Закон композиции для базисных векторов приобретает вид $\circ$-умножения:

$$ {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M \,. \tag{13}$$

Будем полагать, что законы композиции и сложения линейных преобразований связаны законом дистрибутивности. Вследствие этого множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ является кольцом. А так как оно вместе с тем является векторным пространством, то, следовательно, оно представляет собой *алгебру*. Алгебру линейных преобразований, основанную на умножении (5), назовем *правой* и обозначим так же, как и группу ${}_r\mathbb{L}$. Единицей алгебр является вектор, равный $\delta(\ ) = \delta^M{}_L \cdot \mathbf{I}^L{}_M(\ )$.

Действие линейного преобразования на вектор

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x})$$

можно также рассматривать как вид умножения. При этом также нужно различать два вида линейного преобразования и, соответственно, два вида умножения – левое и правое. Для правого умножения имеем

$$ {}_r\mathbf{x}' = {}_r\mathbf{x} \circ {}_r\mathbf{l} \,.$$

Правый закон композиции для базисных векторов (3) приобретает вид:

$$ {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M \,.$$

Действительно, пусть

$$ {}_r\mathbf{l} = {}_r(l)^M{}_I \cdot {}_r\mathbf{I}^I{}_M \quad \text{и} \quad {}_r\mathbf{x} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_r x^K . $$

Тогда

$$ {}_r\mathbf{x}' = {}_r\mathbf{x} \circ {}_r\mathbf{l} = {}_r x^K \cdot {}_r(l)^M{}_I \cdot {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = {}_r\mathbf{e}_M \cdot {}_r(l)^M{}_K \cdot {}_r x^K . $$

3. Системообразующий постулат

Постулируем существование физических объектов, отличных от фундаментальных, которые назовем *промежуточные физические объекты.* Промежуточные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, подобны линейным преобразованиям $\mathbb{L}$. В этом заключается их особенность и отличие от фундаментальных физических объектов. Примером промежуточных физических объектов служат промежуточные частицы.

4. Левые и правые формы группы линейных преобразований

Рассмотрим группу линейных преобразований в другом изложении. Будем рассматривать группу линейных преобразований как некоторую абстрактную группу с элементами

$$ S_l . $$

Линейное преобразование вектора пространства-времени запишем так

$$ x' = S_l(x) $$

или в других обозначениях

$$ x' = \varphi(l, x) , $$
$$ l' = \psi(l, l_0) . $$

Левые формы $\omega(l, dl)$ группы – это главные линейные части параметров элемента

$$ {S_l}^{-1} \circ S_{l+dl} = 1 + S_{\omega(l,dl)} . $$

Здесь

$$ {S_l}^{-1} = S_{\tilde{l}} \quad \text{для } \tilde{l} \circ l = 1 . $$

Для

$$ {S_l}^{-1} \circ S_{l+dl}(x) $$

имеем

$$ {S_l}^{-1} \circ S_{l+dl}(x) = {S_l}^{-1}(\varphi(l+dl, x)) = \varphi(\tilde{l}, \varphi(l+dl, x)) . $$

Вследствие ассоциативности группового закона

$$ {S_l}^{-1} \circ S_{l+dl}(x) = \varphi(\psi(\tilde{l}, l+dl), x) . $$

Отсюда левые формы

$$ \omega(l, dl) = \tilde{l} \circ dl . $$

Правые формы $\Omega(l, dl)$ группы – это главные линейные части параметров элемента

$$ S_{l+dl} \circ {S_l}^{-1} = 1 + S_{\Omega(l,dl)} . $$

Для

$$ S_{l+dl} \circ {S_l}^{-1}(x) $$

имеем

$$ S_{l+dl} \circ {S_l}^{-1}(x) = S_{l+dl}(\varphi(\tilde{l}, x)) = \varphi(l+dl, \varphi(\tilde{l}, x)) . $$

Вследствие ассоциативности группового закона

$$ {S_l}^{-1} \circ S_{l+dl}(x) = \varphi(\psi(l+dl, \tilde{l}), x) . $$

Отсюда правые формы

$$ \Omega(l, dl) = dl \circ \tilde{l} . $$

4.1. Связь между преобразованиями левой и правой групп линейных преобразований

Левые формы – формы левой группы – в развернутом виде записываются так:

$$ \omega^K{}_{K_1}(l, dl) = \tilde{l}^K{}_{I_1} \cdot dl^{I_1}{}_{K_1} . $$

Здесь $l \equiv {}_l l$ – матрицы левой группы линейных преобразований.

Формы правой группы запишем аналогично

$$ \Omega^I{}_{I_1}(L, dL) = \tilde{L}^I{}_{K_1} \cdot dL^{K_1}{}_{I_1} . $$

Здесь $L \equiv {}_r l$ – это матрицы правой группы линейных преобразований.

Эти формы должны совпадать с правыми формами, рассмотренными выше, то есть

$$ \Omega^I{}_{I_1}(L, dL) = \Omega^I{}_{I_1}(l, dl) . $$

Отсюда вытекает связь между матрицами $L^{K_1}{}_{I_1}$ правой группы и матрицами $l^{I_1}{}_{K_1}$ левой группы

$$ \tilde{L}^I{}_{K_1} \cdot dL^{K_1}{}_{I_1} = dl^I{}_{K_1} \cdot \tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} . \tag{14} $$

Или иначе, если воспользоваться соотношением

$$ l^I{}_{K_1} \cdot \tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} = \delta^I{}_{I_1} , $$

продифференцировать его

$$ dl^I{}_{K_1} \cdot \tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} + l^I{}_{K_1} \cdot d\tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} = 0 $$

и учесть, что отсюда

$$ dl^I{}_{K_1} \cdot \tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} = -l^I{}_{K_1} \cdot d\tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} , $$

тогда из (14) имеем другое соотношение, связывающее матрицы правой и левой групп:

$$ \tilde{L}^I{}_{K_1} \cdot dL^{K_1}{}_{I_1} = -l^I{}_{K_1} \cdot d\tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} . $$

5. Линейное преобразование алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$

Так как $\mathbb{X}$ является не только векторным пространством, но и алгеброй, то возникает вопрос: что происходит с произведением векторов при линейном преобразовании векторного пространства $\mathbb{X}$. В общем случае алгебра $\mathbb{X}$ отображается в другую алгебру $\mathbb{X}'$ с другим произведением векторов. Далее, для примера, рассмотрим связь между произведениями в левых алгебрах ${}_l\mathbb{X}$ и ${}_l\mathbb{X}'$.

Пусть векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in {}_l\mathbb{X}$ подчиняются правилу левого параллелограмма, то есть

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1 ,$$

и пусть векторы $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'_1$, $\mathbf{x}'_2 \in {}_l\mathbb{X}'$ получены из $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ с помощью линейного преобразования $\mathbf{l}$, то есть

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}'_1 = \mathbf{l}(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}'_2 = \mathbf{l}(\mathbf{x}_2) .$$

Рассмотрим далее два вектора: вектор, в который отображается произведение векторов

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}(\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1) ,$$

и вектор, равный произведению преобразованных векторов

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{l}(\mathbf{x}_2) \circ \mathbf{l}(\mathbf{x}_1) .$$

В общем случае эти векторы не равны друг другу. Действительно, запишем вектор $\mathbf{x}'$ через базисные векторы:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{e}_L \cdot x^L) = \mathbf{l}(\mathbf{e}_L) \cdot x^L = \mathbf{e}_N \cdot l^N{}_L \cdot x^L$$

или

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{l}((\mathbf{e}_I \cdot x_2{}^I) \circ (\mathbf{e}_K \cdot x_1{}^K)) = \mathbf{l}(\mathbf{e}_I \circ \mathbf{e}_K) \cdot x_2{}^I \cdot x_1{}^K \\ &= \mathbf{l}(\mathbf{e}_L) \cdot {}_lC^L{}_{KI} \cdot x_2{}^I \cdot x_1{}^K \\ &= \mathbf{e}_N \cdot l^N{}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI} \cdot x_2{}^I \cdot x_1{}^K .\end{aligned}$$

Для вектора $\mathbf{x}''$ имеем:

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{l}(\mathbf{e}_I \cdot x_2{}^I) \circ \mathbf{l}(\mathbf{e}_K \cdot x_1{}^K) = \mathbf{l}(\mathbf{e}_I) \circ \mathbf{l}(\mathbf{e}_K) \cdot x_2{}^I \cdot x_1{}^K .$$

Рассматривая векторы $\mathbf{l}(\mathbf{e}_I)$ как базисные в алгебре ${}_l\mathbb{X}'$, закон умножения базисных векторов в этой алгебре запишем следующим образом:

$$\mathbf{l}(\mathbf{e}_I) \circ \mathbf{l}(\mathbf{e}_K) = \mathbf{l}(\mathbf{e}_L) \cdot {}_lC'^L{}_{KI} , \tag{15}$$

где ${}_lC'^L{}_{KI}$ – структурные постоянные алгебры ${}_l\mathbb{X}'$. С учетом этого для вектора $\mathbf{x}''$ имеем:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}'' = \mathbf{l}(\mathbf{e}_I \cdot x_2{}^I) \circ l(\mathbf{e}_K \cdot x_1{}^K) = \mathbf{l}(\mathbf{e}_L) \cdot {}_lC'^L{}_{KI} \cdot x_2{}^I \cdot x_1{}^K \\ &= \mathbf{e}_N \cdot l^N{}_L \cdot {}_lC'^L{}_{KI} \cdot x_2{}^I \cdot x_1{}^K .\end{aligned}$$

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ различаются вследствие различия структурных постоянных в алгебрах ${}_l\mathbb{X}$ и ${}_l\mathbb{X}'$. Из соотношения (15) следует уравнение, связывающее структурные постоянные алгебр ${}_l\mathbb{X}$ и ${}_l\mathbb{X}'$:

$${}_lC^N{}_{MP} \cdot l^P{}_I \cdot l^M{}_K = l^N{}_L \cdot {}_lC'^L{}_{KI} . \tag{16}$$

Отсюда следует условие, при котором линейное преобразование сохраняет алгебру ${}_l\mathbb{X}$. Потребуем, чтобы векторы $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'_1$, $\mathbf{x}'_2$ также подчинялись правилу левого параллелограмма

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}(\mathbf{x}_2) \circ \mathbf{l}(\mathbf{x}_1) .$$

Это равносильно условию

$${}_lC'^L{}_{KI} = {}_lC^L{}_{KI}$$

или

$${}_lC^N{}_{MP} \cdot l^P{}_I \cdot l^M{}_K = l^N{}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI}$$

или

$$l^N{}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI} \cdot (\tilde{l})^I{}_P = {}_lC^N{}_{MP} \cdot l^M{}_K ,$$

то есть линейные преобразования, сохраняющие произведение в ${}_l\mathbb{X}$, сохраняют структурные матрицы ${}_l\mathbb{X}$.

Аналогичные соотношения выполняются для правых алгебр.

6. Регулярное представление преобразованного вектора

В регулярном (присоединенном) представлении алгебры ${}_l\mathbb{X}$ базисным векторам $\mathbf{e}_I$ ставятся в соответствие структурные матрицы

$${}_lC^L{}_{KI} \sim \mathbf{e}_I ,$$

вектору $\mathbf{x} \in {}_l\mathbb{X}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_I \cdot x^I$$

ставится в соответствие матрица

$$X^L{}_K = {}_lC^L{}_{KI} \cdot x^I .$$

Отсюда следует, что в регулярном представлении преобразованному вектору $\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}_I \cdot l^I{}_P \cdot x^P$$

соответствует матрица

$$X'^L{}_K = {}_lC^L{}_{KI} \cdot l^I{}_P \cdot x^P .$$

Используя выражение (16), для матрицы представления получим

$$X'^L{}_K = l^L{}_N \cdot {}_lC^N{}_{IP} \cdot (\tilde{l})^I{}_K \cdot x^P = l^L{}_N \cdot X^N{}_I \cdot (\tilde{l})^I{}_K$$

– правило преобразования матрицы представления при левых линейных преобразованиях. Аналогичные соотношения выполняются для регулярного представления правых векторов.

IV. ПОВОРОТЫ И РАСТЯЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Линейное преобразование запишем в виде произведения преобразований

$$\mathbf{l} = \mathbf{u} \circ \mathbf{h}\,.$$

Пусть преобразование $\mathbf{u}$ поворачивает вектор, не меняя его длины, а преобразование $\mathbf{h}$, напротив, сохраняет направление вектора, но изменяет его длину. Преобразование $\mathbf{u}$ называется *поворотом*, преобразование $\mathbf{h}$ называется *растяжением*. Далее рассмотрим указанные преобразования.

1. Скалярное произведение. Длина вектора. Норма вектора

На пространстве-времени $\mathbb{X}$ определено скалярное произведение векторов. Для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{X}$ скалярное произведение равно

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = (\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_K)\,(x_1)^I\,(x_2)^K = g_{IK} \cdot (x_1)^I\,(x_2)^K\,.$$

Величина $g_{IK} = C^0{}_{IK}$ есть *метрический тензор*.

Скалярное произведение вектора на себя есть квадрат *длины* вектора:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = g_{IK} \cdot x^I \cdot x^K \equiv x^2\,.$$

Пусть $\mathbf{x}^*$ есть сопряженный вектор по отношению к вектору $\mathbf{x}$. Тогда скалярное произведение

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^* = \delta_{IK} \cdot x^I \cdot x^K$$

называют квадратом *нормы* вектора и обозначают $|x|^2$ в отличие от обозначения x^2 для квадрата длины вектора.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1$, вычислим квадрат нормы вектора $\mathbf{x}$ через квадраты норм векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$.

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}|^2 &= (\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_1^* \circ \mathbf{x}_2^*) = \\ &= x_2{}^I \cdot x_1{}^K \cdot x_{1L} \cdot x_{2M} \cdot \left((\mathbf{e}_I \circ \mathbf{e}_K) \cdot (\mathbf{E}^L \circ \mathbf{E}^M)\right) = \\ &= {}_lC^P{}_{IK} \cdot x_1{}^I \cdot x_2{}^K (\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{E}^Q) \cdot {}_rC^{ML}{}_Q \cdot x_{1L} \cdot x_{2M} = \\ &= x_1{}^I \cdot x_2{}^K \cdot {}_lC^P{}_{IK} \cdot {}_rC^{ML}{}_P \cdot x_{1L} \cdot x_{2M}\,.\end{aligned}$$

Далее учтем, что

$${}_lC^P{}_{IK} \cdot {}_rC^{ML}{}_P = \delta^L{}_I \cdot \delta^M{}_K\,.$$

Получим

$$|\mathbf{x}|^2 = x_2{}^I \cdot x_1{}^K \cdot x_{1K} \cdot x_{2I}\,.$$

Таким образом, в результате имеем

$$|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_2|^2 \cdot |\mathbf{x}_1|^2$$

– соотношение, которое можно назвать *теоремой Пифагора* для алгебры $\mathbb{X}$.

Сделаем полезное замечание. Особенно просто теорема Пифагора доказывается для векторов специального вида. Пусть для векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ выполняются условия[4]

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1^* \equiv |\mathbf{x}_1|^2$$
$$\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2^* \equiv |\mathbf{x}_2|^2\,.$$

Тогда для вектора

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1$$

также выполняется

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^* = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^* \equiv |\mathbf{x}|^2\,,$$

причем

$$|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_2|^2 \cdot |\mathbf{x}_1|^2\,.$$

Действительно,

$$\begin{gathered}\mathbf{x} \circ \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1^* \circ \mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2^* \cdot (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1^*) = \\ (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2^*) \cdot (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1^*) = |\mathbf{x}_2|^2 \cdot |\mathbf{x}_1|^2\,.\end{gathered}$$

2. Группа поворотов

В общем случае алгебра $\mathbb{X}$ при линейном преобразовании переходит в другую алгебру $\mathbb{X}'$ с другим произведением векторов. В том числе линейное преобразование меняет и скалярное произведение векторов. Далее рассмотрим связь между скалярными произведениями в алгебрах[5] $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$.

Пусть векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{X}$ участвуют в скалярном произведении

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$$

и пусть векторы $\mathbf{x}_1'$, $\mathbf{x}_2' \in \mathbb{X}'$ получены из $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ с помощью линейного преобразования $\mathbf{l}$, то есть

$$\mathbf{x}' = \mathbf{l}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_1' = \mathbf{l}(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_2' = \mathbf{l}(\mathbf{x}_2)\,.$$

Рассмотрим два скалярных произведения: вышеуказанное а также скалярное произведение преобразованных векторов

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{l}(\mathbf{x}_2)\,.$$

В общем случае эти скалярные произведения не равны друг другу. Действительно, в первом случае имеем

$$(\mathbf{e}_I \cdot x_1{}^I) \cdot (\mathbf{e}_K \cdot x_2{}^K) = (\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_K) \cdot x_1{}^I \cdot x_2{}^K\,.$$

---

[4] Указанные условия выполняются, например, для кватернионов.

[5] Заметим, что результаты этого раздела выполняются как для левой, так и для правой алгебр.

Здесь

$$(\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_K) = C^0{}_{IK} = g_{IK} .$$

Для второго скалярного произведения имеем

$$\mathbf{l}(\mathbf{e}_I \cdot x_1{}^I) \cdot \mathbf{l}(\mathbf{e}_K \cdot x_2{}^K) = (\mathbf{l}(\mathbf{e}_I) \cdot \mathbf{l}(\mathbf{e}_K)) \cdot x_1{}^I \cdot x_2{}^K .$$

Рассматривая векторы $\mathbf{l}(\mathbf{e}_I)$ как базисные в алгебре $\mathbb{X}'$ с законом умножения базисных векторов в этой алгебре (15), для скалярного произведения базисных векторов получим

$$\mathbf{l}(\mathbf{e}_I) \cdot \mathbf{l}(\mathbf{e}_K) = C'^0{}_{IK} = g'_{IK} , \tag{17}$$

где $C'^0{}_{IK}$ структурные постоянные алгебры $\mathbb{X}'$. Отсюда следует, что скалярные произведения отличаются вследствие различия метрических тензоров в алгебрах $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$. Из (17) следует уравнение, связывающее метрические тензоры алгебр $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}'$:

$$g_{PM} \cdot l^P{}_I \cdot l^M{}_K = g'_{IK} . \tag{18}$$

Отсюда следует условие, при котором линейное преобразование сохраняет скалярное произведение. Потребуем, чтобы рассмотренные скалярные произведения были равны друг другу:

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{l}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 .$$

Это равносильно условию

$$g'_{IK} = g_{IK} . \tag{19}$$

Линейные преобразования, сохраняющие скалярное произведение, называются *поворотами*. Мы будем обозначать их символом $\mathbf{u}$. Из выражений (18) и (19) следует, что матрица линейного преобразования для поворотов должна удовлетворять условию

$$g_{LM} \cdot u^L{}_I \cdot u^M{}_K \cdot g^{KN} = \delta_I{}^N . \tag{20}$$

Если ввести *сопряженную* матрицу $u^{*N}{}_L$ в соответствии с определением:

$$u^{*N}{}_L = g_{LM} \cdot u^M{}_K \cdot g^{KN} ,$$

то условие принадлежности линейных преобразований к поворотам приобретает вид:

$$u^{*N}{}_L = \tilde{u}^N{}_L .$$

В качестве примера рассмотрим условие (19) когда поворот происходит в плоскости с сигнатурой $(+,-)$. В этом случае имеем $g_{11} = 1$, $g_{22} = -1$ и

$$u = \begin{vmatrix} u^1{}_1 & u^2{}_1 \\ u^1{}_1 & u^2{}_1 \end{vmatrix}, \qquad g = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

В результате имеем:

$$\begin{aligned} u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 - u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 &= 1 , \\ u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 - u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 &= 0 , \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 - u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 &= 0 , \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 - u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 &= -1 . \end{aligned} \tag{21}$$

Если поворот происходит в плоскости с сигнатурой $(+,+)$, то имеем $g_{11} = 1$, $g_{22} = 1$,

$$\begin{aligned} u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 &= 1 , \\ u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 &= 0 , \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 + u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 &= 0 , \\ u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 &= 1 . \end{aligned} \tag{22}$$

Условие (22) является частным случаем преобразования структурных постоянных (16). Действительно, из уравнения (16) имеем:

$$C^0{}_{MP} \cdot l^P{}_I \cdot l^M{}_K = l^0{}_0 \cdot C'^0{}_{KI} + l^0{}_{L_1} \cdot C'^{L_1}{}_{KI} .$$

Отсюда получаем условия, при которых линейное преобразование становится поворотом:

$$l^0{}_0 \cdot C'^0{}_{KI} = C^0{}_{KI} ,$$

$$l^0{}_{L_1} \cdot C'^{L_1}{}_{KI} = 0 .$$

Повороты составляют группу. Произведение поворотов есть поворот. Действительно, если

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{u}_1^* , \qquad \tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{u}_2^* ,$$

то, например, для

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2$$

имеет место

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_2 \circ \tilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{u}_2^* \circ \mathbf{u}_1^* = (\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2)^* = \mathbf{u}^* .$$

Последнее следует из

$$\begin{aligned} (u_2^*)^N{}_L \cdot (u_1^*)^L{}_M &= \\ &= g_{LI} \cdot (u_2)^I{}_K \cdot g^{KN} \cdot g_{SM} \cdot (u_1)^S{}_P \cdot g^{PL} = \\ &= (u_2)^I{}_K \cdot g^{KN} \cdot g_{SM} \cdot (u_1)^S{}_I = \\ &= g_{SM} \cdot (u_1)^S{}_I \cdot (u_2)^I{}_K \cdot g^{KN} = \\ &= g_{SM} \cdot u^S{}_K \cdot g^{KN} = u^{*N}{}_M . \end{aligned}$$

3. Группа растяжений

Растяжения сохраняют направление вектора, но изменяют его длину. Матрица таких преобразований имеет вид

$$h^L{}_I = h \cdot \delta^L{}_I , \tag{23}$$

где h – действительное положительное число, называемое *коэффициентом растяжения*. Действительно,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_L \cdot h^L{}_I \cdot x^I = h \cdot \mathbf{e}_L \cdot \delta^L{}_I \cdot x^I = h \cdot \mathbf{x} .$$

Растяжения составляют группу. Произведение растяжений есть растяжение:

$$h^L{}_I = (h_1)^L{}_K \cdot (h_2)^K{}_I = h_1 \cdot h_2 \cdot \delta^L{}_I = h \cdot \delta^L{}_I .$$

Отсюда закон композиции коэффициентов растяжений

$$h = h_1 \cdot h_2 \,.$$

Обратное растяжение (сжатие) к растяжению (23) есть

$$\tilde{h}^L{}_I = \frac{1}{h} \cdot \delta^L{}_I \,.$$

Произвольное линейное преобразование меняет метрический тензор в соответствии с соотношением:

$$g'_{IK} = g_{LM} \cdot l^L{}_I \cdot l^M{}_K \,.$$

Представим матрицу $l^L{}_I$ в виде произведения

$$l^L{}_I = u^L{}_P \cdot h^P{}_I \,,$$

где $u^L{}_P$ – матрица поворота, удовлетворяющая условию

$$g_{LM} \cdot u^L{}_P \cdot u^M{}_Q = g_{PQ} \,.$$

Тогда имеем

$$g'_{IK} = (g_{LM} \cdot u^L{}_P \cdot u^M{}_Q) \cdot h^P{}_I \cdot h^Q{}_K \,.$$

Отсюда получим соотношения

$$g'_{IK} = g_{PQ} \cdot h^P{}_I \cdot h^Q{}_K$$

и

$$g'_{IK} = h^2 \cdot g_{IK} \,.$$

V. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Левая кинематическая группа ${}_l\mathbb{G}$

Изложение параметрического предствления начнем с левой алгебры линейных преобразований. Пусть вектор ${}_l\mathbf{l} \in {}_l\mathbb{L}$ является функцией *параметров* φ^α:

$${}_l\mathbf{l}(\varphi^\alpha) = {}_l\mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_l l^K{}_I(\varphi^\alpha) \,,$$

причем на параметрах φ^α действует левый закон композиции

$$\varphi^\alpha = {}_l\Phi(\varphi_2{}^\alpha, \varphi_1{}^\alpha)$$

со свойствами группы и имеет место соответствие закона композиции на $\{\varphi^\alpha\}$ и левого закона композиции на ${}_l\mathbb{L}$ (9)

$${}_l\mathbf{l}(\varphi^\alpha) = {}_l\mathbf{l}(\varphi_2{}^\alpha) \circ {}_l\mathbf{l}(\varphi_1{}^\alpha) \,,$$

и соответствие единиц групп

$$\mathbf{l}(0) = \delta() \,.$$

или

$${}_l l^K{}_I(\varphi^\alpha)\Big|_{\varphi^\alpha=0} = \delta^K{}_I \,.$$

Для группы поворотов такие параметры представляют собой *левые углы поворота*. Для группы растяжений такие параметры представляют собой *коэффициенты растяжения*. Рассмотрим дифференциал $d\,{}_l\mathbf{l}$ вблизи единицы группы

$$d\,{}_l\mathbf{l}(\varphi^\alpha) = {}_l\mathbf{I}^I{}_K \, \frac{\partial\, {}_l l^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha}\, d\varphi^\alpha = {}_l\mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_l K^K{}_{I\alpha} \cdot d\varphi^\alpha \,,$$

где введено обозначение

$${}_l K^K{}_{I\alpha} = \frac{\partial\, {}_l l^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial \varphi^\alpha}\bigg|_{\varphi^\alpha=0} \,.$$

Отсюда следует, что матрицы левой алгебры линейных преобразований можно записать так:

$${}_l l^K{}_I = {}_l K^K{}_{I\alpha} \cdot \varphi^\alpha \,.$$

Векторы

$${}_l\mathbf{I}_\alpha = {}_l\mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_l K^K{}_{I\alpha} \tag{24}$$

представляют собой базисные векторы в пространстве векторов вида

$$d\,{}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}_\alpha \, d\,{}_l\varphi^\alpha \,. \tag{25}$$

На этом пространстве действует закон умножения, определяемый левым умножением базисных векторов

$${}_l\mathbf{I}_\beta \circ {}_l\mathbf{I}_\alpha = {}_l\mathbf{I}_\gamma \cdot {}_l C^\gamma{}_{\alpha\beta} \,. \tag{26}$$

Подставляя сюда выражение (24) и учитывая соотношение (9), получим

$${}_l K^K{}_{L\alpha} \cdot {}_l K^L{}_{I\beta} = {}_l K^K{}_{I\gamma} \cdot {}_l C^\gamma{}_{\alpha\beta} \,. \tag{27}$$

Сравнивая это соотношение с выражением (26), заключаем, что базисным векторам ${}_l\mathbf{I}_\alpha$ можно поставить в соответствие матрицы ${}_l K^K{}_{L\alpha}$. Это соответствие будем называть *параметрическим представлением* левой алгебры линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ и записывать так:

$${}_l\mathbf{I}_\alpha \sim {}_l K^L{}_{I\alpha} \,.$$

Левая алгебра ${}_l\mathbb{L}$ линейных преобразований, зависящих от параметров, является линейной частью *левой непрерывной группы* линейных преобразований, зависящих от параметров. Обозначим ее ${}_l\mathbb{G}$ и назовем *левой кинематической группой*.

Далее рассмотрим дифференциальные уравнения для зависимости координат левой кинематической группы ${}_l\mathbb{G}$ от параметров φ. Для этого запишем уравнение (7) в следующем виде:

$${}_l l^M{}_L(\varphi) = {}_l l^M{}_K(\varphi_2) \cdot {}_l l^K{}_L(\varphi_1) \,,$$

где $\varphi = {}_l\Phi(\varphi_2, \varphi_1)$, и рассмотрим его при замене

$$\varphi \to \varphi + d\varphi\,, \quad \varphi_2 \to \varphi\,, \quad \varphi_1 \to 0 + d\varphi\,.$$

Получим

$$\begin{aligned} &{}_l l^M{}_L(\varphi) + d\,{}_l l^M{}_L(\varphi) = \\ &\quad = {}_l l^M{}_K(\varphi) \cdot \left[{}_l l^K{}_L(0) + \left(\frac{\partial\,{}_l l^K{}_L(\varphi)}{d\varphi^\alpha}\right)_{\varphi=0} \cdot d\varphi^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что ${}_l l^K{}_L(0) = \delta^K{}_L$, получим

$$d\,{}_l l^M{}_L(\varphi) = {}_l l^M{}_K(\varphi) \cdot {}_l K^K{}_{L\alpha} \cdot d\varphi^\alpha\,. \tag{28}$$

Отсюда следует

$${}_l \tilde{l}^K{}_M(\varphi) \cdot d\,{}_l l^M{}_L(\varphi) = {}_l K^K{}_{L\alpha} \cdot d\varphi^\alpha\,. \tag{29}$$

Эти уравнения позволяют определить координаты ${}_l L^K{}_L(\varphi)$ линейного преобразования левой кинематической группы ${}_l\mathbb{G}$ в зависимости от параметров φ^α.

Выражение

$${}_l\omega^K{}_L(\varphi) \equiv {}_l\tilde{l}^K{}_M(\varphi) \cdot d\,{}_l l^M{}_L(\varphi) = {}_l K^K{}_{L\alpha} \cdot d\varphi^\alpha$$

назовем *левой дифференциальной формой* алгебры линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$.

Решение ${}_l L^K{}_L(\varphi)$ уравнения (29) при начальных условиях

$${}_l L^K{}_L(0) = \delta^K{}_L$$

имеет вид

$${}_l L^K{}_L = \exp({}_l K^K{}_{L\alpha} \cdot \varphi^\alpha)\,.$$

2. Правая кинематическая группа ${}_r\mathbb{G}$

Приведем аналогичные соотношения для параметрического представления правой алгебры линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$. Пусть векторы ${}_r\mathbf{l} \in {}_r\mathbb{L}$ являются функциями *параметров* φ^α:

$${}_r\mathbf{l}(\varphi^\alpha) = {}_r\mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_r l^K{}_I(\varphi^\alpha)\,,$$

причем на параметрах φ^α действует правый закон композиции

$$\varphi^\alpha = {}_r\Phi({\varphi_1}^\alpha, {\varphi_2}^\alpha)$$

со свойствами группы, и имеют место соответствие закона композиции на $\{\varphi^\alpha\}$ и правого закона композиции на ${}_r\mathbb{L}$:

$${}_r\mathbf{l}(\varphi^\alpha) = {}_r\mathbf{l}({\varphi_1}^\alpha) \circ {}_r\mathbf{l}({\varphi_2}^\alpha)$$

и соответствие единиц групп

$${}_r\mathbf{l}(0) = \delta()$$

или

$${}_r l^K{}_I(\varphi^\alpha)\big|_{\varphi^\alpha=0} = \delta^K{}_I\,.$$

Для группы поворотов такие параметры представляют собой *правые углы поворота*. Для группы растяжений такие параметры представляют собой *коэффициенты растяжения*. Рассмотрим дифференциал $d\,{}_r\mathbf{l}$ вблизи единицы группы

$$d\,{}_r\mathbf{l}(\varphi^\alpha) = {}_r\mathbf{I}^I{}_K \frac{\partial\,{}_r l^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial\varphi^\alpha}\, d\varphi^\alpha = {}_r\mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_r K^K{}_{I\alpha} \cdot d\varphi^\alpha\,.$$

где введено обозначение

$${}_r K^K{}_{I\alpha} = \left.\frac{\partial\,{}_r l^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial\varphi^\alpha}\right|_{\varphi^\alpha=0}.$$

Отсюда следует, что матрицы правой алгебры линейных преобразований можно записать так

$${}_r l^K{}_I = {}_r K^K{}_{I\alpha} \cdot \varphi^\alpha\,.$$

Векторы

$${}_r\mathbf{I}_\alpha = {}_r\mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_r K^K{}_{I\alpha} \tag{30}$$

представляют собой базисные векторы в пространстве векторов вида

$$d\,{}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}_\alpha\, d\varphi^\alpha\,. \tag{31}$$

На этом пространстве действует закон умножения, определяемый правым умножением базисных векторов

$${}_r\mathbf{I}_\alpha \circ {}_r\mathbf{I}_\beta = {}_r\mathbf{I}_\gamma \cdot {}_r C^\gamma{}_{\alpha\beta}\,. \tag{32}$$

Подставляя сюда выражение (30) и учитывая формулу (13), получим

$${}_r K^K{}_{L\beta} \cdot {}_r K^L{}_{I\alpha} = {}_r K^K{}_{I\gamma} \cdot {}_r C^\gamma{}_{\alpha\beta}\,. \tag{33}$$

Сравнивая это соотношение с выражением (32), заключаем, что базисным векторам ${}_r\mathbf{I}_\alpha$ можно поставить в соответствие матрицы ${}_r K^K{}_{L\alpha}$. Это соответствие будем называть *параметрическим представлением* правой алгебры линейных преобразований и записывать так:

$${}_r\mathbf{I}_\alpha \sim {}_r K^L{}_{I\alpha}\,.$$

Правая алгебра ${}_r\mathbb{L}$ линейных преобразований, зависящих от параметров, является линейной частью *правой непрерывной группы* линейных преобразований, зависящих от параметров. Обозначим ее ${}_r\mathbb{G}$ и назовем *правой кинематической группой*.

Далее рассмотрим дифференциальные уравнения для зависимости координат линейного преобразования кинематической группы ${}_r\mathbb{G}$ от параметров φ. Для этого запишем соотношение (11) в следующем виде:

$${}_r l^M{}_L(\varphi) = {}_r l^M{}_K(\varphi_2) \cdot {}_r l^K{}_L(\varphi_1)\,,$$

где $\varphi = {}_r\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$, и рассмотрим его при замене

$$\varphi \to \varphi + d\varphi\,, \quad \varphi_2 \to \varphi\,, \quad \varphi_1 \to 0 + d\varphi\,.$$

Получим

$$\begin{aligned}&{}_rl^M{}_L(\varphi) + d\,{}_rl^M{}_L(\varphi) =\\ &\quad = {}_rl^M{}_K(\varphi)\cdot\left[{}_rl^K{}_L(0) + \left(\frac{\partial\,{}_rl^K{}_L(\varphi)}{d\varphi^\alpha}\right)_{\varphi=0}\cdot d\varphi^\alpha\right].\end{aligned}$$

Учитывая, что ${}_rl^K{}_L(0) = \delta^K{}_L$, получим

$$d\,{}_rl^M{}_L(\varphi) = {}_rl^M{}_K(\varphi)\cdot{}_rK^K{}_{L\alpha}\cdot d\varphi^\alpha\,. \qquad (34)$$

Отсюда следует

$${}_r\tilde{l}^K{}_M(\varphi)\cdot d\,{}_rl^M{}_L(\varphi) = {}_rK^K{}_{L\alpha}\cdot d\varphi^\alpha\,. \qquad (35)$$

Эти уравнения позволяют определить координаты ${}_rL^K{}_L$ линейного преобразования правой кинематической группы ${}_r\mathbb{G}$ в зависимости от параметров φ^α.

Выражение

$${}_r\omega^M{}_K(\varphi) \equiv {}_r\tilde{l}^K{}_M(\varphi)\cdot d\,{}_rl^M{}_L(\varphi) = {}_rK^M{}_{K\alpha}\cdot d\varphi^\alpha$$

назовем *правой дифференциальной формой* алгебры линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$.

Решение ${}_rL^M{}_L(\varphi)$ уравнения (35) при начальных условиях

$${}_rL^M{}_L(0) = \delta^M{}_L$$

имеет вид

$${}_rL^K{}_L = \exp({}_rK^K{}_{L\alpha}\cdot\varphi^\alpha)\,.$$

3. Системообразующие определения

1. Назовем *левую кинематическую* группу ${}_l\mathbb{G}$ *кинематической группой внешней симметрии.* Термин *внешняя симметрия*, с одной стороны, продиктован представлением о *внутренней симметрии*, используемой в современной физике, а, с другой, введен для подчеркивания отличия рассматриваемой симметрии от внутренней симметрии. В частности, группа гравитации является подгруппой кинематической группы внешней симметрии.

2. Левая алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ является линейной частью *левой кинематической* группы ${}_l\mathbb{G}$. Поэтому назовем левую алгебру линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ *кинематической алгеброй внешней симметрии.*

3. Назовем *правую кинематическую* группу ${}_r\mathbb{G}$ *кинематической группой внутренней симметрии.* Термин *внутренняя симметрия* используется здесь в том смысле, в котором он используется в современной физике. В частности, электрическая группа является группой внутренней симметрии и подобна подгруппе кинематической группы внутренней симметрии ${}_r\mathbb{G}$.

4. Правая алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ является линейной частью *правой кинематической* группы ${}_r\mathbb{G}$. Поэтому назовем правую алгебру линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ *кинематической алгеброй внутренней симметрии.*

4. Группа поворотов

В качестве примера воспользуемся уравнениями[6] (28) для определения матрицы поворота в плоскости с сигнатурой $(+,-)$. Из соотношения (28) имеем

$$\begin{aligned}du^1{}_1 &= d\varphi\cdot(K^1{}_1\cdot u^1{}_1 + K^2{}_1\cdot u^1{}_2)\,,\\ du^1{}_2 &= d\varphi\cdot(K^1{}_2\cdot u^1{}_1 + K^2{}_2\cdot u^1{}_2)\,,\\ du^2{}_1 &= d\varphi\cdot(K^1{}_1\cdot u^2{}_1 + K^2{}_1\cdot u^2{}_2)\,,\\ du^2{}_2 &= d\varphi\cdot(K^1{}_2\cdot u^2{}_1 + K^2{}_2\cdot u^2{}_2)\,.\end{aligned}$$

Начальные условия:

$$u^1{}_1(0) = 1, \quad u^1{}_2(0) = 0, \quad u^2{}_1(0) = 0, \quad u^2{}_2(0) = 1\,.$$

Для компонент матрицы поворота в рассматриваемом случае выполняются соотношения (21):

$$\begin{aligned}&u^1{}_1\cdot u^1{}_1 - u^2{}_1\cdot u^2{}_1 = 1\,,\\ &u^1{}_1\cdot u^1{}_2 - u^2{}_1\cdot u^2{}_2 = 0\,,\\ &u^1{}_2\cdot u^1{}_1 - u^2{}_2\cdot u^2{}_1 = 0\,,\\ &u^1{}_2\cdot u^1{}_2 - u^2{}_2\cdot u^2{}_2 = -1\,.\end{aligned}$$

Дифференцируя эти уравнения по φ и рассматривая полученные уравнения при $\varphi = 0$, получим

$$\begin{aligned}&du^1{}_1\cdot u^1{}_1 - du^2{}_1\cdot u^2{}_1 = du^1{}_1 = 0\,,\\ &du^1{}_1\cdot u^1{}_2 + u^1{}_1\cdot du^1{}_2 - du^2{}_1\cdot u^2{}_2 - u^2{}_1\cdot du^2{}_2 =\\ &= du^1{}_2 - du^2{}_1 = 0\,,\\ &du^1{}_2\cdot u^1{}_1 + u^1{}_2\cdot du^1{}_1 - du^2{}_2\cdot u^2{}_1 - u^2{}_2\cdot du^2{}_1 =\\ &= du^1{}_2 - du^2{}_1 = 0\,,\\ &du^1{}_2\cdot u^1{}_2 - du^2{}_2\cdot u^2{}_2 = -du^2{}_2 = 0\,.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$K_1{}^1 = K_2{}^2 = 0, \quad K_2{}^1 = K_1{}^2 = K\,.$$

В результате дифференциальные уравнения (28) приобретают вид

$$\begin{aligned}du^1{}_1 &= d\varphi\cdot K\cdot u^1{}_2\,, & du^1{}_2 &= d\varphi\cdot K\cdot u^1{}_1\,,\\ du^2{}_1 &= d\varphi\cdot K\cdot u^2{}_2\,, & du^2{}_2 &= d\varphi\cdot K\cdot u^2{}_1\,.\end{aligned}$$

Первая пара уравнений дает

$$u_1{}^1 = \cosh(K\cdot\varphi), \quad u_2{}^1 = \sinh(K\cdot\varphi)\,,$$

вторая пара уравнений дает

$$u_2{}^2 = \cosh(K\cdot\varphi), \quad u_1{}^2 = \sinh(K\cdot\varphi)\,.$$

---

[6] Для однопараметрического представления дифференциальные уравнения для правых и левых координат совпадают.

Аналогично определим матрицы поворота в плоскости с сигнатурой $(+,+)$. Для компонент матрицы поворота в этом случае выполняются соотношения (22):

$$\begin{aligned}
&u^1{}_1 \cdot u^1{}_1 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_1 = 1\,,\\
&u^1{}_1 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_1 \cdot u^2{}_2 = 0\,,\\
&u^1{}_2 \cdot u^1{}_1 + u^2{}_2 \cdot u^2{}_1 = 0\,,\\
&u^1{}_2 \cdot u^1{}_2 + u^2{}_2 \cdot u^2{}_2 = 1\,.
\end{aligned}$$

Дифференцируя эти уравнения по φ и рассматривая полученные уравнения при $\varphi = 0$, получим

$$\begin{aligned}
&du^1{}_1 \cdot u^1{}_1 + du^2{}_1 \cdot u^2{}_1 = du^1{}_1 = 0\,,\\
&du^1{}_1 \cdot u^1{}_2 + u^1{}_1 \cdot du^1{}_2 + du^2{}_1 \cdot u^2{}_2 + u^2{}_1 \cdot du^2{}_2 =\\
&= du^1{}_2 + du^2{}_1 = 0\,,\\
&du^1{}_2 \cdot u^1{}_1 + u^1{}_2 \cdot du^1{}_1 + du^2{}_2 \cdot u^2{}_1 + u^2{}_2 \cdot du^2{}_1 =\\
&= du^1{}_2 + u^2{}_1 = 0\,,\\
&du^1{}_2 \cdot u^1{}_2 + du^2{}_2 \cdot u^2{}_2 = du^2{}_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$K^1{}_1 = K^2{}_2 = 0, \quad K^1{}_2 = -K^2{}_1 = K\,.$$

В результате дифференциальные уравнения (28) приобретают вид

$$\begin{aligned}
&du^1{}_1 = -d\varphi \cdot K \cdot u^1{}_2\,, \qquad && du^1{}_2 = d\varphi \cdot K \cdot u^1{}_1\,,\\
&du^2{}_1 = -d\varphi \cdot K \cdot u^2{}_2\,, && du^2{}_2 = d\varphi \cdot K \cdot u^2{}_1\,.
\end{aligned}$$

Первая пара уравнений дает

$$u^1{}_1 = \cos(K \cdot \varphi), \quad u^1{}_2 = \sin(K \cdot \varphi)\,,$$

вторая пара уравнений дает

$$u^2{}_2 = \cos(K \cdot \varphi), \quad u^2{}_1 = -\sin(K \cdot \varphi)\,.$$

5. Алгебра пространства-времени как пространство представления

Для определенности остановимся на левой алгебре линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ и левой алгебре пространства-времени ${}_l\mathbb{X}$.

Сначала обратимся к алгебре ${}_l\mathbb{X}$. На базисных векторах $\mathbf{e}_K$ этой алгебры действует закон умножения[7]

$${}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_1} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2}\,.$$

Пусть в ${}_l\mathbb{X}$ имеет место подалгебра, построенная на части векторов ${}_l\mathbf{e}_K$, которые обозначим греческими индексами, например ${}_l\mathbf{e}_\alpha$. Тогда на базисных векторах подлгебры действует закон умножения

$${}_l\mathbf{e}_\beta \circ {}_l\mathbf{e}_\alpha = {}_l\mathbf{e}_\gamma \cdot {}_lC'^\gamma{}_{\alpha\beta}\,.$$

Здесь ${}_lC'^\gamma{}_{\alpha\beta}$ – структурные постоянные введенной подалгебры. Далее обратимся к формуле (10) Главы 1.2. Раздел III.

$${}_lx^K = \left({}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot x_2^{K_2} \cdot \frac{1}{L_0}\right) \cdot x_1^{K_1}\,.$$

Отсюда видно, что умножение вектора $\mathbf{x}_1$ слева на вектор $\mathbf{x}_2$ сводится к линейному преобразованию этого вектора с помощью матрицы

$${}_ll^K{}_{K_1} = {}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot x_2^{K_2} \cdot \frac{1}{L_0}\,. \tag{36}$$

Пусть вектор с координатами x_2^α принадлежит вышеуказанной подалгебре. Тогда линейное преобразование (36) приобретает вид

$${}_ll^K{}_{K_1} = {}_lC^K{}_{K_1\alpha} \cdot x_2^\alpha \cdot \frac{1}{L_0}\,.$$

Запишем дифференциал этого преобразования

$$d\,{}_ll^K{}_{K_1} = {}_lC^K{}_{K_1\alpha} \cdot dx_2^\alpha \cdot \frac{1}{L_0}\,. \tag{37}$$

После этих замечаний обратимся к параметрическому представлению линейных преобразований и отождествим базисные векторы в ${}_l\mathbb{L}$ с базисными векторами в подалгебре ${}_l\mathbb{X}$, то есть

$${}_l\mathbf{I}_\alpha \equiv {}_l\mathbf{e}_\alpha\,.$$

Отсюда следует, что

$${}_lC^\gamma{}_{\alpha\beta} \equiv {}_lC'^\gamma{}_{\alpha\beta}\,.$$

Далее отождествим дифференциал (37) с дифференциалом (28) вблизи единицы, то есть

$$d\,{}_ll^M{}_L(0) \equiv d\,{}_ll^M{}_L\,.$$

Отсюда следует, что

$${}_lK^K{}_{L\alpha} \cdot d\varphi^\alpha \equiv {}_lC^K{}_{L\alpha} \cdot dx_2^\alpha \cdot \frac{1}{L_0}\,,$$

а отсюда, в свою очередь, следует

$${}_lK^K{}_{L\alpha} \equiv {}_lC^K{}_{L\alpha}$$

и

$$d\varphi^\alpha \equiv dx_2^\alpha \cdot \frac{1}{L_0}\,.$$

При этом линейное преобразование левой кинематической группы ${}_l\mathbb{G}$

$${}_lL^K{}_{K_1} = \exp({}_lK^K{}_{L\alpha} \cdot d\varphi^\alpha)$$

[7] Формула (15) Главы 1.2. Раздел IV.

отождествляется с линейным преобразованием ассоциированной группы пространства-времени ${}_l\mathbb{X}$[8]

$$ {}_lL^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp\left(\frac{1}{L_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot x_2^{K_2}\right) $$

при $x_2^0 = L_0$. Приведенные отождествления позволяют рассматривать параметрическое представление левой алгебры линейных преобразований в левой алгебре пространства-времени и рассматривать левую алгебру пространства-времени ${}_l\mathbb{X}$ как линейную часть левой кинематической группы ${}_l\mathbb{G}$.

Аналогичные соотношения выполняются для правой алгебры пространства-времени как пространства представления правой алгебры линейных преобразований. Это обстоятельство, в свою очередь, позволяет рассматривать правую алгебру пространства-времени ${}_r\mathbb{X}$ как линейную часть правой кинематической группы ${}_r\mathbb{G}$.

5.1. *Однопараметрические повороты*

Далее рассмотрим повороты в пространстве-времени $\mathbb{X}$. Для определенности остановимся на левых поворотах. Произвольное преобразование, сохраняющее квадрат длины вектора $\mathbf{x}$, представляет собой поворот в произвольной плоскости в пространстве-времени $\mathbb{X}$ на угол, который мы обозначим θ. Это преобразование удовлетворяет условиям

$$ \mathbf{u}(\theta_1 + \theta_2) = \mathbf{u}(\theta_2) \circ \mathbf{u}(\theta_1)\,, \tag{38} $$

$$ \mathbf{u}(0) = \delta \quad \text{– единичному преобразованию.} \tag{39} $$

Продифференцируем уравнение (38) по θ_1, после чего положим

$$ \theta_1 = 0 $$

и введем переобозначение

$$ \theta_2 = \theta\,, \qquad \theta_1 = d\theta\,. $$

Получим

$$ d\mathbf{u}(\theta) = d\theta \cdot \mathbf{I}_\theta \circ \mathbf{u}(\theta)\,, \tag{40} $$

где

$$ \mathbf{I}_\theta = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta}\Big|_{\theta=0}\,. $$

Этот вектор назовем базисным вектором оси поворота.

[8] Формула (20) Глава 1.2. Раздел IV.1.

Уравнение (40) при начальном условии (39) позволяет записать поворот в следующем виде:

$$ \mathbf{u}(\theta) = \exp(\mathbf{I}_\theta \cdot \theta) \equiv \delta + \frac{1}{1!}(\mathbf{I}_\theta \cdot \theta) + \frac{1}{2!}(\mathbf{I}_\theta \cdot \theta)^2 + \ldots\,. \tag{41} $$

Возможны два случая, которым удовлетворяет квадрат базисного вектора оси поворота:

1)

$$ (\mathbf{I}_\theta)^2 = -\mathbf{I}_0\,, $$

2)

$$ (\mathbf{I}_\theta)^2 = \mathbf{I}_0\,. $$

В первом случае поворот (41) принимает вид

$$ \mathbf{u}(\theta) = \mathbf{I}_0 \cdot \cos\theta + \mathbf{I}_\theta\, \sin\theta\,. \tag{42} $$

Во втором случае поворот (41) принимает вид[9]

$$ \mathbf{u}(\theta) = \mathbf{I}_0 \cdot \cosh\theta + \mathbf{I}_\theta\, \sinh\theta\,. \tag{43} $$

Поворот вокруг оси $\mathbf{I}_\theta$ может быть разложен по базисным поворотам ${}_l\mathbf{I}_\alpha$. Базисные повороты ${}_l\mathbf{I}_\alpha$ отождествим с базисными векторами ${}_l\mathbf{e}_\alpha$ пространства-времени ${}_l\mathbb{X}$. Тогда соотношение (26) преобразуется в

$$ {}_l\mathbf{e}_\alpha \circ {}_l\mathbf{e}_\beta = {}_l\mathbf{e}_\gamma \cdot {}_lC^\gamma{}_{\beta\alpha}\,. \tag{44} $$

Оно определяет алгебру поворотов ${}_l\mathbb{U}$ как подалгебру пространства-времени ${}_l\mathbb{X}$[10]. Для этой подалгебры из условия ассоциативности имеем

$$ {}_lC^\kappa{}_{\lambda\alpha} \cdot {}_lC^\lambda{}_{\mu\beta} = {}_lC^\kappa{}_{\mu\gamma} \cdot {}_lC^\gamma{}_{\beta\alpha}\,. \tag{45} $$

Отсюда следует регулярное параметрическое представление алгебры поворотов

$$ \mathbf{e}_\alpha \equiv {}_l\mathbf{I}_\alpha \sim {}_lC^\gamma{}_{\beta\alpha}\,. $$

Матрицы ${}_lC^\gamma{}_{\beta\alpha}$ в этом случае называются *генераторами* поворотов в подалгебре пространства-времени.

Если пространством представления алгебры поворотов является все пространство-время, то соотношение (27) принимает вид

$$ {}_lC^K{}_{L\alpha} \cdot {}_lC^L{}_{I\beta} = {}_lC^K{}_{I\gamma} \cdot {}_lC^\gamma{}_{\beta\alpha} \tag{46} $$

и в этом случае *параметрическое представление* алгебры поворотов записывается:

$$ {}_l\mathbf{e}_\alpha \equiv {}_l\mathbf{I}_\alpha \sim {}_lC^L{}_{I\alpha}\,. $$

[9] Формулы (42) и (43) являются обобщением формулы Эйлера

$$ \exp(i \cdot \theta) = \cos\theta + i \cdot \sin\theta\,, $$

где i – мнимая единица.

[10] Заметим, что алгебра поворотов ${}_r\mathbb{U}$ как подалгебра пространства-времени ${}_r\mathbb{X}$ рассматривается аналогично.

Генераторами поворотов в пространстве-времени ${}_l\mathbb{X}$ служат матрицы ${}_lC^L{}_{I\alpha}$.

Рассмотрим дифференциал поворота $d\,{}_l\mathbf{u}$ вблизи единицы группы

$$d\,{}_l\mathbf{u}(\varphi^\alpha) = \mathbf{I}^I{}_K\, \frac{\partial\,{}_lu^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial\varphi^\alpha}\, d\varphi^\alpha = \mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_lC^K{}_{I\alpha} \cdot d\varphi^\alpha \,.$$

где принято

$${}_lC^K{}_{I\alpha} = \left.\frac{\partial\,{}_lu^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial\varphi^\alpha}\right|_{\varphi^\alpha=0} .$$

Векторы

$${}_l\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_lC^K{}_{I\alpha} \tag{47}$$

представляют собой базисные векторы осей поворотов в пространстве-времени. Таким образом,

$$d\,{}_l\mathbf{u} = {}_l\mathbf{e}_\alpha \cdot d\varphi^\alpha \,.$$

Сравнение этой формулы с

$$d\,{}_l\mathbf{u} = \mathbf{I}_\theta \cdot d\theta \,.$$

показывает, что векторы $\mathbf{I}_\theta$ могут быть выражены через векторы базисных поворотов ${}_l\mathbf{e}_\alpha$

$$\mathbf{I}_\theta = {}_l\mathbf{e}_\alpha \cdot {}_lC^\alpha \,. \tag{48}$$

Здесь ${}_lC^\alpha$ – "направляющие косинусы" вектора оси поворота $\mathbf{I}_\theta$

$${}_lC^\alpha = \left.\frac{\partial\,{}_l\varphi^\alpha}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} .$$

Из соотношения (48) вытекает условие, которому удовлетворяют "направляющие косинусы"

$$(\mathbf{I}_\theta)^2 = ({}_l\mathbf{e}_\alpha)^2 \cdot ({}_lC^\alpha)^2 \,.$$

В частном случае, когда

$$\mathbf{I}_\theta = \mathbf{e}_\alpha$$

имеем базисные повороты, а соотношения (42) и (43) преобразуются в следующие:

$$\mathbf{u}(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \mathbf{e}_0\,\cos\varphi^\alpha + \mathbf{e}_\alpha\,\sin\varphi^\alpha\,, & \text{для } (\mathbf{e}_\alpha)^2 = -1\,; \\ \mathbf{e}_0\,\cosh\varphi^\alpha + \mathbf{e}_\alpha\,\sinh\varphi^\alpha\,, & \text{для } (\mathbf{e}_\alpha)^2 = 1 \end{cases} \tag{49}$$

(по α нет суммирования).

Матрицы поворота в подалгебре поворотов имеют вид

$$u^\gamma{}_\beta(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \delta^\gamma{}_\beta \cdot \cos\varphi^\alpha + {}_lC^\gamma{}_{\beta\alpha} \cdot \sin\varphi^\alpha \\ \qquad\qquad \text{для } (\mathbf{e}_\alpha)^2 = -1\,; \\ \delta^\gamma{}_\beta \cdot \cosh\varphi^\alpha + {}_lC^\gamma{}_{\beta\alpha} \cdot \sinh\varphi^\alpha \\ \qquad\qquad \text{для } (\mathbf{e}_\alpha)^2 = 1\,. \end{cases} \tag{50}$$

Матрицы поворота в пространстве-времени таковы:

$$u^K{}_I(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \delta^K{}_I \cdot \cos\varphi^\alpha + {}_lC^K{}_{I\alpha} \cdot \sin\varphi^\alpha \\ \qquad\qquad \text{для } (\mathbf{e}_\alpha)^2 = -1\,; \\ \delta^K{}_I \cdot \cosh\varphi^\alpha + {}_lC^K{}_{I\alpha} \cdot \sinh\varphi^\alpha \\ \qquad\qquad \text{для } (\mathbf{e}_\alpha)^2 = 1\,. \end{cases} \tag{51}$$

5.2. *Однопараметрические растяжения*

Произвольное преобразование, сохраняющее направление вектора, представляет собой растяжение, определяемое параметром, который обозначим k. Это преобразование удовлетворяет условиям

$$\mathbf{h}(k_1 + k_2) = \mathbf{h}(k_2) \circ \mathbf{h}(k_1)\,, \tag{52}$$

$$\mathbf{h}(0) = \delta \quad \text{– единичному преобразованию}\,. \tag{53}$$

Продифференцируем уравнение (52) по k_1, после чего положим

$$k_1 = 0$$

и введем переобозначение

$$k_2 = k\,, \qquad \delta k_1 = \delta k\,.$$

Получим

$$\delta\mathbf{h}(k) = \delta k \cdot \mathbf{e}_0 \circ h(k)\,, \tag{54}$$

где

$$\mathbf{e}_0 = \left.\frac{d\mathbf{h}}{dk}\right|_{k=0} .$$

Этот вектор назовем базисным вектором оси поворота.

Уравнение (54) при начальном условии (53) позволяет записать поворот в следующем виде:

$$\mathbf{h}(k) = \exp(\mathbf{e}_0 \cdot k) \equiv \Delta + \frac{1}{1!}\,(\mathbf{e}_0 \cdot k) + \frac{1}{2!}\,(\mathbf{e}_0 \cdot k)^2 + \ldots \tag{55}$$

VI. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ГРУППА И ГРУППА ГРАВИТАЦИИ

Предварительно рассмотрим следующую задачу. Пусть вектор подвергается произвольному линейному преобразованию. Каковы *непрерывные группы*, соответствующие такому преобразованию? Качественный ответ таков: вектор можно повернуть, не меняя его длины, и, напротив, растянуть (сжать), то есть изменить его длину.

Остановимся на простейшем случае, когда исходный вектор (x, y) и вектор (x', y'), полученный в результате преобразования, находятся в одной плоскости, например 12. Произвольное линейное преобразование вектора дается соотношением

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} .$$

Далее воспользуемся следующими матрицами 2×2:

$$\mathit{1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad a = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,, \quad b = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad i = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}$$

и разложим по этим матрицам матрицу линейного преобразования

$$l = \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} = p \cdot 1 + q \cdot b + r \cdot i + s \cdot a\,.$$

Коэффициенты разложения однозначно связаны с элементами матрицы линейного преобразования

$$p - q = P\,,\quad s + r = Q\,,$$
$$p + q = S\,,\quad s - r = R\,.$$

Отсюда

$$p = \frac{P+S}{2}\,,\qquad s = \frac{Q+R}{2}\,,$$
$$q = \frac{S-P}{2}\,,\qquad p = \frac{Q-R}{2}\,.$$

Матрицы $\{1, a, b, i\}$ подчиняются законами умножения:

$$a^2 = b^2 = 1\,,\qquad i^2 = -1\,,\qquad a\,b = -b\,a = i\,,$$
$$a\,i = i\,a = -b\,,\qquad b\,i = i\,b = -a\,.$$

Поэтому линейное преобразование является элементом алгебры, построенной на указанных матрицах как на базисных. Обозначим эту алгебру: L. По алгебре L построим соответствующую ей непрерывную группу. Обозначим эту группу $\mathbf{L}$. Базисной матрице b соответствует подгруппа группы $\mathbf{L}$, определяемая следующим преобразованием:

$$\exp(b\varepsilon) = \mathrm{ch}(\varepsilon)\cdot 1 + \mathrm{sh}(\varepsilon)\cdot b =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon) - \mathrm{sh}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon) + \mathrm{sh}(\varepsilon) \end{vmatrix}\,.$$

Полученное преобразование обладает свойством группы. Можно показать, что

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon_1) - \mathrm{sh}(\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon_1) + \mathrm{sh}(\varepsilon_1) \end{vmatrix} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon_2) - \mathrm{sh}(\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon_2) + \mathrm{sh}(\varepsilon_2) \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \mathrm{sh}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \mathrm{sh}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \end{vmatrix}\,.$$

Обозначим полученную подгруппу $\mathbf{H}_1$. Эта подгруппа является группой гиперболических поворотов, причем гиперболы располагаются между осями координат. Важно, что эта подгруппа не является ортогональной и поэтому не сохраняет длину вектора. При преобразовании координаты вектора целесообразно задавать в "полярной" форме:

$$x = r(\mathrm{ch}(\alpha) - \mathrm{sh}(\alpha))\,,$$
$$y = r(\mathrm{ch}(\alpha) + \mathrm{sh}(\alpha))\,.$$

В этом случае преобразование вектора сводится к изменению "угла" α

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\varepsilon) - \mathrm{sh}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\varepsilon) + \mathrm{sh}(\varepsilon) \end{vmatrix} \times$$
$$\times\, r \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\alpha) - \mathrm{sh}(\alpha) \\ \mathrm{ch}(\alpha) + \mathrm{sh}(\alpha) \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\alpha+\varepsilon) - \mathrm{sh}(\alpha+\varepsilon) \\ \mathrm{ch}(\alpha+\varepsilon) + \mathrm{sh}(\alpha+\varepsilon) \end{vmatrix}\,.$$

Базисной матрице i соответствует подгруппа группы $\mathbf{L}$, определяемая следующим преобразованием:

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi)\cdot 1 + \sin(\varphi)\cdot i =$$
$$= \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix}\,.$$

Это преобразование определяет ортогональную группу – группу поворотов в плоскости, сохраняющую длину вектора. Обозначим ее $\mathbf{U}$.

Базисной матрице a соответствует подгруппа группы $\mathbf{L}$, определяемая следующим преобразованием:

$$\exp(a\psi) = \mathrm{ch}(\psi)\cdot 1 + \mathrm{sh}(\psi)\cdot a =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\psi) & \mathrm{sh}(\psi) \\ \mathrm{sh}(\psi) & \mathrm{ch}(\psi) \end{vmatrix}\,.$$

Это преобразование определяет неортогональную группу – группу гиперболических поворотов в плоскости, причем гиперболы располагаются между биссектрисами квадрантов системы координат. Обозначим эту группу $\mathbf{H}_2$.

Единичной базисной матрице 1 соответствует подгруппа группы $\mathbf{L}$, определяемая следующим преобразованием

$$\exp(1\zeta) = \begin{vmatrix} \exp(\zeta) & 0 \\ 0 & \exp(\zeta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}\,,$$

где введено обозначение

$$k = \exp(\zeta)\,.$$

Это преобразование определяет группу растяжений (сжатий) вектора. Обозначим эту группу $\mathbf{H}_3$. Для $-\infty < \zeta \le 0$, $0 < k \le 1$ имеем подгруппу сжатий (k – коэффициент сжатия). Для $0 \le \zeta < \infty$, $1 \le k < \infty$ имеем подгруппу растяжений (k – коэффициент растяжения).

Полная группа линейных непрерывных преобразований вектора на плоскости определяется матрицей

$$\mathbf{l} = \exp(1\zeta + b\varepsilon + i\varphi + a\psi)\,.$$

Здесь необходимо отметить, что рассмотренный характер подгрупп отнесен к преобразованию векторов, находящихся в евклидовой плоскости, для которой квадрат вектора определяется суммой квадратов координат

$$x^2 + y^2\,.$$

Если плоскость является псевдоевклидовой, для которой квадрат вектора определяется разностью квадратов координат, например

$$x^2 - y^2\,,$$

характер подгрупп меняется. Так ортогональной подгруппой **U** , не меняющей длины вектора, становится группа гиперболических поворотов

$$\begin{aligned}\exp(a\psi) &= \mathrm{ch}(\psi)\cdot 1 + \mathrm{sh}(\psi)\cdot a = \\ &= \begin{vmatrix} \mathrm{ch}(\psi) & \mathrm{sh}(\psi) \\ \mathrm{sh}(\psi) & \mathrm{ch}(\psi) \end{vmatrix}\,,\end{aligned}$$

а группа поворотов

$$\begin{aligned}\exp(i\varphi) &= \cos(\varphi)\cdot 1 + \sin(\varphi)\cdot i = \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{vmatrix}\,.\end{aligned}$$

становится неортогональной группой, которую в этом случае обозначим $\mathbf{H}_2$.

Кроме того, сделаем следующее замечание относительно инфинитезимальных преобразований[11] рассматриваемых групп. Для этого предварительно дадим следующие определения. Из группы линейных преобразований выделим группу ортогональных преобразований **U**. Обозначим матрицу ортогональных преобразований

$$u^{a_1}{}_a\,.$$

Здесь и далее в этом разделе индексы (a, b, c, d) и (a_1, b_1, c_1, d_1) принимают значения 1, 2.

Неортогональные преобразования объединим и рассмотрим группу неортогональных преобразований

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3\,.$$

Обозначим матрицу неортогональных преобразований

$$h^{a_1}{}_a\,.$$

Квадрат длины вектора запишем в следующем виде:

$$x^2 = \delta_{ab}\, x^a\, x^b\,,$$

Здесь компоненты метрического тензора δ_{ab} определяются следующим образом:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 1\,, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0\,.$$

Квадрат длины преобразованного вектора записывается соответственно

$$(x')^2 = \delta_{a_1 b_1}\, x^{a_1}\, x^{b_1}\,,$$

[11] преобразований для малых значений групповых параметров.

Инфинитезимальное преобразование ортогональной группы запишем следующим образом:

$$u^{a_1}{}_a = \delta^{a_1}{}_a + \delta u^{a_1}{}_a\,.$$

Здесь первый символ δ означает символ Кронекера, а второй символ δ означает малое приращение. Аналогично инфинитезимальное преобразование неортогональной группы запишем следующим образом:

$$h^{a_1}{}_a = \delta^{a_1}{}_a + \delta h^{a_1}{}_a\,.$$

Ортогональное преобразование

$$x^{a_1} = u^{a_1}{}_a \cdot x^a$$

сохраняет квадрат длины вектора

$$(x')^2 = \delta_{a_1 b_1}\, u^{a_1}{}_a\, u^{b_1}{}_b \cdot x^a \cdot x^b = \delta_{ab}\, x^a\, x^b\,.$$

Отсюда следует условие ортогональности преобразования[12]

$$\delta_{a_1 b_1}\, u^{a_1}{}_a\, u^{b_1}{}_b = \delta_{ab}\,.$$

Для инфинитезимального преобразования имеем

$$\delta_{a_1 b_1}\, \delta^{a_1}_a\, \delta u^{b_1}{}_b + \delta_{a_1 b_1}\, \delta u^{a_1}{}_a\, \delta^{b_1}_b = 0$$

или в другом виде

$$\delta u_{ab} + \delta u_{ba} = 0\,. \tag{56}$$

Это соотношение составляет содержание теоремы Киллинга.

Неортогональное преобразование изменяет квадрат длины преобразуемого вектора

$$(x')^2 = \delta_{a_1 b_1}\, x^{a_1}\, x^{b_1} = \delta_{a_1 b_1}\, h^{a_1}{}_a\, h^{b_1}{}_b\, x^a\, x^b = g_{ab}\; x^a\, x^b\,.$$

Метрический тензор

$$g_{ab} = \delta_{a_1 b_1}\, h^{a_1}{}_a\, h^{b_1}{}_b$$

под действием инфинитезимального преобразования изменяется следующим образом:

$$\delta_{ab} + \delta g_{ab} = \delta_{a_1 b_1}\,(\delta^{a_1}{}_a + \delta h^{a_1}{}_a)\,(\delta^{b_1}{}_b + \delta h^{b_1}{}_b)\,.$$

Отсюда

$$\delta g_{ab} = \delta_{a_1 b_1}\, \delta^{a_1}{}_a\, \delta h^{b_1}{}_b + \delta_{a_1 b_1}\, \delta h^{a_1}{}_a\, \delta^{b_1}{}_b$$

или

$$\delta g_{ab} = \delta h_{ab} + \delta h_{ba} = 2\, \delta h_{ab}\,. \tag{57}$$

Важно следующее. Приращение метрического тензора определяется приращением преобразования неортогональной группы. При этом

$$\delta h_{ab} = \delta h_{ba}\,. \tag{58}$$

Ортогональное преобразование не меняет метрического тензора, и его приращение антисимметрично при перестановке индексов.

Перейдем теперь к группам гравитации и электромагнетизма.

[12] Вид условия ортогональности не меняется при переходе к псевдоевклидовой плоскости.

1. Группа гравитации

Согласно существующим представлениям, каждому типу взаимодействий соответствует определенная группа – группа взаимодействия. Здесь мы будем говорить о двух типах взаимодействий – гравитационном и электромагнитном – и, соответственно, о двух группах – гравитационной и электрической.

С нашей точки зрения, группы взаимодействий подобны подгруппам кинематической группы (общей непрерывной группы линейных преобразований) $\mathbb{G}$, воздействующим на обобщенное пространство-время и на обобщенное пространство действия. Необходимо отметить, что наше представление о группах внешней и внутренней симметрий состоит в том, что необходимо различать левую кинематическую группу ${}_l\mathbb{G}$, когда последующее преобразование (2) умножено на исходное (1) слева

$${}_l\mathbf{l} = \mathbf{l}_2 \circ \mathbf{l}_1 \,,$$

и правую кинематическую группу ${}_r\mathbb{G}$, когда последующее преобразование (2) умножено на исходное (1) справа

$${}_r\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 \circ \mathbf{l}_2 \,.$$

При этом группы внешней симметрии подобны подгруппам левой кинематической группы ${}_l\mathbb{G}$ и, напротив, группы внутренней симметрии подобны подгруппам правой кинематической группы ${}_r\mathbb{G}$.

Согласно Эйнштейну, гравитация изменяет длину пространственно-временного вектора. Отсюда группа, изменяющая длину вектора, то есть группа гравитации, не может быть ортогональной. Таким образом, группа гравитации – это левая группа неортогональных преобразований $\mathbf{H}$. Обозначим матрицу неортогональных преобразований

$$h^i{}_k \,,$$

где индексы i, k принимают значения 1, 2, 3, 4.

2. Электрическая группа

Электрическая группа подобна группе правых поворотов в плоскости 12. [13] В этом случае матрица преобразования имеет вид

$$u^1{}_2 \,.$$

В Главе 4.3. Раздел III. показано что для включения в единую теорию взаимодействий трех поколений фундаментальных частиц необходимо дважды выполнить циклическую перестановку значений индексов 1, 2, 3. Таким образом, рассматривая электрическую группу, помимо поворотов в плоскости 12 необходимо привлечь повороты в плоскостях 23 и 31. Матрица ортогональных преобразований электрической группы приобретает вид

$$u^a{}_b \,,$$

где индексы a, b принимают значения 1, 2, 3.

Для того, чтобы электрическая группа приобрела релятивистский характер, к геометрическим поворотам необходимо добавить лоренцевы повороты (бусты) в трехмерном пространстве. Поэтому электрической группой следует считать группу, подобную группе правых поворотов в четырехмерном пространстве-времени. Матрица преобразований электрической группы приобретает вид

$$u^i{}_k \,,$$

где индексы i, k принимают значения 1, 2, 3, 4.

Участие электрической группы $u^i{}_k$ и гравитационной группы $h^i{}_k$ "на равных" в группе линейных преобразований, с нашей точки зрения, есть форма, в которую воплощается предположение о единстве электромагнетизма и гравитациии.

VII. ПОВОРОТЫ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА

Используя выражение (48), получим представление поворотов в алгебре Клиффорда ${}_l\mathbb{X}_\mathbb{L}$ векторами этой алгебры:

$$\mathbf{u}(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \varepsilon_0 \cos\varphi^\alpha + \varepsilon_\alpha \sin\varphi^\alpha \,, & \text{для } (\varepsilon_\alpha)^2 = -1 \,; \\ \varepsilon_0 \cosh\varphi^\alpha + \varepsilon_\alpha \sinh\varphi^\alpha \,, & \text{для } (\varepsilon_\alpha)^2 = 1 \,. \end{cases}$$

Отсюда получим

$${}_l\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_lC^K{}_{I\alpha} = {}_l\varepsilon_\alpha \,.$$

Матрицы поворота пространства алгебры Клиффорда вокруг оси, задаваемой вектором ${}_l\varepsilon_\alpha$, можно записать так:

$${}_lu^K{}_I(\varphi^\alpha) = \begin{cases} \delta^K{}_I \cdot \cos\varphi^\alpha + {}_lC^K{}_{I\alpha} \cdot \sin\varphi^\alpha \\ \qquad \text{для } (\varepsilon_\alpha)^2 = -1 \,; \\ \delta^K{}_I \cdot \cosh\varphi^\alpha + {}_lC^K{}_{I\alpha} \cdot \sinh\varphi^\alpha \\ \qquad \text{для } (\varepsilon_\alpha)^2 = 1 \,, \end{cases}$$

где ${}_lC^K{}_{I\alpha}$ есть структурные матрицы регулярного представления базисных векторов ${}_l\varepsilon_\alpha$, по индексу α нет суммирования. Отсюда следует, что

$${}_lK^K{}_{I\alpha} = \left.\frac{\partial\, {}_lu^K{}_I(\varphi^\alpha)}{\partial\varphi^\alpha}\right|_{\varphi^\alpha=0} = {}_lC^K{}_{I\alpha} \,. \tag{59}$$

---

[13] В Главе 4.3 Раздел II.1. показано, что привлекая правое умножение, можно вывести матрицу

$$i \cdot \delta^K{}_L \,,$$

ответственную за электромагнитное взаимодействие в теории Дирака. Здесь i – мнимая единица, индексы K, L нумеруют компоненты вектора в алгебре Клиффорда. Именно эта матрица представляет базисный вектор

$$\mathbf{e}_{12} \,.$$

1. Полувекторы

Рассмотрим поворот в алгебре Клиффорда относительно оси ε_{21}. Такой поворот представляется вектором алгебры Клиффорда

$$\mathbf{u} = \varepsilon_0 \cos\varphi + \varepsilon_{21} \sin\varphi\,. \tag{60}$$

Сопряженный поворот представляется вектором

$$\mathbf{u}^* = \varepsilon_0 \cos\varphi - \varepsilon_{21} \sin\varphi\,.$$

Вектор $\mathbf{u}^*$ является обратным по отношению к $\mathbf{u}$, то есть

$$\mathbf{u}^* \circ \mathbf{u} = (\mathbf{u})^{-1} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \circ (\mathbf{u})^{-1} = \varepsilon_0\,.$$

Вектор $\mathbf{u}$ является поворотом на угол $(+\varphi)$, а вектор $\mathbf{u}^* = (\mathbf{u})^{-1}$ – поворотом на угол $(-\varphi)$. Рассмотрим далее произведение $\mathbf{u} \circ \mathbf{u}$

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{u} = \mathbf{u}^2 = \varepsilon_0 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \varepsilon_{21}\, 2 \sin\varphi \cos\varphi$$
$$= \varepsilon_0 \cos 2\varphi + \varepsilon_{21} \sin 2\varphi\,.$$

Таким образом, $\mathbf{u}^2$ – это поворот на угол $(+2\varphi)$. Аналогично $(\mathbf{u}^*)^2$ – это поворот на угол (-2φ).

Рассмотрим теперь преобразование векторов алгебры Клиффорда под действием поворотов. Рассмотрим сначала алгебру Клиффорда ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$, построенную на базисных векторах $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}$. Сигнатура этих векторов такова: $(+, ++, -)$. Рассмотрим вектор

$$\psi = \varepsilon_1\, x^1 + \varepsilon_2\, x^2\,,$$

принадлежащий этой алгебре. Вычислим вектор

$$\psi' = \psi \circ \mathbf{u}\ :$$

$$\psi' = \psi \circ \mathbf{u} = (\varepsilon_1\, x^1 + \varepsilon_2\, x^2) \circ (\varepsilon_0 \cos\varphi + \varepsilon_{21} \sin\varphi) =$$
$$= \varepsilon_1 (x^1 \cos\varphi + x^2 \sin\varphi) + \varepsilon_2 (x^2 \cos\varphi - x^1 \sin\varphi)\,,$$

то есть, ψ' представляет собой вектор, повернутый относительно ψ на угол $(-\varphi)$. Аналогично этому

$$\psi' = \mathbf{u} \circ \psi = (\varepsilon_0 \cos\varphi + \varepsilon_{21} \sin\varphi) \circ (\varepsilon_1\, x^1 + \varepsilon_2\, x^2)$$
$$= \varepsilon_1 (x^1 \cos\varphi - x^2 \sin\varphi) + \varepsilon_2 (x^2 \cos\varphi + x^1 \sin\varphi)$$

– вектор, повернутый относительно ψ на угол $(+\varphi)$. [14] Векторы $\psi' = \psi \circ \mathbf{u}^*$ и $\psi' = \mathbf{u}^* \circ \psi$ повернуты относительно ψ на углы $(+\varphi)$ и $(-\varphi)$ соответственно. Отсюда следует, что

$$\psi \circ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \circ \psi\,, \quad \mathbf{u} \circ \psi = \psi \circ \mathbf{u}^*\,,$$
$$\mathbf{u} \circ \psi \circ \mathbf{u} = \psi\,, \quad \mathbf{u}^* \circ \psi \circ \mathbf{u}^* = \psi\,.$$

Кроме того, вектор вида

$$\mathbf{u} \circ \psi \circ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^2 \circ \psi = \psi \circ (\mathbf{u}^*)^2$$

соответствует повороту ψ на угол $(+2\varphi)$, а вектор

$$\mathbf{u}^* \circ \psi \circ \mathbf{u} = (\mathbf{u}^*)^2 \circ \psi = \psi \circ \mathbf{u}^2$$

– повороту ψ на угол (-2φ).

Рассмотрим теперь другой вектор, принадлежащий указанной алгебре,

$$\lambda = \varepsilon_0\, x^0 + \varepsilon_{21}\, x^{21}\,,$$

Умножение λ на $\mathbf{u}$ справа дает

$$\lambda' = \lambda \circ \mathbf{u} = (\varepsilon_0\, x^0 + \varepsilon_{21}\, x^{21}) \circ (\varepsilon_0 \cos\varphi + \varepsilon_{21} \sin\varphi) =$$
$$= \varepsilon_0 (x^0 \cos\varphi - x^{21} \sin\varphi) + \varepsilon_{21} (x^{21} \cos\varphi + x^0 \sin\varphi)\,,$$

то есть, λ' представляет собой вектор, повернутый относительно λ на угол $(-\varphi)$. Умножим λ на $\mathbf{u}$ слева

$$\lambda' = \mathbf{u} \circ \lambda = (\varepsilon_0 \cos\varphi + \varepsilon_{21} \sin\varphi) \circ (\varepsilon_0\, x^0 + \varepsilon_{21}\, x^{21}) =$$
$$= \varepsilon_0 (x^0 \cos\varphi - x^{21} \sin\varphi) + \varepsilon_{21} (x^{21} \cos\varphi + x^0 \sin\varphi)\,.$$

Следовательно, умножение λ на $\mathbf{u}$ слева поворачивает λ также на угол $(-\varphi)$. Аналогично этому легко получить, что векторы $\mathbf{u}^* \circ \lambda$ и $\lambda \circ \mathbf{u}^*$ соответствуют повороту на угол $(+\varphi)$. Из

$$\mathbf{u} \circ \lambda = \lambda \circ \mathbf{u}\,, \qquad \lambda \circ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^* \circ \lambda$$

следует

$$\mathbf{u} \circ \lambda \circ \mathbf{u}^* = \lambda\,, \qquad \mathbf{u}^* \circ \lambda \circ \mathbf{u} = \lambda\,,$$

а также, что вектор

$$\mathbf{u} \circ \lambda \circ \mathbf{u} = \mathbf{u}^2 \circ \lambda = \lambda \circ \mathbf{u}^2$$

соответствует повороту λ на угол (-2φ), а вектор

$$\mathbf{u}^* \circ \lambda \circ \mathbf{u}^* = (\mathbf{u}^*)^2 \circ \lambda = \lambda \circ (\mathbf{u}^*)^2$$

– повороту λ на угол $(+2\varphi)$.

Рассмотрим теперь преобразование полного вектора алгебры ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$

$$\mathbf{x} = (\varepsilon_0\, x^0 + \varepsilon_{21}\, x^{21}) + (\varepsilon_1\, x^1 + \varepsilon_2\, x^2) = \lambda + \psi$$

под действием поворота (60). Из предыдущего следует, что умножение $\mathbf{x}$ на $\mathbf{u}$ справа $(\mathbf{x} \circ \mathbf{u})$ поворачивает каждую из частей λ и ψ на угол $(-\varphi)$, а умножение слева поворачивает часть ψ на угол $(+\varphi)$, а часть λ на угол $(-\varphi)$. Умножение $\mathbf{x}$ на $\mathbf{u}^*$ слева $(\mathbf{u}^* \circ \mathbf{x})$ приводит к повороту каждой из частей λ и ψ на угол $(+\varphi)$, а умножение $\mathbf{x}$ на $\mathbf{u}^*$ справа $(\mathbf{x} \circ \mathbf{u}^*)$ приводит к повороту части λ на угол $(+\varphi)$, а части ψ на угол $(-\varphi)$. Преобразования вида

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{u}^*\,, \qquad \mathbf{u}^* \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{u} \tag{61}$$

---

[14] Заметим, что для алгебры Клиффорда ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$, построенной на базисных векторах $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{21}$ с сигнатурой $(+, --, -)$, умножение ψ на $\mathbf{u}$ справа $(\psi \circ \mathbf{u})$ поворачивает ψ на угол $(+\varphi)$, а слева $(\mathbf{u} \circ \psi)$ – на угол $(-\varphi)$.

сохраняют часть λ, но поворачивают часть ψ на угол $(-2\,\varphi)$ и $(+2\,\varphi)$ соответственно. И, напротив, преобразования вида

$$\mathbf{u}\circ\mathbf{x}\circ\mathbf{u}\,,\qquad \mathbf{u}^*\circ\mathbf{x}\circ\mathbf{u}^* \tag{62}$$

сохраняют часть ψ, но поворачивают часть λ на угол $(-2\,\varphi)$ и $(+2\,\varphi)$ соответственно, то есть

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}\circ\mathbf{x}\circ\mathbf{u}^* = \lambda + \mathbf{u}\circ\psi\circ\mathbf{u}^*\,,\\
&\mathbf{u}^*\circ\mathbf{x}\circ\mathbf{u} = \lambda + \mathbf{u}^*\circ\psi\circ\mathbf{u}\,,\\
&\mathbf{u}\circ\mathbf{x}\circ\mathbf{u} = \mathbf{u}\circ\lambda\circ\mathbf{u} + \psi\,,\\
&\mathbf{u}^*\circ\mathbf{x}\circ\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*\circ\lambda\circ\mathbf{u}^* + \psi\,.
\end{aligned}$$

Все сказанное свидетельствует о том, что полный вектор алгебры Клиффорда ${}_l\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$ содержит два слагаемых, преобразующихся по-разному под действием поворотов. В связи с этим дадим следующее определение. Назовем часть вектора алгебры Клиффорда, преобразующуюся при поворотах (61) и сохраняющуюся при поворотах (62), *полувектором первого рода*, а часть вектора алгебры Клиффорда, преобразующуюся при поворотах (62) и сохраняющуюся при поворотах (61), *полувектором второго рода*.

Рассмотрим далее вектор алгебры Клиффорда ${}_l\mathbb{X}_{\mathbb{L}3}$ с сигнатурой $(+,+++,---,-)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = \varepsilon_0\,x^0 + \varepsilon_1\,x^1 + \varepsilon_2\,x^2 + \varepsilon_3\,x^3\\
&+\varepsilon_{21}\,x^{21} + \varepsilon_{13}\,x^{13} + \varepsilon_{23}\,x^{23} + \varepsilon_{123}\,x^{123}
\end{aligned}$$

Рассмотрим поведение двух слагаемых

$$\chi = \varepsilon_3\,x^3 + \varepsilon_{123}\,x^{123}\,,\qquad \mu = \varepsilon_{13}\,x^{13} + \varepsilon_{23}\,x^{23}$$

под действием поворота (60). Имеем

$$\begin{aligned}
&\chi' = \chi\circ\mathbf{u} = (\varepsilon_3\,x^3 + \varepsilon_{123}\,x^{123})\circ(\varepsilon_0\,\cos\varphi + \varepsilon_{21}\,\sin\varphi)\\
&= \varepsilon_3\,(x^3\,\cos\varphi - x^{123}\,\sin\varphi) + \varepsilon_{123}\,(x^{123}\,\cos\varphi + x^0\,\sin\varphi)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\chi' = \mathbf{u}\circ\chi = (\varepsilon_0\,\cos\varphi + \varepsilon_{21}\,\sin\varphi)\circ(\varepsilon_3\,x^3 + \varepsilon_{123}\,x^{123}) =\\
&\varepsilon_3\,(x^3\,\cos\varphi - x^{123}\,\sin\varphi) + \varepsilon_{123}\,(x^{123}\,\cos\varphi + x^3\,\sin\varphi)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu' = \mu\circ\mathbf{u} = (\varepsilon_{13}\,x^{13} + \varepsilon_{23}\,x^{23})\circ(\varepsilon_0\,\cos\varphi + \varepsilon_{21}\,\sin\varphi) =\\
&\varepsilon_{13}\,(x^{13}\,\cos\varphi - x^{23}\,\sin\varphi) + \varepsilon_{23}\,(x^{23}\,\cos\varphi + x^{13}\,\sin\varphi)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu' = \mathbf{u}\circ\mu = (\varepsilon_0\,\cos\varphi + \varepsilon_{21}\,\sin\varphi)\circ(\varepsilon_{13}\,x^{13} + \varepsilon_{23}\,x^{23}) =\\
&\varepsilon_{13}\,(x^{13}\,\cos\varphi - x^{23}\,\sin\varphi) + \varepsilon_{23}\,(x^{23}\,\cos\varphi + x^{13}\,\sin\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что слагаемые

$$\psi + \mu = \varepsilon_1\,x^1 + \varepsilon_2\,x^2 + \varepsilon_{13}\,x^{13} + \varepsilon_{23}\,x^{23}$$

составляют полувектор первого рода, а слагаемые

$$\lambda + \chi = \varepsilon_0\,x^0 + \varepsilon_{21}\,x^{21} + \varepsilon_3\,x^3 + \varepsilon_{123}\,x^{123}$$

составляют полувектор второго рода.

Рассмотрим далее вектор алгебры Клиффорда ${}_l\mathbb{X}_{\mathbb{L}4}$ с сигнатурой $(+,+++-,---+++,-+++,-)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = \varepsilon_0\,x^0 + \varepsilon_1\,x^1 + \varepsilon_2\,x^2 + \varepsilon_3\,x^3 + \varepsilon_4\,x^4 +\\
&+\varepsilon_{21}\,x^{21} + \varepsilon_{13}\,x^{13} + \varepsilon_{23}\,x^{23} + \varepsilon_{14}\,x^{14} + \varepsilon_{24}\,x^{24} + \varepsilon_{34}\,x^{34} +\\
&+\varepsilon_{123}\,x^{123} + \varepsilon_{124}\,x^{124} + \varepsilon_{134}\,x^{134} + \varepsilon_{234}\,x^{234} + \varepsilon_{1234}\,x^{1234}\,.
\end{aligned}$$

Он распадается на полувектор первого рода

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}' = (\varepsilon_1\,x^1 + \varepsilon_2\,x^2) + (\varepsilon_{13}\,x^{13} + \varepsilon_{23}\,x^{23}) +\\
&+(\varepsilon_{14}\,x^{14} + \varepsilon_{24}\,x^{24}) + (\varepsilon_{134}\,x^{134} + \varepsilon_{234}\,x^{234})
\end{aligned}$$

и полувектор второго рода

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}'' = (\varepsilon_0\,x^0 + \varepsilon_{21}\,x^{21}) + (\varepsilon_3\,x^3 + \varepsilon_{123}\,x^{123}) +\\
&+(\varepsilon_4\,x^4 + \varepsilon_{124}\,x^{124}) + (\varepsilon_{34}\,x^{34} + \varepsilon_{1234}\,x^{1234})\,.
\end{aligned}$$

Заметим, что поведение компонент вектора при повороте заставляет группировать компоненты вектора определенным образом. Это замечание играет ключевую роль при выборе *последовательности* компонент при записи вектора пространства-времени. В конечном итоге компоненты вектора должны быть расположены в указанной последовательности:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

2. Левые геометрические повороты

Базисными векторами осей геометрических поворотов служат базисные векторы

$${}_l\varepsilon_{21}\,,\qquad {}_l\varepsilon_{13}\,,\qquad {}_l\varepsilon_{32}\,.$$

Рассмотрим два случая представления поворотов:

1) пространством представления является подалгебра пространства-времени – алгебра Клиффорда ${}_l\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$;

2) пространством представления является все пространство-время ${}_l\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$.

В первом случае пространство представления строится на исходных базисных векторах ${}_l\varepsilon_{21}$, ${}_l\varepsilon_{13}$, ${}_l\varepsilon_{32}$, которые вместе с базисным вектором ε_0 образуют алгебру Клиффорда ${}_l\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$ – алгебру кватернионов. Генераторами левых геометрических поворотов в пространстве алгебры ${}_l\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$ являются структурные матрицы

$${}_lC^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \sim {}_l\mathbf{e}_\alpha\,.$$

Вычисления показывают, что этими матрицами являются матрицы Паули, умноженные на мнимую единицу (правила вычисления структурных матриц указаны в Главе 4.1. Разделы II, III).

$$
{}_{\iota}\varepsilon_{21} \sim \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
32 & & -1 & & \\
13 & 1 & & & \\ \hline
21 & & & & 1 \\
0 & & & -1 & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_3 \,,
$$

$$
{}_{\iota}\varepsilon_{13} \sim \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
32 & & & 1 & \\
13 & & & & 1 \\ \hline
21 & -1 & & & \\
0 & & -1 & & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & -i \\ \hline i & \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_2 \,,
$$

$$
{}_{\iota}\varepsilon_{32} \sim \begin{array}{c|cc|cc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\ \hline
32 & & & & 1 \\
13 & & & -1 & \\ \hline
21 & & 1 & & \\
0 & -1 & & & \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} = i\,\sigma_1 \,.
$$

Во втором случае пространством представления является все пространство-время ${}_{\iota}\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$. Генераторами левых геометрических поворотов в пространстве алгебры ${}_{\iota}\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ являются структурные матрицы

$$
{}_{\iota}C^{L}{}_{I\alpha} \sim {}_{\iota}\mathbf{e}_{\alpha}\,.
$$

Вычисления показывают, что эти матрицы имеют вид (правила вычисления структурных матриц указаны в Главе 4.1. Раздел II.).

$$
{}_{\iota}\varepsilon_{13} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
1324 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
3 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
4 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array},
$$

$$
= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & -i & & & & & & & 13 \\
i & & & & & & & & 0 \\
 & & & -i & & & & & 14 \\
 & & i & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & -i & & & 2 \\
 & & & & i & & & & 123 \\
 & & & & & & & -i & 234 \\
 & & & & & & i & & 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma_2 & & & & 0 \\
 & \sigma_2 & & & 34 \\ \hline
 & & \sigma_2 & & 123 \\
 & & & \sigma_2 & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
{}_{\iota}\varepsilon_{21} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array},
$$

$$
= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
-1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & -1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & -1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & -1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma_3 & & & & 0 \\
 & \sigma_3 & & & 34 \\ \hline
 & & \sigma_3 & & 123 \\
 & & & \sigma_3 & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
{}_{\iota}\varepsilon_{32} \sim \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
14 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
34 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
123 & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
234 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
124 & & & & & & & & & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array},
$$

$$
= i \begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
 & 1 & & & & & & & 13 \\
1 & & & & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & & & & 14 \\
 & & 1 & & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & & 1 & & & 2 \\
 & & & & 1 & & & & 123 \\
 & & & & & & & 1 & 234 \\
 & & & & & & 1 & & 124 \\ \hline
\end{array} = i \begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
\sigma_1 & & & & 0 \\
 & \sigma_1 & & & 34 \\ \hline
 & & \sigma_1 & & 123 \\
 & & & \sigma_1 & 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
{}_{l}\varepsilon_{0} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
14 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
34 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
123 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ \hline
134 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
234 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
4 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
124 & & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
1 & & & & & & & & 13 \\
 & 1 & & & & & & & 0 \\
 & & 1 & & & & & & 14 \\
 & & & 1 & & & & & 34 \\ \hline
 & & & & 1 & & & & 2 \\
 & & & & & 1 & & & 123 \\
 & & & & & & 1 & & 234 \\
 & & & & & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
1 & & & & 0 \\
 & 1 & & & 34 \\ \hline
 & & 1 & & 123 \\
 & & & 1 & 124 \\ \hline
\end{array} .
$$

3. Левые релятивистские повороты

Левые релятивистские повороты состоят из геометрических поворотов относительно осей

$$
{}_{l}\varepsilon_{21}\,, \qquad {}_{l}\varepsilon_{13}\,, \qquad {}_{l}\varepsilon_{32}\,.
$$

и так называемых *бустов*, то есть поворотов относительно осей

$$
{}_{l}\varepsilon_{14}\,, \qquad {}_{l}\varepsilon_{42}\,, \qquad {}_{l}\varepsilon_{34}\,.
$$

Эти повороты являются гиперболическими.

Рассмотрим два случая представления поворотов:

1) пространством представления является подалгебра пространства-времени – алгебра Клиффорда ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}3}$;

2) пространством представления является все пространство-время ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$.

В первом случае пространство представления строится на исходных базисных векторах ${}_{l}\varepsilon_{21}$, ${}_{l}\varepsilon_{13}$, ${}_{l}\varepsilon_{32}$, ${}_{l}\varepsilon_{14}$, ${}_{l}\varepsilon_{42}$, ${}_{l}\varepsilon_{34}$, которые вместе с базисными векторами ε_0 и ${}_{l}\varepsilon_{1324}$ образуют алгебру Клиффорда ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}3}$. Генераторами левых релятивистских поворотов в пространстве алгебры ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}3}$ являются структурные матрицы

$$
{}_{l}C^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \sim {}_{l}\mathbf{e}_{\alpha}\,.
$$

Вычисления приводят к следующим матрицам (правила вычисления структурных матриц указаны в Главе 4.1. Разделы II.):

$$
{}_{l}\varepsilon_{21} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & -1 & & & & & & \\
13 & 1 & & & & & & & \\
21 & & & & 1 & & & & \\
0 & & & -1 & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & -1 & & \\
14 & & & & & 1 & & & \\
1324 & & & & & & & & 1 \\
34 & & & & & & & -1 & \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
-1 & & & & 13 \\
 & 1 & & & 0 \\ \hline
 & & -1 & & 14 \\
 & & & 1 & 34 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
\sigma_3 & & 0 \\ \hline
 & \sigma_3 & 34 \\ \hline
\end{array} ,
$$

$$
{}_{l}\varepsilon_{13} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & & 1 & & & & & \\
13 & & & & 1 & & & & \\
21 & -1 & & & & & & & \\
0 & & -1 & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & 1 & \\
14 & & & & & & & & 1 \\
1324 & & & & & -1 & & & \\
34 & & & & & & -1 & & \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
 & -i & & & 13 \\
i & & & & 0 \\ \hline
 & & & -i & 14 \\
 & & i & & 34 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
\sigma_2 & & 0 \\ \hline
 & \sigma_2 & 34 \\ \hline
\end{array} ,
$$

$$
{}_{l}\varepsilon_{32} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & & & 1 & & & & \\
13 & & & -1 & & & & & \\
21 & & 1 & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & \\ \hline
42 & & & & & & & & 1 \\
14 & & & & & & & -1 & \\
1324 & & & & & & 1 & & \\
34 & & & & & -1 & & & \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
 & 1 & & & 13 \\
1 & & & & 0 \\ \hline
 & & & 1 & 14 \\
 & & 1 & & 34 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
\sigma_1 & & 0 \\ \hline
 & \sigma_1 & 34 \\ \hline
\end{array} ,
$$

$$
{}_{l}\varepsilon_{14} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 & & & & & & & 1 & \\
13 & & & & & & & & 1 \\
21 & & & & & 1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
42 & & & 1 & & & & & \\
14 & & & & 1 & & & & \\
1324 & 1 & & & & & & & \\
34 & & 1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
 & & & 1 & 13 \\
 & & 1 & & 0 \\ \hline
 & 1 & & & 14 \\
1 & & & & 34 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
 & \sigma_1 & 0 \\ \hline
\sigma_1 & & 34 \\ \hline
\end{array} ,
$$

$$
{}_{l}\varepsilon_{24} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 &&&&&&&& -1 \\
13 &&&&&&& 1 \\
21 &&&&&& 1 \\
0 &&&&& -1 \\ \hline
42 &&&& -1 \\
14 &&& 1 \\
1324 && 1 \\
34 & -1 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
&&& -i & 13 \\
&& i && 0 \\ \hline
& -i &&& 14 \\
i &&&& 34 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
& \sigma_2 & 0 \\ \hline
\sigma_2 & & 34 \\ \hline
\end{array},
$$

$$
{}_{l}\varepsilon_{34} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 \\ \hline
32 &&&&& -1 \\
13 &&&&&& -1 \\
21 &&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&& 1 \\ \hline
42 & -1 \\
14 && -1 \\
1324 &&& 1 \\
34 &&&& 1 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & \\ \hline
&& -1 && 13 \\
&&& 1 & 0 \\ \hline
-1 &&&& 14 \\
& 1 &&& 34 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 34 & \\ \hline
& \sigma_3 & 0 \\ \hline
\sigma_3 & & 34 \\ \hline
\end{array},
$$

$$
{}_{l}\varepsilon_{1324} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123 \\ \hline
32 &&&&&& 1 \\
13 &&&&& -1 \\
21 &&&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&& -1 \\ \hline
1 && 1 \\
2 & -1 \\
3 &&&& 1 \\
123 &&& -1 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
&& 1 && 13 \\
&&& 1 & 0 \\ \hline
1 &&&& 2 \\
& 1 &&& 123 \\ \hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|c}
0 & 123 & \\ \hline
& \mathbb{1} & 2 \\ \hline
\mathbb{1} & & 123 \\ \hline
\end{array}.
$$

Во втором случае пространством представления является все пространство-время ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$. Генераторами левых геометрических поворотов в пространстве алгебры ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ являются структурные матрицы

$$
{}_{l}{C^{L}}_{I\alpha} \sim {}_{l}\mathbf{e}_{\alpha}\,.
$$

Генераторами релятивистских поворотов в пространстве представления ${}_{l}\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$, помимо матриц, указанных в предыдущем Разделе, являются:

$$
{}_{l}\varepsilon_{14} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&& 1 \\
21 &&&&& 1 \\
0 &&&&&& 1 \\ \hline
42 &&& 1 \\
14 &&&& 1 \\
1324 & 1 \\
34 && 1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
3 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
123 &&&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&&& -1 \\
234 &&&&&&&&&&&& -1 \\
4 &&&&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array},
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& 1 &&&&& 13 \\
&& 1 &&&&&& 0 \\
& 1 &&&&&&& 14 \\
1 &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& -1 & 2 \\
&&&&&& -1 && 123 \\
&&&&& -1 &&& 234 \\
&&&& -1 &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& \sigma_1 &&& 0 \\
\sigma_1 &&&& 34 \\ \hline
&&& -\sigma_1 & 123 \\
&& -\sigma_1 && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
{}_{l}\varepsilon_{42} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&& -1 \\
21 &&&&&& -1 \\
0 &&&&& 1 \\ \hline
42 &&&& 1 \\
14 &&& -1 \\
1324 && -1 \\
34 & 1 \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
2 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
3 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&&&&&&& -1 \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&& -1 \\
234 &&&&&&&&&&& 1 \\
4 &&&&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&&&& -1 \\ \hline
\end{array},
$$

$$
= 1
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\ \hline
&&& i &&&&& 13 \\
&& -i &&&&&& 0 \\
& i &&&&&&& 14 \\
-i &&&&&&&& 34 \\ \hline
&&&&&&& -i & 2 \\
&&&&&& i && 123 \\
&&&&& -i &&& 234 \\
&&&& i &&&& 124 \\ \hline
\end{array}
= 1
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\ \hline
& -\sigma_2 &&& 0 \\
-\sigma_2 &&&& 34 \\ \hline
&&& \sigma_2 & 123 \\
&& \sigma_2 && 124 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
{}_l\varepsilon_{34} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
\hline
32 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
\hline
42 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
1 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & -1 & \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
\hline
134 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & -1 & & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
= \mathit{1}
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\
\hline
 & & -1 & & & & & & 13 \\
 & & & 1 & & & & & 0 \\
-1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\
\hline
 & & & & & & 1 & & 2 \\
 & & & & & & & -1 & 123 \\
 & & & & 1 & & & & 234 \\
 & & & & & -1 & & & 124 \\
\hline
\end{array}
= \mathit{1}
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\
\hline
 & \sigma_3 & & & 0 \\
\sigma_3 & & & & 34 \\
\hline
 & & & -\sigma_3 & 123 \\
 & & -\sigma_3 & & 124 \\
\hline
\end{array}
,
$$

$$
{}_l\varepsilon_{1324} \sim
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\
\hline
32 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
13 & & & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
21 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
\hline
42 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
14 & -1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
1324 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
34 & & & -1 & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
1 & & & & & & & & & & & & & & -1 & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
3 & & & & & & & & & & & & & & & & -1 \\
123 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
134 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
234 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
124 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
= i
\begin{array}{|cccc|cccc|c}
13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 & \\
\hline
 & & 1 & & & & & & 13 \\
 & & & 1 & & & & & 0 \\
1 & & & & & & & & 14 \\
 & 1 & & & & & & & 34 \\
\hline
 & & & & & & -1 & & 2 \\
 & & & & & & & -1 & 123 \\
 & & & & -1 & & & & 234 \\
 & & & & & -1 & & & 124 \\
\hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|cc|cc|c}
0 & 34 & 123 & 124 & \\
\hline
 & \mathbb{1} & & & 0 \\
\mathbb{1} & & & & 34 \\
\hline
 & & & -\mathbb{1} & 123 \\
 & & -\mathbb{1} & & 124 \\
\hline
\end{array}
.
$$

4. Правые повороты в алгебре Клиффорда

Правые базисные векторы в алгебре Клиффорда обозначаются ${}_r\varepsilon_I$ в отличие от левых базисных векторов ${}_l\varepsilon_I$.

4.1. Правые геометрические повороты

Базисными векторами осей правых геометрических поворотов служат базисные векторы

$$
{}_r\varepsilon_{21}\,, \qquad {}_r\varepsilon_{13}\,, \qquad {}_r\varepsilon_{32}\,.
$$

Вместе с базисным вектором ${}_r\varepsilon_0$ указанные векторы образуют алгебру Клиффорда ${}_r\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$ – алгебру кватернионов. Генераторами правых геометрических поворотов в пространстве алгебры ${}_r\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$ являются структурные матрицы

$$
{}_rC^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \sim {}_r\mathbf{e}_\alpha\,.
$$

Вычисления показывают, что эти матрицы имеют вид (правила вычисления структурных матриц указаны в Главе 4.1. Разделы II, III.)

$$
{}_r\varepsilon_{21} \sim
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\
\hline
32 & & 1 & & \\
13 & -1 & & & \\
\hline
21 & & & & 1 \\
0 & & & -1 & \\
\hline
\end{array}
= i
\begin{array}{|c|c|}
\hline
1 & \\
\hline
 & 1 \\
\hline
\end{array}
= i \cdot 1\ ,
$$

$$
{}_r\varepsilon_{13} \sim
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\
\hline
32 & & & -1 & \\
13 & & & & 1 \\
\hline
21 & 1 & & & \\
0 & & -1 & & \\
\hline
\end{array}
= b
\begin{array}{|c|c|}
\hline
 & -i \\
\hline
i & \\
\hline
\end{array}
= -b \cdot i\ ,
$$

$$
{}_r\varepsilon_{32} \sim
\begin{array}{c|cc|cc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 \\
\hline
32 & & & & 1 \\
13 & & & 1 & \\
\hline
21 & & -1 & & \\
0 & -1 & & & \\
\hline
\end{array}
= a
\begin{array}{|c|c|}
\hline
 & 1 \\
\hline
-1 & \\
\hline
\end{array}
= a \cdot i\ .
$$

4.2. Электрическая группа

Обратим внимание на генератор правого поворота относительно оси 21. В пространстве представления ${}_r\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$ этот генератор имеет вид

$$
{}_r\varepsilon_{21} \ \sim\ i \cdot 1\,.
$$

В пространстве представления ${}_r\mathbb{X}$ этот генератор имеет аналогичный вид

$$
{}_r\varepsilon_{21} \ \sim\ {}_rC^I{}_{K21} = i \cdot \delta^I{}_K\,.
$$

Действительно, вычисление структурной матрицы дает

$$
{}_r\varepsilon_{21} \sim
\begin{array}{c|cccccccccccccccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 && 1 \\
13 & -1 \\
21 &&&& 1 \\
0 &&& -1 \\
42 &&&&&& 1 \\
14 &&&&& -1 \\
1324 &&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&& -1 \\
1 &&&&&&&&&& 1 \\
2 &&&&&&&&& -1 \\
3 &&&&&&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&&&&& -1 \\
134 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
234 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
4 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&&&&&&&&&& -1
\end{array}
= i
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & 1 \\
0 && 1 \\
14 &&& 1 \\
34 &&&& 1 \\
2 &&&&& 1 \\
123 &&&&&& 1 \\
234 &&&&&&& 1 \\
124 &&&&&&&& 1
\end{array}
= i
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & \mathbb{1} \\
34 && \mathbb{1} \\
123 &&& \mathbb{1} \\
124 &&&& \mathbb{1}
\end{array}
.
$$

$$
{}_r\varepsilon_{4} \sim
\begin{array}{c|cccccccccccccccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
13 &&&&&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&&&&&&&&& -1 \\
42 &&&&&&&&&& -1 \\
14 &&&&&&&&& 1 \\
1324 &&&&&&&&&&&& -1 \\
34 &&&&&&&&&&& 1 \\
1 &&&&&& -1 \\
2 &&&&& 1 \\
3 &&&&&&&& -1 \\
123 &&&&&&& 1 \\
134 && 1 \\
234 & -1 \\
4 &&&& 1 \\
124 &&& -1
\end{array}
= i
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&&&& 1 \\
0 &&&&&&&& 1 \\
14 &&&&& -1 \\
34 &&&&&& -1 \\
2 &&& -1 \\
123 &&&& -1 \\
234 & 1 \\
124 && 1
\end{array}
= i
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&&& \mathbb{1} \\
34 &&& -\mathbb{1} \\
123 && -\mathbb{1} \\
124 & \mathbb{1}
\end{array}
,
$$

В теории Дирака генератор вида $i \cdot \delta^I{}_K$ является генератором электрической группы. Отсюда следует, что электрическая группа есть группа правых поворотов вокруг оси 21 (в плоскости 21).

4.3. Слабая группа

В дальнейшем (Глава 5.2. Раздел V.3) покажем, что слабой группой следует считать группу правых поворотов относительно осей, задаваемых базисными векторами

$$
{}_r\varepsilon_{4}\,, \qquad {}_r\varepsilon_{123}\,, \qquad {}_r\varepsilon_{1324}\,.
$$

Вместе с базисным вектором ${}_r\varepsilon_0$ указанные векторы образуют алгебру Клиффорда ${}_r\mathbb{X}_{\mathbb{L}2}$ – алгебру кватернионов. Остановимся на случае, когда пространством представления является все пространство-время ${}_r\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$. Генераторами рассматриваемых правых поворотов в пространстве алгебры ${}_r\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ являются структурные матрицы

$$
{}_rC^L{}_{I\alpha} \sim {}_r\mathbf{e}_\alpha\,.
$$

Вычисления показывают, что эти матрицы имеют вид (правила вычисления структурных матриц указаны в Главе 4.1. Разделы II, III.)

$$
{}_r\varepsilon_{123} \sim
\begin{array}{c|cccccccccccccccc}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&&&&& -1 \\
13 &&&&&&&&&& -1 \\
21 &&&&&&&&&&& -1 \\
0 &&&&&&&&&&&& -1 \\
42 &&&&&&&&&&&&& 1 \\
14 &&&&&&&&&&&&&& 1 \\
1324 &&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
1 & 1 \\
2 && 1 \\
3 &&& 1 \\
123 &&&& 1 \\
134 &&&&& -1 \\
234 &&&&&& -1 \\
4 &&&&&&& -1 \\
124 &&&&&&&& -1
\end{array}
= 1
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&&&& -1 \\
0 &&&&&& -1 \\
14 &&&&&&& 1 \\
34 &&&&&&&& 1 \\
2 & 1 \\
123 && 1 \\
234 &&& -1 \\
124 &&&& -1
\end{array}
= 1
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 &&& -\mathbb{1} \\
34 &&&& \mathbb{1} \\
123 & \mathbb{1} \\
124 && -\mathbb{1}
\end{array}
,
$$

$$
{}_{r}\varepsilon_{1324} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
13 &&&&& -1 &&&&&&&&&&& \\
21 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
0 &&&&&&& -1 &&&&&&&&& \\ \hline
42 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
14 & -1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
1324 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\
34 &&& -1 &&&&&&&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
2 &&&&&&&&&&&&& -1 &&& \\
3 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\
123 &&&&&&&&&&&&&&& -1 & \\ \hline
134 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
234 &&&&&&&&& -1 &&&&&&& \\
4 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\
124 &&&&&&&&&&& -1 &&&&& \\ \hline
\end{array} ,
$$

$$
= i \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 &&& 1 &&&&& \\
0 &&&& 1 &&&& \\
14 & 1 &&&&&&& \\
34 && 1 &&&&&& \\ \hline
2 &&&&&&& 1 & \\
123 &&&&&&&& 1 \\
234 &&&&& 1 &&& \\
124 &&&&&& 1 && \\ \hline
\end{array}
= i \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 && \mathbb{1} && \\
34 & \mathbb{1} &&& \\ \hline
123 &&&& \mathbb{1} \\
124 &&& \mathbb{1} & \\ \hline
\end{array}
$$

$$
{}_{r}\varepsilon_{0} \sim \begin{array}{r|cccc|cccc|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 42 & 14 & 1324 & 34 & 1 & 2 & 3 & 123 & 134 & 234 & 4 & 124 \\ \hline
32 & 1 &&&&&&&&&&&&&&& \\
13 && 1 &&&&&&&&&&&&&& \\
21 &&& 1 &&&&&&&&&&&&& \\
0 &&&& 1 &&&&&&&&&&&& \\ \hline
42 &&&&& 1 &&&&&&&&&&& \\
14 &&&&&& 1 &&&&&&&&&& \\
1324 &&&&&&& 1 &&&&&&&&& \\
34 &&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\ \hline
1 &&&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
2 &&&&&&&&&& 1 &&&&&& \\
3 &&&&&&&&&&& 1 &&&&& \\
123 &&&&&&&&&&&& 1 &&&& \\ \hline
134 &&&&&&&&&&&&& 1 &&& \\
234 &&&&&&&&&&&&&& 1 && \\
4 &&&&&&&&&&&&&&& 1 & \\
124 &&&&&&&&&&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array} .
$$

$$
= 1 \begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 13 & 0 & 14 & 34 & 2 & 123 & 134 & 124 \\ \hline
13 & 1 &&&&&&& \\
0 && 1 &&&&&& \\
14 &&& 1 &&&&& \\
34 &&&& 1 &&&& \\ \hline
2 &&&&& 1 &&& \\
123 &&&&&& 1 && \\
234 &&&&&&& 1 & \\
124 &&&&&&&& 1 \\ \hline
\end{array}
= 1 \begin{array}{r|cc|cc|}
 & 0 & 34 & 123 & 124 \\ \hline
0 & \mathbb{1} &&& \\
34 && \mathbb{1} && \\ \hline
123 &&& \mathbb{1} & \\
124 &&&& \mathbb{1} \\ \hline
\end{array}
$$

VIII. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Напомним, что сопряженное пространство-время поставлено в соотвествие фундаментальным антиобъектам, примером которых являютя фундаментальные античастицы. Движение фундаментальных антиобъектов отождествляется с линейными преобразованиями сопряженного пространства-времени $\mathbb{X}^*$.

Введем линейное преобразование $(\ )\mathbf{l}^*\colon\ \mathbb{X}^* \to \mathbb{X}'^*$, которое назовем *сопряженным.* Оно ставит в соотвествие вектору $\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}^*$ вектор $\mathbf{x}'^* \in \mathbb{X}'^*$. Указанное соответствие запишем так:

$$\mathbf{x}'^* = (\mathbf{x}^*)\mathbf{l}^* .$$

Множество линейных сопряженных преобразований обозначим $\mathbb{L}^*$. На нем определим операции сложения преобразований и умножения преобразований на число. В результате множество линейных сопряженных преобразований $\mathbb{L}^*$ становится векторным пространством. На векторном пространстве $\mathbb{L}^*$ введем *базисные сопряженные преобразования* $\mathbf{K}^I{}_K$, чтобы

$$(\ )\mathbf{l}^* = l^{*K}{}_I \cdot (\ )\mathbf{K}^I{}_K ,$$

где $l^{*K}{}_I$ координаты преобразования $(\ )\mathbf{l}^*$. Линейное сопряженное преобразование вектора $\mathbf{x}^* = x_L \cdot \mathbf{E}^L$ должно давать вектор

$$\mathbf{x}'^* = x_L \cdot l^{*L}{}_I \cdot \mathbf{E}^I .$$

Из этого условия найдем правило преобразования базисных векторов $\mathbf{E}^L$ пространства $\mathbb{X}^*$ с помощью базисных сопряженных преобразований $\mathbf{K}^I{}_K$. Действительно, воздействуем линейным преобразованием $(\ )\mathbf{l}^*$ на сопряженный вектор $\mathbf{x}^*$:

$$(\mathbf{x}^*)\mathbf{l}^* = (x_L \cdot \mathbf{E}^L)\mathbf{l}^* = x_L \cdot (\mathbf{E}^L)\mathbf{l}^* = x_L \cdot l^{*K}{}_I \cdot (\mathbf{E}^L)\mathbf{K}^I{}_K .$$

Полагая

$$(\mathbf{E}^L)\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot \mathbf{E}^I , \tag{63}$$

получим необходимый результат

$$(\mathbf{x}^*)\mathbf{l}^* = x_L \cdot \delta^L{}_M \cdot l^{*M}{}_I \cdot \mathbf{E}^I = x_L \cdot l^{*L}{}_I \cdot \mathbf{E}^I .$$

На множестве сопряженных линейных преобразований $\mathbb{L}^*$ действует закон композиции. В частности, двум преобразованиям $(\ )\mathbf{l}^*_1$ и $(\ )\mathbf{l}^*_2$ ставится в соответствие сопряженное преобразование $(\ )\mathbf{l}^*$, называемое композицией, или произведением сопряженных преобразований $(\ )\mathbf{l}^*_1$ и $(\ )\mathbf{l}^*_2$. Возможны два вида композиции:

левая, когда

$$(\ )\,{}_l\mathbf{l}^* = ((\ )\mathbf{l}^*_2)\mathbf{l}^*_1 \tag{64}$$

и *правая*, когда

$$(\ )\,{}_r\mathbf{l}^* = ((\ )\mathbf{l}^*_1)\mathbf{l}^*_2 . \tag{65}$$

Здесь $(\ )\,{}_l\mathbf{l}^*\,, (\ )\,{}_r\mathbf{l}^*\,, (\ )\mathbf{l}^*_1\,, (\ )\mathbf{l}^*_2 \in \mathbb{L}^*$.

1. Левая алгебра линейных сопряженных преобразований ${}_l\mathbb{L}^*$

Найдем связь между базисными векторами и координатами преобразования-композиции и базисными векторами и координатами преобразований, участвующих в композиции. Для этого перепишем закон композиции (64), подчеркнув, что все линейные сопряженные преобразования, участвующие в композиции, относятся к левой алгебре линейных сопряженных преобразований ${}_l\mathbb{L}^*$

$$(\ )\,{}_l\mathbf{l}^* = ((\ )\,{}_l\mathbf{l}_2^*)\,{}_l\mathbf{l}_1^*\,, \tag{66}$$

где $(\ )\,{}_l\mathbf{l}^*\,, (\ )\,{}_l\mathbf{l}_1^*\,, (\ )\,{}_l\mathbf{l}_2^* \in {}_l\mathbb{L}^*$.

Запишем преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразования и координаты (матрицы) преобразований:

$$(\ )\,{}_l\mathbf{l}^* = {}_l l^{*K}{}_I \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^I{}_K\,,$$
$$(\ )\,{}_l\mathbf{l}_2^* = {}_l(l_2^*)^K{}_L \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^L{}_K\,, \quad (\ )\,{}_l\mathbf{l}_1^* = {}_l(l_1^*)^M{}_I \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^I{}_M\,.$$

Исходим из того, что матрицы-координаты пре -образования-композиции равны произведению матриц-координат преобразований, участвующих в композиции

$${}_l l^{*K}{}_I = l_2^{*K}{}_N \cdot l_1^{*N}{}_I\,. \tag{67}$$

С учетом этого

$$(\ )\,{}_l\mathbf{l}^* = {}_l(l_2^*)^K{}_N \cdot {}_l(l_1^*)^N{}_I \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^I{}_K\,. \tag{68}$$

С другой стороны, из выражения (66) имеем

$$((\ )\mathbf{l}_2^*)\mathbf{l}_1^* = ((\ )\mathbf{K}^L{}_K)\mathbf{K}^I{}_M \cdot l_2^{*K}{}_L \cdot l_1^{*M}{}_I\,.$$

Из сравнения этого выражения с (68) получим

$$((\ )\mathbf{K}^L{}_K)\mathbf{K}^I{}_M \cdot l_2^{*K}{}_L \cdot l_1^{*M}{}_I = $$
$$= {}_l(l_2^*)^K{}_L \cdot \delta^L{}_M \cdot {}_l(l_1^*)^M{}_I \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^I{}_K\,.$$

Отсюда следует закон композиции базисных преобразований в левой алгебре ${}_l\mathbb{L}^*$

$$((\ )\,{}_l\mathbf{K}^L{}_K)\,{}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^I{}_K\,.$$

Левый закон композиции, действующий на векторах пространства ${}_l\mathbb{L}^*$, можно рассматривать как вид умножения и записывать его в в алгебраической, а не в операторной форме

$${}_l\mathbf{l}^* = {}_l\mathbf{l}_2^* \circ {}_l\mathbf{l}_1^*\,.$$

Закон композиции для базисных векторов приобретает вид $\circ$-умножения:

$${}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,. \tag{69}$$

Действие линейного преобразования на вектор

$$\mathbf{x}'^* = (\mathbf{x}^*)\mathbf{l}^*$$

можно также рассматривать как вид умножения. При этом нужно различать два вида линейного преобразования и соответственно два вида умножения – левое и правое. Для левого умножения имеем

$${}_l\mathbf{x}^{*\prime} = {}_l\mathbf{x}^* \circ {}_l\mathbf{l}^*\,.$$

Левый закон композиции для базисных векторов (63) приобретает вид

$${}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{E}^I\,. \tag{70}$$

Действительно, пусть

$${}_l\mathbf{l}^* = {}_l(l^*)^M{}_I \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_M \quad \text{и} \quad {}_l\mathbf{x}^* = {}_l x_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L\,.$$

Тогда

$${}_l\mathbf{x}'^* = {}_l\mathbf{x}^* \circ {}_l\mathbf{l}^* = {}_l(l^*)^M{}_I \cdot {}_l x_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M =$$
$$= {}_l x_M \cdot {}_l(l^*)^M{}_I \cdot {}_l\mathbf{E}^I\,.$$

2. Правая алгебра линейных сопряженных преобразований ${}_r\mathbb{L}^*$

Найдем связь между базисными векторами и координатами преобразования-композиции и базисными векторами и координатами преобразований, участвующих в композиции, для правой группы ${}_r\mathbb{L}^*$. Для этого перепишем закон композиции (65), подчеркнув, что все линейные преобразования, участвующие в композиции, относятся к правой алгебре линейных сопряженных преобразований ${}_r\mathbb{L}^*$

$$(\ )\,{}_r\mathbf{l}^* = ((\ )\,{}_r\mathbf{l}_1^*)\,{}_r\mathbf{l}_2^*\,. \tag{71}$$

Здесь $(\ )\,{}_r\mathbf{l}^*\,, (\ )\,{}_r\mathbf{l}_1^*\,, (\ )\,{}_r\mathbf{l}_2^* \in {}_r\mathbb{L}^*$.

Запишем преобразования, участвующие в композиции, через базисные преобразованияи и координаты (матрицы) преобразований:

$$(\ )\,{}_l\mathbf{l}^* = {}_l l^{*M}{}_L \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^L{}_M\,,$$
$$(\ )\,{}_l\mathbf{l}_1^* = {}_l(l_1^*)^K{}_L \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^L{}_K\,, \quad (\ )\,{}_l\mathbf{l}_2^* = {}_l(l_2^*)^M{}_I \cdot (\ )\,{}_l\mathbf{K}^I{}_M\,.$$

Исходим из того, что матрицы-координаты преобразования-композиции равны произведению матриц-координат преобразований, участвующих в композиции

$${}_r l^{*M}{}_L = {}_r(l_2^*)^M{}_N \cdot {}_r(l_1^*)^N{}_L\,, \tag{72}$$

то есть

$$(\ )\,{}_r\mathbf{l}^* = {}_r(l_2^*)^M{}_N \cdot {}_r(l_1^*)^N{}_L \cdot (\ )\,{}_r\mathbf{K}^L{}_M\,. \tag{73}$$

С другой стороны из выражения (71) имеем

$$(\ )\,{}_r\mathbf{l}^* = ((\ )\,{}_r\mathbf{l}_1^*)\,{}_r\mathbf{l}_2^* = {}_r(l_2^*)^M{}_I \cdot {}_r(l_1^*)^K{}_L \cdot ((\ )\,{}_r\mathbf{K}^L{}_K)\,{}_r\mathbf{K}^I{}_M\,.$$

Из сравнения этого выражения с соотношением (73) получим

$$ {}_r(l_2^*)^M{}_I \cdot {}_r(l_1^*)^K{}_L \cdot ((\ )\,{}_r\mathbf{K}^L{}_K)\,{}_r\mathbf{K}^I{}_M = $$
$$ = {}_r(l_2^*)^M{}_I \cdot \delta^I{}_K \cdot {}_r(l_1^*)^K{}_L \cdot (\ )\,{}_r\mathbf{K}^L{}_M\,. $$

Отсюда следует закон композиции базисных преобразований в правой алгебре ${}_r\mathbb{L}$

$$ ((\ )\,{}_r\mathbf{K}^L{}_K)\,{}_r\mathbf{K}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot (\ )\,{}_r\mathbf{K}^L{}_M\,. $$

Правый закон композиции, действующий на векторах пространства ${}_r\mathbb{L}$, можно рассматривать как вид умножения и записывать его в в алгебраической, а не в операторной форме

$$ {}_r\mathbf{l}^* = {}_r\mathbf{l}_1^* \circ {}_r\mathbf{l}_2^*\,. $$

Закон композиции для базисных векторов приобретает вид $\circ$-умножения:

$$ {}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M\,. \tag{74} $$

Действие линейного преобразования на вектор

$$ \mathbf{x}'^* = (\mathbf{x}^*)\mathbf{l}^* $$

можно также рассматривать как вид умножения. При этом нужно различать два вида линейного преобразования и соответственно два вида умножения – левое и правое. Для правого умножения имеем

$$ {}_r\mathbf{x}'^* = {}_r\mathbf{l}^* \circ {}_r\mathbf{x}^*\,. $$

Правый закон композиции для базисных векторов (63) приобретает вид:

$$ {}_r\mathbf{K}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{E}^L = \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{E}^I\,. \tag{75} $$

Действительно, пусть

$$ {}_r\mathbf{l}^* = {}_r(l^*)^M{}_I \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_M \quad \text{и} \quad {}_r\mathbf{x}^* = {}_r x_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L\,. $$

Тогда

$$ {}_r\mathbf{x}'^* = {}_r\mathbf{l}^* \circ {}_r\mathbf{x}^* = {}_r(l^*)^M{}_I \cdot {}_r x_L \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{E}^L = $$
$$ = {}_r x_M \cdot {}_r(l^*)^M{}_I \cdot {}_r\mathbf{E}^I\,. $$

2.1. *Операция сопряжения*

Линейное преобразование $\mathbf{l}^*\colon\ \mathbb{X}^* \to \mathbb{X}'^*$ является сопряженным[15] линейному преобразованию $\mathbf{l}\colon\ \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$.

[15] то есть полученным в результате сопряжения.

Связь между преобразованиями дается формулами:

$$ (\mathbf{x}')^* = (\mathbf{e}_K \cdot l^K{}_I \cdot x^I)^* = $$
$$ (x^I)^* \cdot (l^K{}_I)^* \cdot (\mathbf{e}_K)^* = x_I \cdot (l^*)^I{}_K \cdot \mathbf{E}^K = (\mathbf{x}^*)'\,, $$
$$ (l^K{}_I)^* = (l^*)^I{}_K\,, $$
$$ (\mathbf{I}^I{}_K(\ ))^* = (\ )\mathbf{K}^K{}_I\,, $$
$$ (\mathbf{I}^I{}_K(\ ) \cdot l^K{}_I)^* = (l^K{}_I)^* \cdot (\mathbf{I}^I{}_K(\ ))^* = (l^*)^I{}_K \cdot (\ )\mathbf{K}^K{}_I\,, $$
$$ (\mathbf{l}(\ ))^* = (\ )\mathbf{l}^*\,, $$
$$ (l^*)^M{}_L = g^{IM} \cdot l^K{}_I \cdot g_{KL}\,, $$

и

$$ ((\mathbf{x}^*)')^* = (x_I \cdot (l^*)^I{}_K \cdot \mathbf{E}^K)^* = $$
$$ (\mathbf{E}^K)^* \cdot ((l^*)^I{}_K)^* \cdot (x_I)^* = \mathbf{e}_K \cdot l^K{}_I \cdot x^I = \mathbf{x}'\,, $$
$$ (l^{*K}{}_I)^* = l^I{}_K\,, $$
$$ ((\ )\mathbf{K}^I{}_K)^* = \mathbf{I}^K{}_I(\ )\,, $$
$$ ((\ )\mathbf{K}^I{}_K \cdot (l^*)^K{}_I)^* = ((l^*)^K{}_I)^* \cdot ((\ )\mathbf{K}^I{}_K)^* = l^I{}_K \cdot \mathbf{I}^K{}_I(\ )\,, $$
$$ ((\ )\mathbf{l}^*)^* = \mathbf{l}(\ )\,, $$
$$ l^M{}_L = g^{IM} \cdot (l^*)^K{}_I \cdot g_{KL}\,. $$

Здесь g_{KL} и g^{IM} – компоненты метрического и обратного метрического тензоров.

3. Системообразующий постулат

Постулируем существование физических объектов, которые назовем *промежуточные физические антиобъекты*. Промежуточные физические антиобъекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны алгебре линейных сопряженных преобразований $\mathbb{L}^*$. Примером промежуточных физических антиобъектов служат промежуточные античастицы.

4. Повороты в сопряженном пространства-времени

Введем *скалярное произведение* сопряженных векторов $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^* \in \mathbb{X}^*$:

$$ \mathbf{x}_1^* \cdot \mathbf{x}_2^* = (x_1)_I\,(x_2)_K\,(\mathbf{E}^I \cdot \mathbf{E}^K) = (x_1)_I\,(x_2)_K \cdot g^{IK}\,. $$

Величина $g^{IK} = C^{IK}{}_0$ есть *обратный метрический тензор*. Заметим, что в случае сопряженной алгебры Клиффорда $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}{}^*$, g^{IK} представляет собой диагональную матрицу, диагональю которой является сигнатура базисных векторов $\mathbf{E}^I$. Скалярное произведение сопряженного вектора на себя есть квадрат *длины* вектора:

$$ \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x}^* = x_I \cdot x_K \cdot g^{IK} = (\mathbf{x}^*)^2\,. $$

В общем случае алгебра $\mathbb{X}^*$ при линейном преобразовании переходит в другую алгебру $\mathbb{X}'^*$ с другим произведением векторов. В том числе линейное преобразование меняет и скалярное произведение векторов. Далее рассмотрим связь между скалярными произведениями в алгебрах $\mathbb{X}^*$ и $\mathbb{X}'^*$.

Пусть векторы $\mathbf{x}_1^*$, $\mathbf{x}_2^* \in \mathbb{X}^*$ участвуют в скалярном произведении

$$\mathbf{x}_1^* \cdot \mathbf{x}_2^*\,,$$

и пусть векторы $\mathbf{x}^{*\prime}_1$, $\mathbf{x}^{*\prime}_2 \in \mathbb{X}^*$ получены из $\mathbf{x}_1^*$, $\mathbf{x}_2^*$ с помощью линейного преобразования $\mathbf{l}^*$, то есть

$$\mathbf{x}^{*\prime} = (\mathbf{x}^*)\mathbf{l}^*, \quad \mathbf{x}^{*\prime}_1 = (\mathbf{x}_1^*)\mathbf{l}^*, \quad \mathbf{x}^{*\prime}_2 = (\mathbf{x}_2^*)\mathbf{l}^*\,.$$

Рассмотрим два скалярных произведения: вышеуказанное а также скалярное произведение преобразованных векторов

$$(\mathbf{x}_1^*)\mathbf{l}^* \cdot (\mathbf{x}_2^*)\mathbf{l}^*\,.$$

В общем случае эти скалярные произведения не равны друг другу. Действительно, в первом случае имеем:

$$((x_1)_I \cdot \mathbf{E}^I) \cdot ((x_2)_K \cdot \mathbf{E}^K) = (x_1)_I \cdot (x_2)_K \cdot (\mathbf{E}^I \cdot \mathbf{E}^K)\,.$$

Здесь

$$\mathbf{E}^I \cdot \mathbf{E}^K = C^{IK}{}_0 = g^{IK}\,.$$

Для второго скалярного произведения имеем:

$$((x_1)_I \cdot \mathbf{E}^I)\mathbf{l}^* \cdot ((x_2)_K \cdot \mathbf{E}^K)\mathbf{l}^* = (x_1)_I \cdot (x_2)_K \cdot ((\mathbf{E}^I)\mathbf{l}^* \cdot (\mathbf{E}^K)\mathbf{l}^*)\,.$$

Рассматривая векторы $(\mathbf{E}^I)\mathbf{l}^*$ как базисные в алгебре $\mathbb{X}'^*$, для скалярного произведения базисных векторов получим

$$(\mathbf{E}^I)\mathbf{l}^* \cdot (\mathbf{E}^K)\mathbf{l}^* = C'^{IK}{}_0 = g'^{IK}\,, \tag{76}$$

где $C'^{IK}{}_0$ структурные постоянные алгебры $\mathbb{X}'^*$. Отсюда следует, что скалярные произведения различаются вследствие различия метрических тензоров в алгебрах $\mathbb{X}^*$ и $\mathbb{X}'^*$. Из выражения (76) следует уравнение, связывающее метрические тензоры алгебр $\mathbb{X}^*$ и $\mathbb{X}'^*$:

$$(l^*)^I{}_P \cdot (l^*)^K{}_M \cdot g^{PM} = g'^{IK}\,. \tag{77}$$

Отсюда следует условие, при котором линейное преобразование сохраняет скалярное произведение. Потребуем, чтобы рассмотренные скалярные произведения были равны друг другу:

$$(\mathbf{x}_1^*)\mathbf{l}^* \cdot (\mathbf{x}_2^*)\mathbf{l}^* = \mathbf{x}_1^* \cdot \mathbf{x}_2^*\,.$$

Это равносильно условию

$$g'^{IK} = g^{IK}\,.$$

Линейные преобразования, сохраняющие скалярное произведение в сопряженном пространстве-времени, назовем *сопряженными поворотами* и будем обозначать их символом $\mathbf{u}^*$. Матрица линейного преобразования для сопряженных поворотов должна удовлетворять условию

$$g^{LM} \cdot (u^*)^I{}_L \cdot (u^*)^K{}_M \cdot g_{KN} = \delta_I{}^N\,.$$

Если ввести матрицу $u^N{}_L$ в соответствии с определением:

$$u^L{}_N = g_{KN} \cdot (u^*)^K{}_M \cdot g^{LM}\,,$$

то условие принадлежности сопряженных линейных преобразований к поворотам приобретает вид:

$$u^L{}_N = ((u^*)^{-1})^L{}_N\,.$$

IX. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- *Движение* фундаментального объекта отождествляется с *преобразованием* пространства-времени. Из преобразований общего вида выделяются *линейные* преобразования.

- Множество линейных преобразований $\mathbb{L}$ является *алгеброй*, так как на нем определено не только *сложение* линейных преобразований, но и их *композиция* (умножение).

- Композиция линейных преобразований в общем виде является некоммутативной. Поэтому алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$ имеет две модификации – *левую* алгебру линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ и *правую* алгебру линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ в зависимости от порядка композиции преобразований.

- Алгебра линейных преобразований является линейной частью *кинематической группы*. При этом левой алгебре ${}_l\mathbb{L}$ соответствует *левая кинематическая группа* ${}_l\mathbb{G}$, а правой алгебре ${}_r\mathbb{L}$ соответствует *правая кинематическая группа* ${}_r\mathbb{G}$.

- Левая кинематическая группа ${}_l\mathbb{G}$ названа *кинематической группой внешней симметрии*. В частности, группа гравитации является подгруппой кинематической группы внешней симметрии.

- Правая кинематическая группа ${}_r\mathbb{G}$ названа *кинематической группой внутренней симметрии*. В частности, электрическая группа является группой внутренней симметрии и подобна подгруппе кинематической группы внутренней симметрии.

- Постулируется существование *промежуточных физических объектов*. Такими объектами, прежде всего, являются промежуточные частицы. Промежуточные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с алгеброй линейных преобразований $\mathbb{L}$. Таким образом, алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$ – это пространственно-временная характеристика промежуточных физических объектов.

- Движение фундаментального *антиобъекта* отождествляется с преобразованием *сопряженного* пространства-времени. Из преобразований общего вида выделяются *сопряженные линейные* преобразования.

- Множество сопряженных линйных преобразований $\mathbb{L}^*$ является *алгеброй*, так как на нем определено не только *сложение* сопряженных линейных преобразований, но и их *композиция* (умножение).

- Композиция сопряженных линейных преобразований в общем виде является некоммутативной. Поэтому алгебра сопряженных линейных преобразований $\mathbb{L}^*$ имеет две модификации – *левую* алгебру сопряженных линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}^*$ и *правую* алгебру линейных сопряженных преобразований ${}_r\mathbb{L}^*$ в зависимости от порядка композиции преобразований.

- Постулируется существование *промежуточных физических антиобъектов*. Такими объектами, прежде всего, являются промежуточные античастицы. Промежуточные физические антиобъекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с алгеброй линейных сопряженных преобразований $\mathbb{L}^*$. Таким образом, алгебра линейных сопряженных преобразований $\mathbb{L}^*$ – это пространственно-временная характеристика промежуточных физических антиобъектов.

Глава 1.6 Общая кинематическая алгебра

В классической физике группа сдвигов и группа поворотов объединены в одну группу – группу Пуанкаре. В этой Главе рассматривается подобное объединение. Построим *общую кинематическую алгебру*, объединяющую пространство-время, сопряженное пространство-время и линейные преобразования этих пространств. Общая кинематическая алгебра далее будет рассматриваться как пространство фундаментальных и промежуточных объектов и антиобъектов. Такое построение выполним в несколько этапов, рассматривая подалгебры общей кинематической алгебры по мере их усложнения.

I. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

1. Алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$

Обратимся к рассмотренной ранее алгебре линейных преобразований $\mathbb{L}$. Так как композиция (умножение) линейных преобразований является некоммутативной операцией, то алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$ существует в двух модификациях: левая алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ и правая алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$.

1.1. Левая алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$

Умножение векторов в левой алгебре записывается так:

$$ {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{l}_2 \circ {}_l\mathbf{l}_1 \,. \tag{1}$$

Здесь ${}_l\mathbf{l}$, ${}_l\mathbf{l}_1$, ${}_l\mathbf{l}_2 \in {}_l\mathbb{L}$, а умножение базисных векторов имеет вид

$$ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K \,.$$

Дополним левую алгебру линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ *скалярным* умножением векторов. Для базисных векторов скалярное умножение определим следующим образом:

$$ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \,.$$

В результате $\circ$-умножение базисных векторов в алгебре линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ определяется так:

$$ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K \,. \tag{2}$$

Векторы ${}_l\mathbf{l}_1$, ${}_l\mathbf{l}_2$ записываются через базисные векторы следующим образом:

$$ {}_l\mathbf{l}_1 = {}_l\mathbf{I}^L{}_K \cdot {}_l(l_1)^K{}_L, \quad {}_l\mathbf{l}_2 = {}_l\mathbf{I}^I{}_M \cdot {}_l(l_2)^M{}_I \,.$$

После подстановки приведенных выражений в (1) и учета закона умножения базисных векторов (2) получим соотношение

$$ {}_l\mathbf{l} = {}_l l^0 + {}_l\mathbf{I}^L{}_M \cdot {}_l l^M{}_L $$

и выражения для координат вектора–произведения ${}_l\mathbf{l}$

$$ {}_l l^0 = {}_l(l_2)^M{}_K \cdot {}_l(l_1)^K{}_M \,, \quad {}_l l^M{}_L = {}_l(l_2)^M{}_K \cdot {}_l(l_1)^K{}_L \,.$$

Здесь ${}_l l^0$ представляет собой значение скалярного произведения векторов ${}_l\mathbf{l}_1$, ${}_l\mathbf{l}_2$.

1.2. Правая алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$

Умножение векторов в правой алгебре записывается так:

$$ {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{l}_1 \circ {}_r\mathbf{l}_2 \,. \tag{3}$$

Здесь ${}_r\mathbf{l}$, ${}_r\mathbf{l}_1$, ${}_r\mathbf{l}_2 \in {}_l\mathbb{L}$, а умножение базисных векторов имеет вид

$$ {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M \,.$$

Дополним правую алгебру линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ *скалярным* умножением векторов. Для базисных векторов скалярное умножение определим следующим образом:

$$ {}_r\mathbf{I}^L{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M \,.$$

В результате $\circ$-умножение базисных векторов в алгебре линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ определяется так:

$$ {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M \,. \tag{4}$$

Векторы ${}_r\mathbf{l}_1$, ${}_r\mathbf{l}_2$ запишем через базисные векторы следующим образом:

$$ {}_r\mathbf{l}_1 = {}_r\mathbf{I}^L{}_K \cdot {}_r(l_1)^K{}_L, \quad {}_r\mathbf{l}_2 = {}_r\mathbf{I}^I{}_M \cdot {}_r(l_2)^M{}_I \,.$$

После подстановки приведенных выражений в (3) и учета закона умножения базисных векторов (4), получим соотношение

$$ {}_r\mathbf{l} = {}_r l^0 + {}_r\mathbf{I}^L{}_M \cdot {}_r l^M{}_L $$

и выражения для координат вектора–произведения ${}_r\mathbf{l}$

$$ {}_r l^0 = {}_r(l_2)^M{}_K \cdot {}_r(l_1)^K{}_M \,, \quad {}_r l^M{}_L = {}_r(l_2)^M{}_K \cdot {}_r(l_1)^K{}_L \,.$$

Здесь ${}_r l^0$ представляет собой значение скалярного произведения векторов ${}_r\mathbf{l}_1$, ${}_r\mathbf{l}_2$.

2. Системообразующий постулат

Напомним, что мы постулировали существование физических объектов, отличных от фундаментальных, которые назвали *промежуточные физические объекты*. Их особенность и отличие от фундаментальных физических объектов состоит в том, что в пространственно-временных явлениях они тождественны линейным преобразованиям $\mathbb{L}$. Примером промежуточных физических объектов служат промежуточные частицы.

3. Кинематическая алгебра $\mathbb{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L}$

Введем векторное пространство $\mathbb{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L}$, которое назовем *кинематическим*. Рассматривая пространство $\mathbb{T}$ как алгебру, необходимо отметить, что умножение векторов в пространстве-времени $\mathbb{X}$ и композиция (умножение) линейных преобразований в алгебре линейных преобразований $\mathbb{L}$ являются некоммутативными операциями, поэтому алгебра $\mathbb{T}$, которую назовем *кинематической*, существует в двух модификациях: левая кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}$ и правая кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}$.

3.1. *Левая кинематическая алгебра* ${}_l\mathbb{T} = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L}$

Наряду с умножениями

$$ {}_l\mathbf{x}_2 \circ {}_l\mathbf{x}_1 \to {}_l\mathbb{X}\,, \qquad {}_l\mathbf{l}_2 \circ {}_l\mathbf{l}_1 \to {}_l\mathbb{L} $$

введем умножения[1]

$$ {}_l\mathbf{x} \circ {}_l\mathbf{l} \to \emptyset\,, \qquad {}_l\mathbf{l} \circ {}_l\mathbf{x} \to {}_l\mathbb{X}\,. $$

В результате множество векторов ${}_l\mathbb{T}$ становится алгеброй, которую назовем *левой кинематической*.

Умножение векторов в левой кинематической алгебре ${}_l\mathbb{T}$ запишем следующим образом:

$$ {}_l\mathbf{t} = {}_l\mathbf{t}_2 \circ {}_l\mathbf{t}_1\,. \tag{5} $$

Здесь ${}_l\mathbf{t}\,,\ {}_l\mathbf{t}_1\,,\ {}_l\mathbf{t}_2 \in {}_l\mathbb{T}$.

Левая кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}$ определяется следующей таблицей умножений базисных векторов:

$$ \begin{gathered} {}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI}\,, \\ {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = 0\,, \\ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{e}_K\,, \\ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K\,. \end{gathered} \tag{6} $$

[1] Символ $\emptyset$ означает *пустое множество*.

Заметим, что алгебра ${}_l\mathbb{T}$ неассоциативна. Например, не выполняется условие ассоциативности произведения

$$ {}_l\mathbf{I}^M{}_L \circ ({}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K) = ({}_l\mathbf{I}^M{}_L \circ {}_l\mathbf{e}_I) \circ {}_l\mathbf{e}_K\,. $$

Действительно, справа имеем ${}_lC^M{}_{KI} \cdot {}_l\mathbf{e}_L$, а слева $\delta^M{}_I \cdot {}_lC^P{}_{KL} \cdot {}_l\mathbf{e}_P$.

Построенную левую кинематическую алгебру ${}_l\mathbb{T}$ дополним скалярным умножением

$$ {}_l\mathbf{l}_2 \cdot {}_l\mathbf{l}_1 \to \mathbb{R}\,, $$

а также умножением

$$ {}_l\mathbf{x}_2 \circ {}_l\mathbf{x}_1 \to {}_l\mathbb{L}\,. $$

Тогда $\circ$-умножение базисных векторов в кинематической алгебре ${}_l\mathbb{T}$ определяется следующим образом:

$$ \begin{gathered} {}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI} + {}_l\mathbf{I}^M{}_L \cdot {}_lC^L{}_{MKI}\,, \\ {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = 0\,, \\ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{e}_K\,, \\ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K\,. \end{gathered} \tag{7} $$

Эти формулы составляют таблицу умножения базисных векторов алгебры ${}_l\mathbb{T}$.

Квадрат длины вектора в этой алгебре равен

$$ t^2 = g_{IK} \cdot {}_lx^I \cdot {}_lx^K + {}_ll^I{}_K \cdot {}_ll^K{}_I $$

Понятно, что левая алгебра пространства-времени ${}_l\mathbb{X}$ и левая алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ являются подалгебрами левой кинематической алгебры ${}_l\mathbb{T}$.

3.2. *Правая кинематическая алгебра* ${}_r\mathbb{T} = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L}$

Наряду с умножениями

$$ {}_r\mathbf{x}_1 \circ {}_r\mathbf{x}_2 \to {}_r\mathbb{X}\,, \qquad {}_r\mathbf{l}_1 \circ {}_r\mathbf{l}_2 \to {}_r\mathbb{L} $$

введем умножения

$$ {}_r\mathbf{x} \circ {}_r\mathbf{l} \to {}_r\mathbb{X}\,, \qquad {}_r\mathbf{l} \circ {}_r\mathbf{x} \to \emptyset\,. $$

В результате множество векторов ${}_r\mathbb{T}$ становится алгеброй, которую назовем *правой кинематической*.

Умножение векторов в правой кинематической алгебре ${}_r\mathbb{T}$ запишем следующим образом:

$$ {}_r\mathbf{t} = {}_r\mathbf{t}_1 \circ {}_r\mathbf{t}_2\,. \tag{8} $$

Здесь ${}_r\mathbf{t}\,,\ {}_r\mathbf{t}_1\,,\ {}_r\mathbf{t}_2 \in {}_r\mathbb{T}$.

Правая кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}$ определяется следующей таблицей умножений базисных векторов:

$$ \begin{gathered} {}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{IK}\,, \\ {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M\,, \\ {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = 0\,, \\ {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,. \end{gathered} \tag{9} $$

Заметим, что алгебра ${}_r\mathbb{T}$ неассоциативна. Например, не выполняется условие ассоциативности произведения

$$({}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K) \circ {}_r\mathbf{I}^M{}_L = {}_r\mathbf{e}_I \circ ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^M{}_L)\,.$$

Действительно, справа имеем ${}_rC^M{}_{IK} \cdot {}_r\mathbf{e}_L$, а слева $\delta^M{}_K \cdot {}_rC^P{}_{IL} \cdot {}_r\mathbf{e}_P$.

Правую кинематическую алгебру ${}_r\mathbb{T}$ дополним скалярным умножением

$${}_r\mathbf{l}_1 \cdot {}_r\mathbf{l}_2 \to \mathbb{R}\,,$$

а также умножением

$${}_r\mathbf{x}_1 \circ {}_r\mathbf{x}_2 \to {}_r\mathbb{L}\,.$$

Тогда $\circ$-умножение базисных векторов в кинематической алгебре ${}_r\mathbb{T}$ определяется следующей таблицей:

$$\begin{gathered}
{}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{IK} + {}_r\mathbf{I}^M{}_L \cdot {}_rC^L{}_{MIK}\,,\\
{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M\,,\\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = 0\,,\\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,.
\end{gathered} \tag{10}$$

Эти формулы составляют правила умножения базисных векторов алгебры ${}_r\mathbb{T}$.

Квадрат длины вектора в этой алгебре равен

$$t^2 = g_{IK} \cdot {}_rx^I \cdot {}_rx^K + {}_rl^I{}_K \cdot {}_rl^K{}_I\,.$$

Отметим, что правая алгебра пространства-времени ${}_r\mathbb{X}$ и правая алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ являются подалгебрами правой кинематической алгебры ${}_r\mathbb{T}$.

4. Системообразующие постулаты

1. Фундаментальные физические объекты вместе с промежуточными физическими объектами в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны кинематической алгебре $\mathbb{T}$. Таким образом, кинематическая алгебра $\mathbb{T}$ – это пространственно-временная характеристика совокупности фундаментальных и промежуточных физических объектов.

2. $\circ$-умножение отождествляется с *взаимодействием* физических объектов, сопровождающим их участие в пространственно-временных явлениях. В этом смысле, например, закон умножения

$${}_r\mathbf{e}_{I_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{I_2} = {}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_rC^I{}_{I_1I_2}$$

нужно интерпретировать так: участвуя в пространственно-временных явлениях, фундаментальный физический объект ($\mathbf{e}_1$) взаимодействует с фундаментальным объектом ($\mathbf{e}_2$). Результатом этого взаимодействия является фундаментальный объект ($\mathbf{e}$). Аналогичным образом закон умножения

$${}_r\mathbf{e}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K = \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{e}_K$$

следует интерпретировать так: участвуя в пространственно-временных явлениях, промежуточный физический объект ($\mathbf{I}$) взаимодействует с фундаментальным объектом ($\mathbf{e}$). Результатом этого взаимодействия является другой фундаментальный объект ($\mathbf{e}$). Аналогичным образом закон умножения

$${}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M$$

нужно интерпретировать так: участвуя в пространственно-временных явлениях, один промежуточный физический объект ($\mathbf{I}_1$) взаимодействует с другим промежуточным объектом ($\mathbf{I}_2$). Результатом этого взаимодействия является третий промежуточный объект ($\mathbf{I}$). Аналогичным образом следует интерпретировать другие законы умножения из вышеуказанных таблиц умножения.

II. СОПРЯЖЕННАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

1. Сопряженная алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}^*$

Обратимся к рассмотренной ранее сопряженной алгебре линейных преобразований $\mathbb{L}^*$. Так как композиция (умножение) сопряженных линейных преобразований является некоммутативной операцией, то сопряженная алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}^*$ существует в двух модификациях: левая сопряженная алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}^*$ и правая сопряженная алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}^*$.

1.1. Правая сопряженная алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}^*$

Умножение векторов в правой сопряженноя алгебре линейных преобразований записывается так:

$${}_r\mathbf{l}^* = {}_r\mathbf{l}_1^* \circ {}_r\mathbf{l}_2^*\,. \tag{11}$$

Здесь ${}_r\mathbf{l}^*$, ${}_r\mathbf{l}_1^*$, ${}_r\mathbf{l}_2^* \in {}_r\mathbb{L}^*$, а умножение базисных векторов имеет вид

$${}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M\,.$$

Дополним правую сопряженную алгебру линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}^*$ *скалярным* умножением векторов. Для базисных векторов скалярное умножение определим следующим образом:

$${}_r\mathbf{K}^L{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,.$$

В результате $\circ$-умножение базисных векторов в сопряженной алгебре линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}^*$ определяется так:

$${}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M\,. \tag{12}$$

Пусть векторы ${}_r\mathbf{l}_1^*$, ${}_r\mathbf{l}_2^*$ записываются через базисные векторы следующим образом:

$${}_r\mathbf{l}_1^* = {}_r(l_1^*)^K{}_L \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_K\,, \qquad {}_r\mathbf{l}_2^* = {}_r(l_2^*)^M{}_I \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_M\,.$$

После подстановки приведенных выражений в (11) и учета закона умножения базисных векторов (12) получим

$${}_r\mathbf{l}^* = {}_rl^{*0} + {}_rl^{*M}{}_L \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M$$

и выражения для координат вектора–произведения ${}_r\mathbf{l}^*$

$${}_rl^{*0} = {}_r(l_2^*)^M{}_K \cdot {}_r(l_1^*)^K{}_M\,, \quad {}_rl^{*M}{}_L = {}_r(l_2^*)^M{}_K \cdot {}_r(l_1^*)^K{}_L\,.$$

Здесь ${}_rl^{*0}$ представляет собой значение скалярного произведения векторов ${}_r\mathbf{l}_1^*$, ${}_r\mathbf{l}_2^*$.

1.2. *Левая сопряженная алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}^*$*

Умножение векторов в левой сопряженной алгебре линейных преобразований записывается так:

$${}_l\mathbf{l}^* = {}_l\mathbf{l}_2^* \circ {}_l\mathbf{l}_1^*\,. \tag{13}$$

Здесь ${}_l\mathbf{l}^*$, ${}_l\mathbf{l}_1^*$, ${}_l\mathbf{l}_2^* \in {}_l\mathbb{L}^*$, а умножение базисных векторов имеет вид

$${}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,.$$

Дополним левую сопряженную алгебру линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}^*$ *скалярным* умножением векторов. Для базисных векторов скалярное умножение определим следующим образом

$${}_l\mathbf{K}^L{}_K \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K\,.$$

В результате $\circ$-умножение базисных векторов в сопряженной алгебре линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}^*$ определяется так:

$${}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,. \tag{14}$$

Векторы ${}_l\mathbf{l}_1^*$, ${}_l\mathbf{l}_2^*$ запишем через базисные векторы следующим образом:

$${}_l\mathbf{l}_1^* = {}_l(l_1^*)^K{}_L \cdot {}_l\mathbf{K}^L{}_K\,, \qquad {}_l\mathbf{l}_2^* = {}_l(l_2^*)^M{}_I \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_M\,.$$

После подстановки приведенных выражений в (13) и учета закона умножения базисных векторов (14), получим

$${}_l\mathbf{l}^* = {}_ll^{*0} + {}_ll^{*M}{}_L \cdot {}_l\mathbf{K}^L{}_M$$

и выражения для координат вектора–произведения ${}_r\mathbf{l}^*$

$${}_ll^{*0} = {}_l(l_2^*)^M{}_K \cdot (l_1^*)^K{}_M\,, \quad {}_ll^{*M}{}_L = {}_l(l_2^*)^M{}_K \cdot {}_l(l_1^*)^K{}_L\,.$$

Здесь ${}_ll^{*0}$ представляет собой значение скалярного произведения векторов ${}_l\mathbf{l}_1^*$, ${}_l\mathbf{l}_2^*$.

2. Системообразующий постулат

Напомним, что мы постулировали существование физических антиобъектов, отличных от фундаментальных антиобъектов, и назвали их *промежуточные физические антиобъекты*. Их особенность и отличие от фундаментальных физических антиобъектов состоит в том, что в пространственно-временных явлениях они тождественны сопряженным линейным преобразованиям $\mathbb{L}^*$. Примером промежуточных физических антиобъектов служат промежуточные античастицы.

3. Сопряженная кинематическая алгебра $\mathbb{T}^* = \mathbb{X}^* + \mathbb{L}^*$

Введем векторное пространство $\mathbb{T}^* = \mathbb{X}^* + \mathbb{L}^*$, которое назовем *сопряженным кинематическим*. Рассматривая пространство $\mathbb{T}^*$ как алгебру, необходимо отметить, что умножение векторов в сопряженном пространстве-времени $\mathbb{X}^*$ и композиция (умножение) линейных преобразований в сопряженной алгебре линейных преобразований $\mathbb{L}^*$ являются некоммутативными операциями, поэтому алгебра $\mathbb{T}^*$, которую назовем *сопряженной кинематической*, существует в двух модификациях – левая сопряженная кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}^*$ и правая сопряженная кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}^*$.

3.1. *Левая сопряженная кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}^* = {}_l\mathbb{X}^* + {}_l\mathbb{L}^*$*

Наряду с умножениями

$${}_l\mathbf{x}_2^* \circ {}_l\mathbf{x}_1^* \to {}_l\mathbb{X}^*\,, \qquad {}_l\mathbf{l}_2^* \circ {}_l\mathbf{l}_1^* \to {}_l\mathbb{L}^*$$

введем умножения[2]

$${}_l\mathbf{x}^* \circ {}_l\mathbf{l}^* \to {}_l\mathbb{X}^*\,, \qquad {}_l\mathbf{l}^* \circ {}_l\mathbf{x}^* \to \emptyset\,.$$

В результате множество векторов ${}_l\mathbb{T}^*$ становится алгеброй, которую назовем *левой сопряженной кинематической*.

Умножение векторов в левой сопряженной кинематической алгебре ${}_l\mathbb{T}^*$ запишем следующим образом:

$${}_l\mathbf{t}^* = {}_l\mathbf{t}_2^* \circ {}_l\mathbf{t}_1^*\,. \tag{15}$$

Здесь ${}_l\mathbf{t}^*$, ${}_l\mathbf{t}_1^*$, ${}_l\mathbf{t}_2^* \in {}_l\mathbb{T}^*$.

Левая сопряженная кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}^*$ определяется следующей таблицей умножений базисных векторов:

---

[2] Символ $\emptyset$ означает *пустое множество*.

$$
\begin{aligned}
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \quad \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,,\\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I \quad &= 0\,,\\
{}_l\mathbf{E}^L \quad \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \quad \cdot {}_l\mathbf{E}^I\,,\\
{}_l\mathbf{E}^I \quad \circ {}_l\mathbf{E}^K \quad &= {}_lC^{IK}{}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L\,.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Построенную левую сопряженную кинематическую алгебру ${}_l\mathbb{T}^*$ дополним скалярным умножением

$$ {}_l\mathbf{l}^*_2 \cdot {}_l\mathbf{l}^*_1 \to \mathbb{R}\,, $$

а также умножением

$$ {}_l\mathbf{x}^*_2 \circ {}_l\mathbf{x}^*_1 \to {}_l\mathbb{L}^*\,. $$

Тогда $\circ$-умножение базисных векторов в сопряженной кинематической алгебре ${}_l\mathbb{T}^*$ определяется следующей таблицей:

$$
\begin{aligned}
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \quad \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,,\\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I \quad &= 0\,,\\
{}_l\mathbf{E}^L \quad \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \quad \cdot {}_l\mathbf{E}^I\,,\\
{}_l\mathbf{E}^I \quad \circ {}_l\mathbf{E}^K \quad &= {}_lC^{IK}{}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L + {}_lC^{IKM}{}_L \cdot {}_l\mathbf{K}^L{}_M\,.
\end{aligned} \tag{17}
$$

3.2. Правая сопряженная кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}^* = {}_r\mathbb{X}^* + {}_r\mathbb{L}^*$

Наряду с умножениями

$$ {}_r\mathbf{x}^*_1 \circ {}_r\mathbf{x}^*_2 \to {}_r\mathbb{X}^*\,, \qquad {}_r\mathbf{l}^*_1 \circ {}_r\mathbf{l}^*_2 \to {}_r\mathbb{L}^* $$

введем умножения

$$ {}_r\mathbf{x}^* \circ {}_r\mathbf{l}^* \to \emptyset\,, \qquad {}_r\mathbf{l}^* \circ {}_r\mathbf{x}^* \to {}_r\mathbb{X}^*\,. $$

В результате множество векторов ${}_r\mathbb{T}^*$ становится алгеброй, которую назовем *правой сопряженной кинематической*.

Умножение векторов в правой сопряженной кинематической алгебре ${}_r\mathbb{T}^*$ запишем следующим образом:

$$ {}_r\mathbf{t}^* = {}_r\mathbf{t}^*_1 \circ {}_r\mathbf{t}^*_2\,. \tag{18} $$

Здесь ${}_r\mathbf{t}^*$, ${}_r\mathbf{t}^*_1$, ${}_r\mathbf{t}^*_2 \in {}_r\mathbb{T}^*$.

Правая сопряженная кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}^*$ определяется следующей таблицей умножений базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^I{}_K \quad \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M\,,\\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I \quad &= \delta^I{}_K \quad \cdot {}_r\mathbf{E}^L\,,\\
{}_r\mathbf{E}^L \quad \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= 0\,,\\
{}_r\mathbf{E}^I \quad \circ {}_r\mathbf{E}^K \quad &= {}_rC^{KI}{}_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L\,.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Построенную правую сопряженную кинематическую алгебру ${}_r\mathbb{T}^*$ дополним скалярным умножением

$$ {}_r\mathbf{l}^*_1 \cdot {}_r\mathbf{l}^*_2 \to \mathbb{R}\,, $$

а также умножением

$$ {}_r\mathbf{x}^*_1 \circ {}_r\mathbf{x}^*_2 \to {}_r\mathbb{L}^*\,. $$

Тогда $\circ$-умножение базисных векторов в сопряженной кинематической алгебре ${}_r\mathbb{T}^*$ определяется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \quad \cdot \delta^I{}_K + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M\,,\\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I \quad &= \delta^I{}_K \quad \cdot {}_r\mathbf{E}^L\,,\\
{}_r\mathbf{E}^L \quad \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= 0\,,\\
{}_r\mathbf{E}^I \quad \circ {}_r\mathbf{E}^K \quad &= {}_rC^{KI}{}_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L + {}_rC^{KIM}{}_L \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M\,.
\end{aligned} \tag{20}
$$

4. Системообразующий постулат

Фундаментальные физические антиобъекты вместе с промежуточными физическими антиобъектами в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны сопряженной кинематической алгебре $\mathbb{T}^*$. Таким образом, сопряженная кинематическая алгебра $\mathbb{T}^*$ – это пространственно-временная характеристика совокупности фундаментальных и промежуточных физических антиобъектов.

III. ОБЩАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

1. Общая алгебра линейных преобразований $(\mathbb{L} + \mathbb{L}^*)$

Введем векторное пространство $(\mathbb{L} + \mathbb{L}^*)$, которое назовем *общим пространством линейных преобразований*. Рассматривая пространство $(\mathbb{L} + \mathbb{L}^*)$ как алгебру, необходимо отметить, что умножение векторов в $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}^*$ являются некоммутативными операциями, поэтому алгебра $(\mathbb{L} + \mathbb{L}^*)$, которую назовем *общей алгеброй линейных преобразований*, существует в двух модификациях: лево-правая общая алгебра линейных преобразований $({}_l\mathbb{L} + {}_r\mathbb{L}^*)$ и право-левая общая алгебра линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$.

1.1. Лево-правая общая алгебра линейных преобразований $({}_l\mathbb{L} + {}_r\mathbb{L}^*)$

Эта алгебра определяется уже приведенными правилами умножения базисных векторов: (2) – для алгебры линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ и (12) – для алгебры сопряженных линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}^*$, а также смешанными произведениями базисных векторов, в качестве которых постулируем следующие:

$$
\begin{aligned}
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \quad \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM}\,,\\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M \quad &= g_{KM} \cdot g^{LI}\,.
\end{aligned}
$$

В результате лево-правая общая алгебра линейных преобразований без учета скалярного умножения определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K\,,\\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M\,,\\
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI}\,,\\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM}\,.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Если на алгебрах ${}_l\mathbb{L}$ и ${}_r\mathbb{L}^*$ определить скалярное умножение, то лево-правая общая алгебра линейных преобразований задается следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K\,,\\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI}\,,\\
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM}\,,\\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M\,.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

1.2. Право-левая общая алгебра линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$

Эта алгебра определяется уже приведенными правилами умножения базисных векторов: (4) – для алгебры линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ и (14) – для алгебры сопряженных линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}^*$, а также смешанными произведениями базисных векторов, в качестве которых постулируем следующие:

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM}\,,\\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI}\,.
\end{aligned}
$$

В результате право-левая общая алгебра линейных преобразований без учета скалярного умножения определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,,\\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,,\\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM}\,,\\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI}\,.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Если на алгебрах ${}_r\mathbb{L}$ и ${}_l\mathbb{L}^*$ определить скалярное умножение, то право-левая общая алгебра линейных преобразований задается следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,,\\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI}\,,\\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM}\,,\\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

2. Системообразующий постулат

Промежуточные физические объекты и антиобъекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны общей алгебре линейных преобразований $(\mathbb{L} + \mathbb{L}^*)$. Таким образом, общая алгебра линейных преобразований $(\mathbb{L} + \mathbb{L}^*)$ это пространственно-временная характеристика совокупности промежуточных физических объектов и антиобъектов.

3. Общая кинематическая алгебра $(\mathbb{T} + \mathbb{T}^*) = (\mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{X}^* + \mathbb{L}^*)$

Обратимся к общему случаю, когда алгебры $\mathbb{X}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{X}^*$ и $\mathbb{L}^*$ объединены в одну. Построенную таким образом алгебру будем называть *общей кинематической*, имея в виду, что в ней объединены кинематическая алгебра $\mathbb{T}$ и сопряженная кинематическая алгебра $\mathbb{T}^*$.

Рассматривая общую кинематическую алгебру, необходимо отметить, что умножение векторов в $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}^*$ являются некоммутативными операциями, поэтому общая кинематическая алгебра $(\mathbb{T} + \mathbb{T}^*)$ существует в двух модификациях: лево-правая общая кинематическая алгебра $({}_l\mathbb{T} + {}_r\mathbb{T}^*)$ и право-левая общая кинематическая алгебра $({}_r\mathbb{T} + {}_l\mathbb{T}^*)$.

3.1. Право-левая общая кинематическая алгебра $({}_r\mathbb{T} + {}_l\mathbb{T}^*)$

Рассматриваемая модификация общей кинематической алгебры называется *право-левой* потому, что контравариантная часть алгебры подчиняется правому умножению, а ковариантная часть алгебры подчиняется левому умножению.

Выведем правила умножения базисных векторов в право-левой общей кинематической алгебре $({}_r\mathbb{T} + {}_l\mathbb{T}^*)$. При этом будем исходить из следующих положений:

1) принимаемых нами конструкций базисных векторов

$$
{}_r\mathbf{I}^L{}_K = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K\,, \quad {}_l\mathbf{K}^L{}_K = {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L\,;
$$

2) разложения универсального умножения на тензорную и скалярную части;

3) из конечных выражений исключаются базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры;

4) сохранения неизменными следующих умножений

$$
{}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{IK} + {}_r\mathbf{I}^M{}_L \cdot {}_rC^L{}_{MIK}
$$

и

$$
{}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K = {}_lC^{IK}{}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L + {}_lC^{IKM}{}_L \cdot {}_l\mathbf{K}^L{}_M\,;
$$

Итак.

1.

$${}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I = {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^I + ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^I) = {}_l\mathbf{K}^I{}_K + \delta^I{}_K \,.$$

2.

$$\begin{aligned}&{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M \otimes {}_l\mathbf{E}^I = \\ &= {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{e}_M \otimes {}_l\mathbf{E}^I + ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M) \otimes {}_l\mathbf{E}^I = g_{KM} \cdot {}_l\mathbf{E}^I \,.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}&{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{e}_M = \\ &= {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_M + {}_r\mathbf{e}_K \otimes ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{e}_M) = {}_r\mathbf{e}_K \cdot \delta^L{}_M \,.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}&{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{e}_M \otimes {}_l\mathbf{E}^I = \\ &= {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_M \otimes {}_l\mathbf{E}^I + \\ &+ ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{e}_M) \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^I) + ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{e}_M) \cdot {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^I = \\ &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K \,.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}&{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \\ &= {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M \,.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}&{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = \\ &= {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{e}_M + {}_l\mathbf{E}^L \otimes ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M) = {}_l\mathbf{E}^L \cdot g_{KM} \,.\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}&{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M \otimes {}_l\mathbf{E}^I = \\ &{}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{e}_M \otimes {}_l\mathbf{E}^I + {}_l\mathbf{E}^L \otimes ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M) \otimes {}_l\mathbf{E}^I + \\ &({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M) \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) = g_{KM} \cdot g^{LI} \,.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}&{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \\ &{}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + {}_r\mathbf{e}_K \otimes ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \otimes {}_r\mathbf{e}_M + \\ &({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M) = g^{LI} \cdot g_{KM} \,.\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}&{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I = {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{E}^I \\ &= {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{E}^I + {}_r\mathbf{e}_K \otimes ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) = {}_r\mathbf{e}_K \cdot g^{LI} \,.\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}&{}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{e}_M \otimes {}_l\mathbf{E}^I = \\ &= {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_M \otimes {}_l\mathbf{E}^I + ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{e}_M) \otimes {}_l\mathbf{E}^I = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{E}^I \,.\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}&{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \\ &{}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + \\ &({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{e}_M) + \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \\ &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M \,.\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}&{}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \\ &= {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \otimes {}_r\mathbf{e}_M = g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_M \,.\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}&{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I = \\ &= {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{E}^I + {}_l\mathbf{E}^L \otimes ({}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^I) = \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^L \,.\end{aligned}$$

14.

$${}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{e}_M + ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{e}_M) = {}_r\mathbf{I}^L{}_M + \delta^L{}_M \,.$$

Таким образом, общая кинематическая алгебра определяется следующей таблицей умножений базисных векторов:

$$\begin{aligned}
{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I &= {}_l\mathbf{K}^I{}_K + \delta^I{}_K \,, \\
{}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K &= {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{IK} + {}_r\mathbf{I}^M{}_L \cdot {}_rC^L{}_{MIK} \,, \\
{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= g_{KM} \cdot {}_l\mathbf{E}^L \,, \\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{e}_K \,, \\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K \,, \\
{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M \,, \\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M &= {}_l\mathbf{E}^L \cdot g_{KM} \,, \\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI} \,, \\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM} \,, \\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I &= g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_K \,, \\
{}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{E}^I \,, \\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M \,, \\
{}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_M \,, \\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I &= {}_l\mathbf{E}^L \cdot \delta^I{}_K \,, \\
{}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K &= {}_lC^{IK}{}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L + {}_lC^{IKM}{}_L \cdot {}_l\mathbf{K}^L{}_M \,, \\
{}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{e}_M &= \delta^L{}_M + {}_r\mathbf{I}^L{}_M \,.
\end{aligned} \tag{25}$$

3.2. Оператор набла в алгебре $({}_r\mathbb{T} + {}_l\mathbb{T}^*)$

Начнем с ковариантного оператора набла. Согласно определению[3] ковариантный оператор набла в нашем случае записывается следующим образом:

$${}_l\nabla = \frac{\partial}{\partial\, {}_r\mathbf{x}} = {}_l\mathbf{E}^K \frac{\partial}{\partial\, {}_rx^K} \,. \tag{26}$$

Будем называть его *левый* ковариантный оператор набла. Введем дополнительные операторы, связанные с ${}_l\nabla$. Умножим оператор (26) на базисные векторы ${}_l\mathbf{E}^I$ справа. Получим

$${}_l\nabla^I = {}_l\mathbf{E}^K \circ {}_l\mathbf{E}^I \frac{\partial}{\partial\, {}_rx^K} = {}_lC^{KI}{}_{I_1} \cdot \frac{\partial}{\partial\, {}_rx^K}\, {}_l\mathbf{E}^{I_1} \,.$$

[3] См. Глава 1.2. Раздел IX.3.

Проекция этих операторов на базисный вектор ${}_l\mathbf{E}^{I_1}$ – это дифференциальные операторы

$$ {}_l\nabla^I{}_{I_1} = {}_lC^{KI}{}_{I_1} \cdot \frac{\partial}{\partial\, {}_rx^K} \,. $$

В частном виде эти операторы используются в уравнении Дирака для фундаментальных частиц, а матрицы ${}_lC^{KI}{}_{I_1}$ в частном случае представляют собой матрицы Дирака.[4] Действительно, пусть волновая функция ψ представляет собой *правый* вектор

$$ {}_r\psi = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_r\psi^L \,. $$

Вычислим скалярное произведение

$$ {}_l\nabla^I \cdot {}_r\psi = {}_lC^{KI}{}_L \cdot \frac{\partial\, {}_r\psi^L}{\partial\, {}_rx^K} \,. $$

Это выражение представляет собой системообразующее слагаемое в уравнении Дирака.

Обратимся теперь к контравариантному оператору набла. Согласно определению[5] контравариантный оператор набла в нашем случае записывается следующим образом

$$ {}_r\nabla^* = \frac{\partial}{\partial\, {}_l\mathbf{x}^*} = {}_r\mathbf{e}_K \frac{\partial}{\partial\, {}_lx_K} \,. \tag{27} $$

Будем называть его *правый* контравариантный оператор набла. Введем дополнительные операторы, связанные с ${}_r\nabla^*$. Умножим оператор (27) на базисные векторы ${}_r\mathbf{e}_I$ слева. Получим

$$ {}_r\nabla^*_I = {}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K \frac{\partial}{\partial\, {}_lx_K} = {}_rC^{I_1}{}_{IK} \cdot \frac{\partial}{\partial\, {}_lx_K}\, {}_r\mathbf{e}_{I_1} \,. $$

Проекция этих операторов на базисный вектор $\mathbf{e}_{I_1}$ это дифференциальные операторы

$$ {}_r\nabla^{*I_1}{}_I = {}_rC^{I_1}{}_{IK} \cdot \frac{\partial}{\partial\, {}_lx_K} \,. $$

В настоящее время эти операторы в физике не используются.

3.3. *Лево-правая общая кинематическая алгебра* $({}_l\mathbb{T} + {}_r\mathbb{T}^*)$

Рассматриваемая модификация общей кинематической алгебры называется *лево-правой* потому, что контравариантная часть алгебры подчиняется левому умножению, а ковариантная часть алгебры подчиняется правому умножению.

Выведем правила умножения базисных векторов в лево-правой общей кинематической алгебре $({}_l\mathbb{T} + {}_r\mathbb{T}^*)$. При этом будем исходить из следующих положений:

1) принимаемых нами конструкций базисных векторов

$$ {}_l\mathbf{I}^L{}_K = {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \,, \quad {}_r\mathbf{K}^L{}_K = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \,; $$

2) разложения универсального умножения на тензорную и скалярную части;

3) из конечных выражений исключаются базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры;

4) сохранения неизменными следующих умножений

$$ {}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI} + {}_l\mathbf{I}^M{}_L \cdot {}_rC^L{}_{MKI} $$

и

$$ {}_r\mathbf{E}^I \circ {}_r\mathbf{E}^K = {}_rC^{KI}{}_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L + {}_rC^{KIM}{}_L \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M \,. $$

Итак.

1.

$$ {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I = {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^I + ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^I) = {}_l\mathbf{I}^I{}_K + \delta^I{}_K \,. $$

2.

$$ \begin{aligned} &{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M = {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I \otimes {}_l\mathbf{e}_M = \\ &= {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^I \otimes {}_l\mathbf{e}_M + ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^I) \otimes {}_l\mathbf{e}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M \,. \end{aligned} $$

3.

$$ \begin{aligned} &{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M = \\ &= {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{e}_M + {}_r\mathbf{E}^L \otimes ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M) = {}_r\mathbf{E}^L \cdot g_{KM} \,. \end{aligned} $$

4.

$$ \begin{aligned} &{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I \otimes {}_l\mathbf{e}_M = \\ &= {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^I \otimes {}_l\mathbf{e}_M + \\ &+ ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^I) \cdot ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{e}_M) + ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^I) \cdot {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_M = \\ &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M \,. \end{aligned} $$

5.

$$ \begin{aligned} &{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M \otimes {}_r\mathbf{E}^I = \\ &= {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{e}_M \otimes {}_r\mathbf{E}^I + ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M) \otimes {}_r\mathbf{E}^I = g_{KM} \cdot {}_r\mathbf{E}^I \,. \end{aligned} $$

6.

$$ \begin{aligned} &{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{e}_M = \\ &= {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_M + {}_l\mathbf{e}_K \otimes ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{e}_M) = {}_l\mathbf{e}_K \cdot \delta^L{}_M \,. \end{aligned} $$

7.

$$ \begin{aligned} &{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M = {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{E}^I \otimes {}_l\mathbf{e}_M = \\ &{}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{E}^I \otimes {}_l\mathbf{e}_M + {}_l\mathbf{e}_K \otimes ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{E}^I) \otimes {}_l\mathbf{e}_M = \\ &{}_l\mathbf{e}_K \otimes ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{E}^I) \otimes {}_l\mathbf{e}_M = \\ &{}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{e}_M \cdot g^{LI} + ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M) \cdot g^{LI} = g_{KM} \cdot g^{LI} \,. \end{aligned} $$

---

[4] См. Глава 3.3. Раздел VIII.3. и Глава 4.3. Раздел V.1.

[5] См. Глава 1.2. Раздел IX.3.

8.

$$ {}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M \otimes {}_r\mathbf{E}^I = $$
$$ {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_l\mathbf{e}_M \otimes {}_r\mathbf{E}^I + {}_r\mathbf{E}^L \otimes ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M) \otimes {}_r\mathbf{E}^I = $$
$$ {}_r\mathbf{E}^L \otimes ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M) \otimes {}_r\mathbf{E}^I = $$
$$ {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{E}^I \cdot g_{KM} + ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{E}^I) \cdot g_{KM} = g^{LI} \cdot g_{KM} . $$

9.

$$ {}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I $$
$$ = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^I + {}_r\mathbf{E}^L \otimes ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^I) = {}_r\mathbf{E}^L \cdot \delta^I{}_K . $$

10.

$$ {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M = {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{E}^I \otimes {}_l\mathbf{e}_M = $$
$$ = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{E}^I \otimes {}_l\mathbf{e}_M + ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{E}^I) \otimes {}_l\mathbf{e}_M = g^{LI} \cdot {}_l\mathbf{e}_M . $$

11.

$$ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{e}_M \otimes {}_r\mathbf{E}^I = $$
$$ {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_M \otimes {}_r\mathbf{E}^I + $$
$$ +({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{e}_M) \cdot ({}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^I) + ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{e}_M) \cdot {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^I = $$
$$ = \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K . $$

12.

$$ {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M = {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{e}_M \otimes {}_r\mathbf{E}^I = $$
$$ = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_M \otimes {}_r\mathbf{E}^I + ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{e}_M) \otimes {}_r\mathbf{E}^I = \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{E}^I . $$

13.

$$ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I = {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{E}^I = $$
$$ = {}_l\mathbf{e}_K \otimes {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_r\mathbf{E}^I + {}_l\mathbf{e}_K \otimes ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{E}^I) = {}_l\mathbf{e}_K \cdot g^{LI} . $$

14.

$$ {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{e}_M = {}_r\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{e}_M + ({}_r\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{e}_M) = {}_r\mathbf{K}^L{}_M + \delta^L{}_M . $$

Таким образом, лево-правая общая кинематическая алгебра определяется следующей таблицей умножений базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I &= {}_l\mathbf{I}^I{}_K + \delta^I{}_K , \\
{}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K &= {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI} + {}_l\mathbf{I}^M{}_L \cdot {}_lC^L{}_{MKI} , \\
{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M , \\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M &= {}_r\mathbf{E}^L \cdot g_{KM} , \\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M , \\
{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= g_{KM} \cdot {}_r\mathbf{E}^I , \\
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M &= {}_l\mathbf{e}_K \cdot \delta^L{}_M , \\
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI} , \\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM} , \\
{}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I &= {}_r\mathbf{E}^L \cdot \delta^I{}_K , \\
{}_r\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= g^{LI} \cdot {}_l\mathbf{e}_M , \\
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K , \\
{}_r\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{E}^I , \\
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I &= {}_l\mathbf{e}_K \cdot g^{LI} , \\
{}_r\mathbf{E}^I \circ {}_r\mathbf{E}^K &= {}_rC^{KI}{}_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L + {}_rC^{KIM}{}_L \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M , \\
{}_r\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{e}_M &= \delta^L{}_M + {}_r\mathbf{K}^L{}_M .
\end{aligned}
\tag{28}
$$

3.4. Оператор набла в алгебре $({}_l\mathbb{T} + {}_r\mathbb{T}^*)$

Начнем с ковариантного оператора набла. Согласно определению[6] ковариантный оператор набла в нашем случае записывается следующим образом:

$$ {}_r\nabla = \frac{\partial}{\partial\,{}_l\mathbf{x}} = {}_r\mathbf{E}^K \frac{\partial}{\partial\,{}_lx^K} . \tag{29} $$

Будем называть его *правый* ковариантный оператор набла. Введем дополнительные операторы, связанные с ${}_r\nabla$. Умножим оператор (29) на базисные векторы ${}_r\mathbf{E}^I$ слева. Получим

$$ {}_r\nabla^I = {}_r\mathbf{E}^I \circ {}_r\mathbf{E}^K \frac{\partial}{\partial\,{}_lx^K} = {}_rC^{KI}{}_{I_1} \cdot \frac{\partial}{\partial\,{}_lx^K}\,{}_r\mathbf{E}^{I_1} . $$

Проекция этих операторов на базисный вектор ${}_r\mathbf{E}^{I_1}$ – это дифференциальные операторы

$$ {}_r\nabla^I{}_{I_1} = {}_rC^{KI}{}_{I_1} \cdot \frac{\partial}{\partial\,{}_lx^K} . $$

В настоящее время эти операторы в физике не используются.

Обратимся теперь к контравариантному оператору набла. Согласно определению контравариантный оператор набла в нашем случае записывается следующим образом:

$$ {}_l\nabla^* = \frac{\partial}{\partial\,{}_r\mathbf{x}^*} = {}_l\mathbf{e}_K \frac{\partial}{\partial\,{}_rx_K} . \tag{30} $$

Будем называть его *левый* контравариантный оператор набла. Введем дополнительные операторы, связанные с ${}_l\nabla^*$. Умножим оператор (30) на базисные векторы ${}_l\mathbf{e}_I$ справа:

$$ {}_l\nabla^*_I = {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_I \frac{\partial}{\partial\,{}_rx_K} = {}_lC^{I_1}{}_{IK} \cdot \frac{\partial}{\partial\,{}_rx_K}\,{}_l\mathbf{e}_{I_1} . $$

В частном виде эти операторы используются в сопряженном уравнении Дирака для фундаментальных античастиц, а матрицы ${}_lC^{I_1}{}_{IK}$ в частном случае представляют собой сопряженные матрицы Дирака.[7] Действительно, пусть волновая функция ψ представляет собой *правый* сопряженный вектор

$$ {}_r\psi^* = {}_r\psi_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L . $$

Вычислим скалярное произведение

$$ {}_l\nabla^*_I \cdot {}_r\psi^* = {}_lC^L{}_{IK} \cdot \frac{\partial\,{}_r\psi_L}{\partial\,{}_rx_K} . $$

Это выражение представляет собой системообразующее слагаемое в сопряженном уравнении Дирака.

---

[6] См. Глава 1.2. Раздел IX.3.
[7] См. Глава 3.3. Раздел VIII. и Глава 4.3. Раздел V.

4. Системообразующие постулаты

1. Фундаментальные и промежуточные физические объекты и фундаментальные и промежуточные физические антиобъекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны общей кинематической алгебре $(\mathbb{T}+\mathbb{T}^*)$. Таким образом, общая кинематическая алгебра $(\mathbb{T}+\mathbb{T}^*)$ – это пространственно-временная характеристика совокупности фундаментальных и промежуточных физических объектов и фундаментальных и промежуточных физических антиобъектов.

2. Наряду с фундаментальными и промежуточными физическими объектами постулируем существование *скалярных* физических объектов. В качестве поясняющего примера приведем следующее правило умножения:

$$ {}_l\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I = {}_l\mathbf{I}^I{}_K + \delta^I{}_K \,. $$

$\circ$–умножение в этом случае отождествляется с взаимодействием фундаментального объекта ($\mathbf{e}$) и фундаментального антиобъекта ($\mathbf{E}$). Из указанного умножения следует, что это взаимодействие приводит к возникновению промежуточного объекта ($\mathbf{I}$) и *скалярного* объекта (δ).

IV. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ. КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

1. Системообразующий постулат

Сразу выдвинем постулат, который будем развивать дальше. Квантовые явления, то есть дискретность кинематических величин, обусловлены тем, что множество векторов кинематических величин составляет алгебру, то есть на множестве этих векторов помимо операций сложения и умножения на число имеет место операция умножения. *Уравнения структуры* общей кинематической алгебры и ее подалгебр могут быть представлены как *квантовые уравнения (уравнения дискретности)* кинематических величин.

2. Уравнения структуры алгебры линейных преобразований $\mathbb{L}$

2.1. Правая алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$

Рассмотрим правую алгебру линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$. Закон композиции на ${}_r\mathbb{L}$ определен умножением векторов

$$ {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{l}_1 \circ {}_r\mathbf{l}_2 \,. \tag{31} $$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1\, {}_r\mathbf{l}$. Рассматривая второй дифференциал от закона умножения, договоримся, что сначала дифференцирование выполняется по вектору ${}_r\mathbf{l}_1$, а затем по вектору ${}_r\mathbf{l}_2$. Тогда имеем для правого умножения (31)

$$ d_2 d_1\, {}_r\mathbf{l} = d\, {}_r\mathbf{l}_1 \circ d\, {}_r\mathbf{l}_2 \,. \tag{32} $$

Вблизи единицы алгебры, в частности для ${}_r\mathbf{l}_2 \to \delta$ из соотношения (31) имеем

$$ d\, {}_r\mathbf{l}_1 = d_1\, {}_r\mathbf{l} \,, \tag{33} $$

а для ${}_r\mathbf{l}_1 \to \delta$ из соотношения (31) имеем

$$ d\, {}_r\mathbf{l}_2 = d_2\, {}_r\mathbf{l} \,. \tag{34} $$

Используя выражения (33) и (34) в соотношении (32), получим

$$ d_2 d_1\, {}_r\mathbf{l} = d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} \,. \tag{35} $$

Это соотношение называется *уравнением структуры* правой алгебры линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$.

Заметим, что к уравнению структуры можно применить процедуру антисимметризации. Из соотношения (35) имеем

$$ d_2 d_1\, {}_r\mathbf{l} - d_1 d_2\, {}_r\mathbf{l} = d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} - d_2\, {}_r\mathbf{l} \circ d_1\, {}_r\mathbf{l} $$

или в другом виде с использованием символа Λ

$$ d_2 \,\Lambda\, d_1\, {}_r\mathbf{l} = d_1\, {}_r\mathbf{l} \,\Lambda\, d_2\, {}_r\mathbf{l} \,. $$

Подставляя в соотношение (35) выражения дифференциалов через базисные векторы

$$ d\, {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^K{}_I \cdot d\, {}_r l^I{}_K $$

и пользуясь законом умножения базисных векторов [8]

$$ {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M \,, $$

получим уравнение структуры для алгебры линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ в координатной форме

$$ d_2 d_1\, {}_r l^M{}_L = d_2\, {}_r l^M{}_K \cdot d_1\, {}_r l^K{}_L \,. \tag{36} $$

В том случае, когда в алгебре ${}_r\mathbb{L}$ определено скалярное умножение, закон умножения базисных векторов имеет вид

$$ {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M $$

и ранее полученное уравнение структуры дополняется скалярным уравнением

$$ d_2 d_1\, {}_r l^0 = d_2\, {}_r l^L{}_K \cdot d_1\, {}_r l^K{}_L \,, $$

которое можно рассматривать как определение квадрата дифференциала некоторой условной координаты σ. Для скалярного произведения $d_2 = d_1 = d$, поэтому имеем[9]

$$ d^2 l^0 = d\, {}_r l^L{}_K \cdot d\, {}_r l^K{}_L = (d\sigma)^2 \,. $$

---

[8] В рассматриваемом случае скалярное умножение в алгебре ${}_r\mathbb{L}$ не определено.

[9] Координату σ можно отождествить с пятой координатой в теории Калуцы-Клейна (см. Главу 5.5.).

2.2. Левая алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$

Для левой алгебры линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ закон композиции определен левым умножением векторов

$$ {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{l}_2 \circ {}_l\mathbf{l}_1 . \tag{37}$$

Отсюда следует второй дифференциал от левого произведения векторов

$$ d_2 d_1\, {}_l\mathbf{l} = d\, {}_l\mathbf{l}_2 \circ d\, {}_l\mathbf{l}_1 . \tag{38}$$

Вблизи единицы алгебры, в частности для ${}_l\mathbf{l}_2 \to \delta$, из выражения (37) имеем

$$ d\, {}_l\mathbf{l}_2 = d_2\, {}_l\mathbf{l} , \tag{39}$$

а для ${}_l\mathbf{l}_1 \to \delta$ из выражения (37) имеем

$$ d\, {}_l\mathbf{l}_1 = d_1\, {}_l\mathbf{l} . \tag{40}$$

Используя выражения (39) и (40) в соотношении (38), получим

$$ d_2 d_1\, {}_l\mathbf{l} = d_2\, {}_l\mathbf{l} \circ d_1\, {}_l\mathbf{l} . \tag{41}$$

Это соотношение назовем *уравнением структуры* левой алгебры линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$. В координатной форме уравнение структуры имеет вид

$$ d_2 d_1\, {}_l l^M{}_L = d_2\, {}_l l^M{}_K \cdot d_1\, {}_l l^K{}_L . \tag{42}$$

3. Квантовые уравнения алгебры линейных преобразований в дифференциалах

3.1. Правая алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$

Начнем с уравнения структуры правой алгебры ${}_r\mathbb{L}$. В уравнении (35) введем обозначение

$$ d_1\, {}_r\mathbf{l} = {}_r\lambda $$

и, соответственно, в уравнении (36) введем обозначение

$$ d_1\, {}_r l^I{}_K = {}_r\lambda^I{}_K $$

и назовем функцию ${}_r\lambda$ с координатами ${}_r\lambda^I{}_K$ *волновой* функцией алгебры ${}_r\mathbb{L}$, дифференциал d_2 обозначим d. Уравнение структуры (35), записанное по отношению к волновой функции

$$ d\, {}_r\lambda = {}_r\lambda \circ d\, {}_r\mathbf{l} , \tag{43}$$

и уравнение структуры (36), записанное по отношению к координатам волновой функции

$$ d\, {}_r\lambda^M{}_L = d\, {}_r l^M{}_K \cdot {}_r\lambda^K{}_L , \tag{44}$$

назовем *квантовым уравнением правой алгебры линейных преобразований в дифференциалах*.

3.2. Левая алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$

Рассуждая аналогичным образом по отношению к уравнениям структуры левой алгебры линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ (41) и (42), получим *квантовое уравнение левой алгебры линейных преобразований в дифференциалах*

в векторной форме

$$ d\, {}_l\lambda = d\, {}_l\mathbf{l} \circ {}_l\lambda \tag{45}$$

и в координатной форме

$$ d\, {}_l\lambda^M{}_L = d\, {}_l l^M{}_K \cdot {}_l\lambda^K{}_L . \tag{46}$$

4. Уравнения структуры общей алгебры линейных преобразований $(\mathbb{L} + \mathbb{L}^*)$

Общая алгебра линейных преобразований $(\mathbb{L} + \mathbb{L}^*)$ имеет две модификации: лево-правая общая алгебра линейных преобразований $({}_l\mathbb{L} + {}_r\mathbb{L}^*)$ и право-левая общая алгебра линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$. Начнем с рассмотрения уравнений структуры право-левой общей алгебры линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$.

4.1. Право-левая общая алгебра линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$

Векторы этой алгебры обозначим

$$ \mathbf{t} = \mathbf{l} + \mathbf{l}^* \in ({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*) . $$

Умножение векторов в рассматриваемой алгебре задано уравнениями

$$ \mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \circ \mathbf{t}_2 . $$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1 \mathbf{t}$. Выполняя для него выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны в предыдущем разделе, получим уравнение структуры

$$ d_2 d_1 \mathbf{t} = d_1 \mathbf{t} \circ d_2 \mathbf{t} \tag{47}$$

или

$$ d_2(d_1\mathbf{l}^* + d_1\mathbf{l}) = (d_1\mathbf{l}^* + d_1\mathbf{l}) \circ (d_2\mathbf{l}^* + d_2\mathbf{l}) $$

или

$$ d_2 d_1\mathbf{l}^* + d_2 d_1\mathbf{l} = d_1\mathbf{l}^* \circ d_2\mathbf{l}^* + d_1\mathbf{l}^* \circ d_2\mathbf{l} + d_1\mathbf{l} \circ d_2\mathbf{l}^* + d_1\mathbf{l} \circ d_2\mathbf{l} . $$

Вычислим уравнения структуры для координат векторов. Для этого подставим в предыдущее соотношение выражения дифференциалов через базисные векторы

$$ d\, {}_r\mathbf{l} = d\, {}_r l^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^K{}_I , \quad d\, {}_l\mathbf{l}^* = d\, {}_l l^{*I}{}_K \cdot {}_l\mathbf{K}^K{}_I . $$

Получим

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1\, {}_l l^{*M}{}_L \cdot {}_l\mathbf{K}^L{}_M + d_2 d_1\, {}_r l^M{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M = \\
&= d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot ({}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot ({}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot ({}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot ({}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M)\,.
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся законом умножения базисных векторов (24):

$$\begin{aligned}
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,, \\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= g_{KM} \cdot g^{LI}\,, \\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= g^{LI} \cdot g_{KM}\,, \\
{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1\, {}_l l^{*K}{}_I \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K + d_2 d_1\, {}_r l^M{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M = \\
&= d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*L}{}_K + d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*L}{}_I \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_r l^L{}_K + d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу линейной независимости базисных векторов следуют уравнения структуры для координат векторов право-левой общей алгебры линейных преобразований

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1\, {}_r l^M{}_L = d_2\, {}_r l^M{}_K \cdot d_1\, {}_r l^K{}_L\,, \\
&d_2 d_1\, {}_l l^{*K}{}_I = d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*L}{}_I\,, \\
&d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*L}{}_K + d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} + d_2\, {}_r l^K{}_L \cdot d_1\, {}_r l^L{}_K = 0\,.
\end{aligned} \tag{48}$$

4.2. Лево-правая общая алгебра линейных преобразований $({}_l\mathbb{L} + {}_r\mathbb{L}^*)$

Векторы этой алгебры обозначим

$$\mathbf{t} = \mathbf{l} + \mathbf{l}^* \in ({}_l\mathbb{L} + {}_r\mathbb{L}^*)\,.$$

Умножение векторов в рассматриваемой алгебре задано уравнениями

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_2 \circ \mathbf{t}_1\,.$$

Выполняя выкладки, аналогичные предыдущим, для лево-правой общей алгебры линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$, получим уравнения структуры для координат векторов этой алгебры

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1\, {}_l l^M{}_L = d_2\, {}_l l^M{}_K \cdot d_1\, {}_l l^K{}_L\,, \\
&d_2 d_1\, {}_r l^{*K}{}_I = d_1\, {}_r l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_r l^{*L}{}_I\,, \\
&d_1\, {}_r l^{*M}{}_L \cdot d_2\, {}_r l^{*L}{}_M + d_2\, {}_l l^K{}_L \cdot d_1\, {}_r l^{*M}{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} + \\
&+ d_2\, {}_r l^{*K}{}_L \cdot d_1\, {}_l l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} + d_1\, {}_l l^M{}_L \cdot d_2\, {}_l l^L{}_M = 0\,.
\end{aligned} \tag{49}$$

5. Квантовые уравнения общей алгебры линейных преобразований в дифференциалах

5.1. Право-левая общая алгебра линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$

Начнем с уравнения структуры право-левой общей алгебры линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$. В уравнениях (48) введем обозначение

$$d_1\, {}_r l^I{}_K = {}_r\lambda^I{}_K$$

и назовем функцию ${}_r\lambda^I{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_r\mathbb{L}$. Кроме того, введем обозначение

$$d_1\, {}_l l^{*I}{}_K = {}_l\lambda^{*I}{}_K$$

и назовем функцию ${}_l\lambda^{*I}{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_l\mathbb{L}^*$. Дифференциал d_2 обозначим d. Уравнения структуры, записанные по отношению к волновым функциям

$$\begin{aligned}
&d\, {}_r\lambda^M{}_L = d\, {}_r l^M{}_K \cdot {}_r\lambda^K{}_L\,, \\
&d\, {}_l\lambda^{*M}{}_L = {}_l\lambda^{*M}{}_K \cdot d\, {}_l l^{*K}{}_L\,, \\
&d\, {}_l l^{*M}{}_L \cdot {}_l\lambda^{*L}{}_M + {}_r\lambda^K{}_L \cdot d\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} + \\
&+ {}_l\lambda^{*K}{}_L \cdot d\, {}_r l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} + d\, {}_r l^M{}_L \cdot {}_r\lambda^L{}_M = 0\,,
\end{aligned} \tag{50}$$

назовем *квантовыми уравнениями* право-левой общей алгебры линейных преобразований $({}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{L}^*)$ в дифференциалах.

5.2. Лево-правая общая алгебра линейных преобразований $({}_l\mathbb{L} + {}_r\mathbb{L}^*)$

Теперь обратимся к уравнениям структуры лево-правой общей алгебры линейных преобразований $({}_l\mathbb{L} + {}_r\mathbb{L}^*)$. В уравнениях (49) введем обозначение

$$d_1\, {}_l l^I{}_K = {}_l\lambda^I{}_K$$

и назовем функцию ${}_l\lambda^I{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_l\mathbb{L}$. Кроме того, введем обозначение

$$d_1\, {}_r l^{*I}{}_K = {}_r\lambda^{*I}{}_K$$

и назовем функцию ${}_r\lambda^{*I}{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_r\mathbb{L}^*$. Дифференциал d_2 обозначим d. Уравнения структуры, записанные по отношению к волновым функциям

$$\begin{aligned}
&d\, {}_l\lambda^M{}_L = d\, {}_l l^M{}_K \cdot {}_l\lambda^K{}_L\,, \\
&d\, {}_r\lambda^{*K}{}_I = {}_r\lambda^{*K}{}_L \cdot d\, {}_r l^L{}_I\,, \\
&{}_r\lambda^{*M}{}_L \cdot d\, {}_r l^{*L}{}_M + d\, {}_l l^K{}_L \cdot {}_r\lambda^{*M}{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} + \\
&+ d\, {}_r l^{*K}{}_L \cdot {}_l\lambda^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} + {}_l\lambda^M{}_L \cdot d\, {}_l l^L{}_M = 0\,,
\end{aligned} \tag{51}$$

назовем *квантовыми уравнениями* лево-правой общей алгебры линейных преобразований $({}_l\mathbb{L} + {}_r\mathbb{L}^*)$ в дифференциалах.

6. Уравнения структуры кинематической алгебры $\mathbb{T}=\mathbb{X}+\mathbb{L}$

Кинематическая алгебра существует в двух модификациях: левая кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}$ и правая кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}$.

6.1. *Правая кинематическая алгебра* ${}_r\mathbb{T} = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L}$

Векторы в этой алгебре имеют вид

$$ {}_r\mathbf{t} = \frac{1}{L_0}\,{}_r\mathbf{x} + {}_r\mathbf{l}\,. $$

Умножение векторов в правой кинематической алгебре записывается следующим образом[10]:

$$ {}_r\mathbf{t} = {}_r\mathbf{t}_1 \circ {}_r\mathbf{t}_2\,. \tag{52} $$

Здесь ${}_r\mathbf{t}$, ${}_r\mathbf{t}_1$, ${}_r\mathbf{t}_2 \in {}_r\mathbb{T}$. Далее рассмотрим уравнения структуры кинематической алгебры ${}_r\mathbb{T}$, определяемые дифференцированием вышеуказанного закона умножения векторов. Возьмем первые дифференциалы от этого соотношения

$$ d_1\,{}_r\mathbf{t} = d\,{}_r\mathbf{t}_1 \circ {}_r\mathbf{t}_2\,, \qquad d_2\,{}_r\mathbf{t} = {}_r\mathbf{t}_1 \circ d\,{}_r\mathbf{t}_2\,. $$

Отсюда вблизи единицы алгебры (для ${}_r\mathbf{t}_1 = {}_r\mathbf{t}_2 = \mathbf{1}$)

$$ d_1\,{}_r\mathbf{t} = d\,{}_r\mathbf{t}_1\,, \qquad d_2\,{}_r\mathbf{t} = d\,{}_r\mathbf{t}_2\,. \tag{53} $$

Возьмем второй дифференциал от соотношения (52)

$$ d_2 d_1\,{}_r\mathbf{t} = d\,{}_r\mathbf{t}_1 \circ d\,{}_r\mathbf{t}_2\,. \tag{54} $$

Используем выражение (53) для преобразования этого уравнения. Получим

$$ d_2 d_1\,{}_r\mathbf{t} = d_1\,{}_r\mathbf{t} \circ d_2\,{}_r\mathbf{t}\,. $$

Это уравнение представляет собой уравнение структуры правой кинематической алгебры ${}_r\mathbb{T}$. Запишем его через векторы слагаемых пространств ${}_r\mathbb{X}$ и ${}_r\mathbb{L}$. Для этого подставим в это уравнение

$$ d\,{}_r\mathbf{t} = \frac{1}{L_0}\cdot d\,{}_r\mathbf{x} + d\,{}_r\mathbf{l}. $$

Получим

$$ \begin{aligned} & d_2\left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\,{}_r\mathbf{x} + d_1\,{}_r\mathbf{l}\right) = \\ & = \left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\,{}_r\mathbf{x} + d_1\,{}_r\mathbf{l}\right) \circ \left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_2\,{}_r\mathbf{x} + d_2\,{}_r\mathbf{l}\right) \end{aligned} $$

или[11]

$$ \begin{aligned} & d_2 d_1\,{}_r\mathbf{x} = \tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\,{}_r\mathbf{x} \circ d_2\,{}_r\mathbf{x} + d_1\,{}_r\mathbf{l} \circ d_2\,{}_r\mathbf{x}\,, \\ & d_2 d_1\,{}_r\mathbf{l} = d_1\,{}_r\mathbf{l} \circ d_2\,{}_r\mathbf{l}\,. \end{aligned} \tag{55} $$

Запишем полученные уравнения через координаты векторов ${}_r\mathbf{x}$ и ${}_r\mathbf{l}$. Для этого подставим в соотношение (55) выражения векторов через базисные векторы

$$ {}_r\mathbf{x} = {}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_r x^I \quad \text{и} \quad {}_r\mathbf{l} = {}_r l^K{}_I \cdot {}_r\mathbf{I}^I{}_K $$

и воспользуемся законом умножения базисных векторов в ${}_r\mathbb{T}$ (9)

$$ \begin{aligned} & {}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_r C^L{}_{IK}\,, \\ & {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M\,, \\ & {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = 0\,, \\ & {}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,. \end{aligned} $$

Получим уравнения структуры для координат векторов в правой кинематической алгебре

$$ \begin{aligned} & d_2 d_1\,{}_r x^I = \tfrac{1}{L_0}\cdot {}_r C^I{}_{ML} \cdot d_1\,{}_r x^M \cdot d_2\,{}_r x^L + \\ & \quad + d_2\,{}_r l^I{}_M \cdot d_1\,{}_r x^M\,, \\ & d_2 d_1\,{}_r l^I{}_K = d_2\,{}_r l^I{}_L \cdot d_1\,{}_r l^L{}_K\,. \end{aligned} \tag{56} $$

Обратимся теперь к левой кинематической алгебре ${}_l\mathbb{T} = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L}$.

6.2. *Левая кинематическая алгебра* ${}_l\mathbb{T} = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L}$

Умножение векторов в левой кинематической алгебре записывается следующим образом[12]:

$$ {}_l\mathbf{t} = {}_l\mathbf{t}_2 \circ {}_l\mathbf{t}_1\,. \tag{57} $$

Здесь ${}_l\mathbf{t}$, ${}_l\mathbf{t}_1$, ${}_l\mathbf{t}_2 \in {}_l\mathbb{T}$. Далее рассмотрим уравнения структуры кинематической алгебры ${}_l\mathbb{T}$, определяемые дифференцированием вышеуказанного закона умножения векторов. Возьмем первые дифференциалы от этого соотношения

$$ d_1\,{}_l\mathbf{t} = {}_l\mathbf{t}_2 \circ d\,{}_l\mathbf{t}_1\,, \qquad d_2\,{}_l\mathbf{t} = d\,{}_l\mathbf{t}_2 \circ {}_l\mathbf{t}_1\,. $$

Отсюда вблизи единицы алгебры (для ${}_l\mathbf{t}_1 = {}_l\mathbf{t}_2 = \mathbf{1}$)

$$ d_1\,{}_l\mathbf{t} = d\,{}_l\mathbf{t}_1\,, \qquad d_2\,{}_l\mathbf{t} = d\,{}_l\mathbf{t}_2\,. \tag{58} $$

Возьмем второй дифференциал от соотношения (57)

$$ d_2 d_1\,{}_l\mathbf{t} = d\mathbf{t}_2 \circ d\mathbf{t}_1\,. \tag{59} $$

---

[10] Здесь векторы $\mathbf{t}$ являются безразмерными.

[11] Здесь учтено, что $d_1\,{}_r\mathbf{x} \circ d_2\,{}_r\mathbf{l} = 0$.

[12] Здесь векторы $\mathbf{t}$ являются безразмерными.

Используем соотношения (58) для преобразования этого уравнения. Получим

$$d_2 d_1\,{}_l\mathbf{t} = d_2\,{}_l\mathbf{t}\circ d_1\,{}_l\mathbf{t}\,.$$

Это уравнение представляет собой уравнение структуры левой кинематической алгебры ${}_l\mathbb{T}$. Запишем его через векторы слагаемых пространств ${}_l\mathbb{X}$ и ${}_l\mathbb{L}$. Для этого подставим в это уравнение

$$d\,{}_l\mathbf{t} = \frac{1}{L_0}\cdot d\,{}_l\mathbf{x} + d\,{}_l\mathbf{l}.$$

Получим

$$\begin{aligned} & d_2\left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\,{}_l\mathbf{x} + d_1\,{}_l\mathbf{l}\right) = \\ & = \left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_2\,{}_l\mathbf{x} + d_2\,{}_l\mathbf{l}\right)\circ\left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\,{}_l\mathbf{x} + d_1\,{}_l\mathbf{l}\right)\end{aligned}$$

или[13]

$$\begin{aligned} & d_2 d_1\,{}_l\mathbf{x} = \tfrac{1}{L_0}\cdot d_2\,{}_l\mathbf{x}\circ d_1\,{}_l\mathbf{x} + d_2\,{}_l\mathbf{l}\circ d_1\,{}_l\mathbf{x}\,, \\ & d_2 d_1\,{}_l\mathbf{l} = d_2\,{}_l\mathbf{l}\circ d_1\,{}_l\mathbf{l}\,. \end{aligned} \tag{60}$$

Запишем полученные уравнения через координаты векторов ${}_l\mathbf{x}$ и ${}_l\mathbf{l}$. Для этого подставим в соотношение (60) выражения векторов через базисные векторы

$${}_l\mathbf{x} = {}_l\mathbf{e}_I\cdot{}_l x^I \quad \text{и} \quad {}_l\mathbf{l} = {}_l l^K{}_I\cdot{}_l\mathbf{I}^I{}_K$$

и воспользуемся законом умножения базисных векторов в ${}_l\mathbb{T}$ (6)

$$\begin{aligned} & {}_l\mathbf{e}_I\circ{}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_L\cdot{}_l C^L{}_{KI}\,, \\ & {}_l\mathbf{e}_K\circ{}_l\mathbf{I}^I{}_M = 0\,, \\ & {}_l\mathbf{I}^L{}_K\circ{}_l\mathbf{e}_M = \delta^L{}_M\cdot{}_l\mathbf{e}_K\,, \\ & {}_l\mathbf{I}^L{}_K\circ{}_l\mathbf{I}^I{}_M = \delta^L{}_M\cdot{}_l\mathbf{I}^I{}_K\,. \end{aligned}$$

Получим уравнения структуры для координат векторов в правой кинематической алгебре

$$\begin{aligned} & d_2 d_1\,{}_l x^I = \tfrac{1}{L_0}\cdot{}_l C^I{}_{ML}\cdot d_1\,{}_l x^M\cdot d_2\,{}_l x^L + \\ & \quad + d_2\,{}_l l^L{}_M\cdot d_1\,{}_l x^M\,, \\ & d_2 d_1\,{}_l l^I{}_K = d_2\,{}_l l^I{}_L\cdot d_1\,{}_l l^L{}_K\,. \end{aligned} \tag{61}$$

7. Квантовые уравнения кинематической алгебры в дифференциалах

7.1. *Правая кинематическая алгебра* ${}_r\mathbb{T} = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L}$

В уравнении (55) введем обозначение $d_1\,{}_r\mathbf{x} = {}_r\chi$ и соответственно в уравнении (56) введем обозначение $d_1\,{}_r x^I = {}_r\chi^I$ и назовем функцию ${}_r\chi$ с координатами ${}_r\chi^I$ *волновой* функцией пространства-времени ${}_r\mathbb{X}$. Кроме того, в уравнении (55) введем обозначение $d_1\,{}_r\mathbf{l} = {}_r\lambda$ и соответственно в уравнении (56) введем обозначение $d_1\,{}_r l^I{}_K = {}_r\lambda^I{}_K$ и назовем функцию ${}_r\lambda$ с координатами ${}_r\lambda^I{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_r\mathbb{L}$. Дифференциал d_2 переобозначим d. Уравнения структуры (55), записанные по отношению к волновым функциям

$$\begin{aligned} & d\,{}_r\chi = \tfrac{1}{L_0}\cdot{}_r\chi\circ d\,{}_r\mathbf{x} + {}_r\lambda\circ d\,{}_r\mathbf{x}\,, \\ & d\,{}_r\lambda = {}_r\lambda\circ d\,{}_r\mathbf{l}\,, \end{aligned} \tag{62}$$

и уравнения структуры (56), записанные по отношению к координатам волновых функций

$$\begin{aligned} & d\,{}_r\chi^I = \tfrac{1}{L_0}\cdot{}_r C^I{}_{ML}\cdot{}_r\chi^M\cdot d\,{}_r x^L + d\,{}_r l^I{}_M\cdot{}_r\chi^M\,, \\ & d\,{}_r\lambda^I{}_K = d\,{}_r l^I{}_L\cdot{}_r\lambda^L{}_K\,, \end{aligned} \tag{63}$$

назовем ***квантовыми уравнениями правой кинематической алгебры в дифференциалах***. Коэффициент L_0 имеет размерность длины и аналогичен постоянной Планка $\hbar$ в уравнениях квантовой механики.

7.2. *Левая кинематическая алгебра* ${}_l\mathbb{T} = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L}$

В уравнении (60) введем обозначение $d_1\,{}_l\mathbf{x} = {}_l\chi$ и соответственно в уравнении (61) введем обозначение $d_1\,{}_l x^I = {}_l\chi^I$ и назовем функцию ${}_l\chi$ с координатами ${}_l\chi^I$ *волновой* функцией пространства времени ${}_l\mathbb{X}$. Кроме того, в уравнении (60) введем обозначение $d_1\,{}_l\mathbf{l} = {}_l\lambda$ и соответственно в уравнении (61) введем обозначение $d_1\,{}_l l^I{}_K = {}_l\lambda^I{}_K$ и назовем функцию ${}_l\lambda$ с координатами ${}_l\lambda^I{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_l\mathbb{L}$. Дифференциал d_2 переобозначим d. Уравнения структуры (60), записанные по отношению к волновым функциям

$$\begin{aligned} & d\,{}_l\chi = \tfrac{1}{L_0}\cdot d\,{}_l\mathbf{x}\circ{}_l\chi + d\,{}_l\mathbf{l}\circ{}_l\chi\,, \\ & d\,{}_l\lambda = d\,{}_l\mathbf{l}\circ{}_l\lambda\,, \end{aligned} \tag{64}$$

и уравнения структуры (61), записанные по отношению к координатам волновых функций

$$\begin{aligned} & d\,{}_l\chi^I = \tfrac{1}{L_0}\cdot{}_l C^I{}_{ML}\cdot{}_l\chi^M\cdot d\,{}_l x^L + d\,{}_l l^I{}_M\cdot{}_l\chi^M\,, \\ & d\,{}_l\lambda^I{}_K = d\,{}_l l^I{}_L\cdot{}_l\lambda^L{}_K\,, \end{aligned} \tag{65}$$

назовем ***квантовыми уравнениями левой кинематической алгебры в дифференциалах***.

8. Уравнения структуры сопряженной кинематической алгебры $\mathbb{T}^* = \mathbb{X}^* + \mathbb{L}^*$

Сопряженная кинематическая алгебра существует в двух модификациях: левая сопряженная кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}^*$ и правая сопряженная кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}^*$.

---

[13] Здесь учтено, что $d_2\,{}_l\mathbf{x}\circ d_1\,{}_l\mathbf{l} = 0$.

8.1. Правая сопряженная кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}^* = {}_r\mathbb{X}^* + {}_r\mathbb{L}^*$

Векторы в этой алгебре имеют вид

$$ {}_r\mathbf{t}^* = \frac{1}{L_0}\cdot {}_r\mathbf{x}^* + {}_r\mathbf{l}^* \in {}_r\mathbb{T}^* = {}_r\mathbb{X}^* + {}_r\mathbb{L}^* . $$

Умножение векторов в правой сопряженной кинематической алгебре записывается следующим образом:

$$ {}_r\mathbf{t}^* = {}_r\mathbf{t}_1^* \circ {}_r\mathbf{t}_2^* . $$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1\, {}_r\mathbf{t}^*$. Выполняя для него выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны в предыдущем разделе, получим уравнение структуры правой сопряженной кинематической алгебры ${}_r\mathbb{T}^*$

$$ d_2 d_1\, {}_r\mathbf{t}^* = d_1\, {}_r\mathbf{t}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{t}^* . \tag{66} $$

Запишем это уравнение через векторы слагаемых пространств ${}_r\mathbb{X}^*$ и ${}_r\mathbb{L}^*$. Для этого подставим в эти уравнения

$$ d\, {}_r\mathbf{t}^* = \frac{1}{L_0}\cdot d\, {}_r\mathbf{x}^* + d\, {}_r\mathbf{l}^*. $$

Получим

$$ \begin{aligned} & d_2\left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\, {}_r\mathbf{x}^* + d_1\, {}_r\mathbf{l}^*\right) = \\ & = \left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\, {}_r\mathbf{x}^* + d_1\, {}_r\mathbf{l}^*\right) \circ \left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_2\, {}_r\mathbf{x}^* + d_2\, {}_r\mathbf{l}^*\right) \end{aligned} $$

или[14]

$$ \begin{aligned} & d_2 d_1\, {}_r\mathbf{x}^* = \tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\, {}_r\mathbf{x}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{x}^* + d_1\, {}_r\mathbf{l}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{x}^* , \\ & d_2 d_1\, {}_r\mathbf{l}^* = d_1\, {}_r\mathbf{l}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{l}^* . \end{aligned} \tag{67} $$

Запишем полученные уравнения через координаты векторов ${}_r\mathbf{x}^*$ и ${}_r\mathbf{l}^*$. Для этого подставим в соотношение (67) выражения дифференциалов векторов через базисные векторы

$$ d\, {}_r\mathbf{x}^* = d\, {}_r x_I \cdot {}_r\mathbf{E}^I \quad \text{и} \quad d\, {}_r\mathbf{l}^* = d\, {}_r {l^*}^K{}_I \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_K . $$

Получим

$$ \begin{aligned} & d_2 d_1\, {}_r x_I \cdot {}_r\mathbf{E}^I = \tfrac{1}{L_0} d_1\, {}_r x_I \cdot d_2\, {}_r x_K \cdot ({}_r\mathbf{E}^I \circ {}_r\mathbf{E}^K) + \\ & + d_1\, {}_r {l^*}^K{}_L \cdot d_2\, {}_r x_I \cdot ({}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I) , \\ & d_2 d_1\, {}_r {l^*}^K{}_I \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_K = d_1\, {}_r {l^*}^K{}_L \cdot d_2\, {}_r {l^*}^M{}_I \cdot ({}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M) . \end{aligned} $$

Далее воспользуемся законом умножения базисных векторов в ${}_r\mathbb{T}^*$ (19)

$$ \begin{aligned} {}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{K}^L{}_M , \\ {}_r\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{E}^I &= \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{E}^L , \\ {}_r\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{K}^I{}_M &= 0 , \\ {}_r\mathbf{E}^I \circ {}_r\mathbf{E}^K &= {}_r C^{KI}{}_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L . \end{aligned} $$

В результате получим уравнения структуры для координат векторов правой сопряженной кинематической алгебры

$$ \begin{aligned} d_2 d_1\, {}_r x_I &= d_2\, {}_r x_L \cdot d_1\, {}_r {l^*}^L{}_I + \tfrac{1}{L_0} d_2\, {}_r x_K \cdot d_1\, {}_r x_L \cdot {}_r C^{KL}{}_I , \\ d_2 d_1\, {}_r {l^*}^K{}_I &= d_2\, {}_r {l^*}^K{}_L \cdot d_1\, {}_r {l^*}^L{}_I . \end{aligned} \tag{68} $$

8.2. Левая сопряженная кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}^* = {}_l\mathbb{X}^* + {}_l\mathbb{L}^*$

Векторы в этой алгебре имеют вид

$$ {}_l\mathbf{t}^* = \frac{1}{L_0}\cdot {}_l\mathbf{x}^* + {}_l\mathbf{l}^* \in {}_l\mathbb{T}^* = {}_l\mathbb{X}^* + {}_l\mathbb{L}^*, $$

Умножение векторов в левой сопряженной кинематической алгебре записывается следующим образом:

$$ {}_l\mathbf{t}^* = {}_l\mathbf{t}_2^* \circ {}_l\mathbf{t}_1^* . $$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1\, {}_l\mathbf{t}^*$. Выполняя для него выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны в предыдущем разделе, получим уравнение структуры левой сопряженной кинематической алгебры ${}_l\mathbb{T}^*$

$$ d_2 d_1\, {}_l\mathbf{t}^* = d_2\, {}_l\mathbf{t}^* \circ d_1\, {}_l\mathbf{t}^* . \tag{69} $$

Запишем это уравнение через векторы слагаемых пространств ${}_l\mathbb{X}^*$ и ${}_l\mathbb{L}^*$. Для этого подставим в эти уравнения

$$ d\, {}_l\mathbf{t}^* = \frac{1}{L_0}\cdot d\, {}_l\mathbf{x}^* + d\, {}_l\mathbf{l}^*. $$

Получим

$$ \begin{aligned} & d_2\left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\, {}_l\mathbf{x}^* + d_1\, {}_l\mathbf{l}^*\right) = \\ & = \left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_2\, {}_l\mathbf{x}^* + d_2\, {}_l\mathbf{l}^*\right) \circ \left(\tfrac{1}{L_0}\cdot d_1\, {}_l\mathbf{x}^* + d_1\, {}_l\mathbf{l}^*\right) \end{aligned} $$

или[15]

$$ \begin{aligned} & d_2 d_1\, {}_l\mathbf{x}^* = \tfrac{1}{L_0}\cdot d_2\, {}_l\mathbf{x}^* \circ d_1\, {}_l\mathbf{x}^* + d_2\, {}_r\mathbf{x}^* \circ d_1\, {}_r\mathbf{l}^* , \\ & d_2 d_1\, {}_l\mathbf{l}^* = d_2\, {}_l\mathbf{l}^* \circ d_1\, {}_l\mathbf{l}^* . \end{aligned} \tag{70} $$

Запишем полученные уравнения через координаты векторов ${}_l\mathbf{x}^*$ и ${}_l\mathbf{l}^*$. Для этого подставим в (70) выражения дифференциалов векторов через базисные векторы

$$ d\, {}_l\mathbf{x}^* = d\, {}_l x_I \cdot {}_l\mathbf{E}^I \quad \text{и} \quad d\, {}_l\mathbf{l}^* = d\, {}_l {l^*}^K{}_I \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K . $$

---

[14] Здесь учтено, что $d_1\, {}_r\mathbf{x}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{l}^* = 0$.

[15] Здесь учтено, что $d_2\, {}_l\mathbf{l}^* \circ d_1\, {}_l\mathbf{x}^* = 0$.

Получим

$$d_2 d_1\,{}_l x_I \cdot {}_l\mathbf{E}^I = \frac{1}{L_0} d_2\,{}_l x_I \cdot d_1\,{}_l x_K \cdot ({}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K) + \\ + d_2\,{}_l x_L \cdot d_1\,{}_l l^{*M}{}_I \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M)\,,$$
$$d_2 d_1\,{}_l l^{*K}{}_I \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K = d_2\,{}_l l^{*K}{}_L \cdot d_1\,{}_l l^{*M}{}_I \cdot ({}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M)\,.$$

Далее воспользуемся законом умножения базисных векторов в ${}_l\mathbb{T}^*$ (16)

$$\begin{aligned} {}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,, \\ {}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I &= 0\,, \\ {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{E}^I\,, \\ {}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K &= {}_l C^{IK}{}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L\,. \end{aligned}$$

В результате получим уравнения структуры для координат векторов левой сопряженной кинематической алгебры

$$\begin{aligned} d_2 d_1\,{}_l x_I &= d_2\,{}_l x_L \cdot d_1\,{}_l l^{*L}{}_I + \frac{1}{L_0} d_2\,{}_l x_I \cdot d_1\,{}_l x_K \cdot {}_l C^{IK}{}_I\,, \\ d_2 d_1\,{}_l l^{*K}{}_I &= d_2\,{}_l l^{*K}{}_L \cdot d_1\,{}_l l^{*L}{}_I\,. \end{aligned} \tag{71}$$

9. Квантовые уравнения сопряженной кинематической алгебры в дифференциалах

9.1. *Правая сопряженная кинематическая алгебра* ${}_r\mathbb{T}^* = {}_r\mathbb{X}^* + {}_r\mathbb{L}^*$

В уравнениях (67) введем обозначение $d_1\,{}_r\mathbf{x}^* = {}_r\chi^*$ и соответственно в уравнениях (68) введем обозначение $d_1\,{}_r x_I = {}_r\chi_I$ и назовем функцию ${}_r\chi^*$ с координатами ${}_r\chi^*_I$ *волновой* функцией сопряженного пространства времени ${}_r\mathbb{X}^*$. Кроме того, в уравнениях (67) введем обозначение $d_1\,{}_r\mathbf{l}^* = {}_r\lambda^*$ и соответственно в уравнениях (68) введем обозначение $d_1\,{}_r l^{*I}{}_K = {}_r\lambda^{*I}{}_K$ и назовем функцию ${}_r\lambda^*$ с координатами ${}_r\lambda^{*I}{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_r\mathbb{L}^*$. Дифференциал d_2 обозначим d. Уравнения структуры (67), записанные по отношению к волновым функциям

$$\begin{aligned} d\,{}_r\chi^* &= \frac{1}{L_0} \cdot {}_r\chi^* \circ d\,{}_r\mathbf{x}^* + {}_r\lambda^* \circ d\,{}_r\mathbf{x}^*\,, \\ d\,{}_r\lambda^* &= {}_r\lambda^* \circ d\,{}_r\mathbf{l}^*\,, \end{aligned} \tag{72}$$

и уравнения структуры (68), записанные по отношению к координатам волновых функций

$$\begin{aligned} d\,{}_r\chi^*_I &= \frac{1}{L_0} \cdot d\,{}_r x_K \cdot {}_r\chi_L \cdot {}_r C^{KL}{}_I + d\,{}_r x_L \cdot {}_r\lambda^{*L}{}_I\,, \\ d\lambda^{*K}{}_I &= d\,{}_r l^{*K}{}_L \cdot {}_r\lambda^{*L}{}_I\,, \end{aligned} \tag{73}$$

назовем *квантовыми уравнениями правой сопряженной кинематической алгебры в дифференциалах*. Коэффициент L_0 имеет размерность длины и аналогичен постоянной Планка $\hbar$ в уравнениях квантовой механики.

9.2. *Левая сопряженная кинематическая алгебра* ${}_l\mathbb{T}^* = {}_l\mathbb{X}^* + {}_l\mathbb{L}^*$

В уравнениях (70) введем обозначение $d_1\,{}_l\mathbf{x}^* = {}_l\chi^*$ и соответственно в уравнениях (71) введем обозначение $d_1\,{}_l x_I = {}_l\chi_I$ и назовем функцию ${}_l\chi^*$ с координатами ${}_l\chi^*_I$ *волновой* функцией сопряженного пространства времени ${}_l\mathbb{X}^*$. Кроме того, в уравнениях (70) введем обозначение $d_1\,{}_l\mathbf{l}^* = {}_l\lambda^*$ и соответственно в уравнениях (71) введем обозначение $d_1\,{}_l l^{*I}{}_K = {}_l\lambda^{*I}{}_K$ и назовем функцию ${}_l\lambda^*$ с координатами ${}_l\lambda^{*I}{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_l\mathbb{L}^*$. Дифференциал d_2 обозначим d. Уравнения структуры (70), записанные по отношению к волновым функциям

$$\begin{aligned} d\,{}_l\chi^* &= \frac{1}{L_0} \cdot d\,{}_l\mathbf{x}^* \circ {}_l\chi^* + d\,{}_l\mathbf{x}^* \circ {}_l\lambda^*\,, \\ d\,{}_l\lambda^* &= d\,{}_l\mathbf{l}^* \circ {}_l\lambda^*\,, \end{aligned} \tag{74}$$

и уравнения структуры (71), записанные по отношению к координатам волновых функций

$$\begin{aligned} d\,{}_l\chi^*_I &= \frac{1}{L_0} \cdot d\,{}_l x_I \cdot {}_l\chi_K \cdot {}_l C^{IK}{}_I + d\,{}_l x_L \cdot {}_l\lambda^{*L}{}_I\,, \\ d\lambda^{*K}{}_I &= d\,{}_l l^{*K}{}_L \cdot {}_l\lambda^{*L}{}_I\,, \end{aligned} \tag{75}$$

назовем *квантовыми уравнениями левой сопряженной кинематической алгебры в дифференциалах*.

10. Уравнения структуры общей кинематической алгебры $(\mathbb{T} + \mathbb{T}^*) = (\mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{X}^* + \mathbb{L}^*)$

Общая кинематическая алгебра $(\mathbb{T} + \mathbb{T}^*)$ существует в двух модификациях: лево-правая общая кинематическая алгебра $({}_l\mathbb{T} + {}_r\mathbb{T}^*)$ и право-левая общая кинематическая алгебра $({}_r\mathbb{T} + {}_l\mathbb{T}^*)$. Здесь мы ограничимся рассмотрением уравнений структуры право-левой общей кинематической алгебры $({}_r\mathbb{T} + {}_l\mathbb{T}^*)$.

10.1. *Право-левая общая кинематическая алгебра* $({}_r\mathbb{T} + {}_l\mathbb{T}^*)$

Векторы в этой алгебре имеют вид[16]

$${}_r\mathbf{t} = {}_r\mathbf{x} + {}_r\mathbf{l} + {}_l\mathbf{x}^* + {}_l\mathbf{l}^* \in \mathbb{T} = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L} + {}_l\mathbb{X}^* + {}_l\mathbb{L}^*\,.$$

Умножение векторов в рассматриваемой алгебре записывается следующим образом:

$${}_r\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 \circ \mathbf{t}_2\,.$$

Введем второй дифференциал $d_2 d_1\,{}_r\mathbf{t}$. Выполняя для него выкладки, аналогичные тем, которые были

[16] Здесь для удобства векторы ${}_r\mathbf{x}$ и ${}_l\mathbf{x}^*$ приняты безразмерными.

проделаны в предыдущих разделах, получим уравнение структуры для рассматриваемой алгебры

$$d_2 d_1\, {}_r\mathbf{t} = d_1\, {}_r\mathbf{t} \circ d_2\, {}_r\mathbf{t}\,. \tag{76}$$

После подстановки $d\, {}_r\mathbf{t}$ получим

$$\begin{aligned}
&d_2(d_1\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{l} + d_1\, {}_l\mathbf{x}^* + d_1\, {}_l\mathbf{l}^*) = \\
&= (d_1\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{l} + d_1\, {}_l\mathbf{x}^* + d_1\, {}_l\mathbf{l}^*)\circ \\
&\circ(d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_2\, {}_r\mathbf{l} + d_2\, {}_l\mathbf{x}^* + d_2\, {}_l\mathbf{l}^*)\,,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1\, {}_r\mathbf{x} + d_2 d_1\, {}_r\mathbf{l} + d_2 d_1\, {}_l\mathbf{x}^* + d_2 d_1\, {}_l\mathbf{l}^* = \\
&= d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} + \\
&+ d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ d_2\, {}_l\mathbf{x}^* + d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ d_2\, {}_l\mathbf{l}^* + \\
&+ d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} + \\
&+ d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_l\mathbf{l}^* + d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_l\mathbf{l}^* + \\
&+ d_1\, {}_l\mathbf{x}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_l\mathbf{x}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} + \\
&+ d_1\, {}_l\mathbf{x}^* \circ d_2\, {}_l\mathbf{x}^* + d_1\, {}_l\mathbf{x}^* \circ d_2\, {}_l\mathbf{l}^* + \\
&+ d_1\, {}_l\mathbf{l}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_l\mathbf{l}^* \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} + \\
&+ d_1\, {}_l\mathbf{l}^* \circ d_2\, {}_l\mathbf{x}^* + d_1\, {}_l\mathbf{l}^* \circ d_2\, {}_l\mathbf{l}^*\,.
\end{aligned}$$

Вычислим уравнения структуры для координат векторов. Для этого подставим в предыдущее соотношение выражения дифференциалов через базисные векторы

$$\begin{aligned}
&d\, {}_r\mathbf{x} = {}_r\mathbf{e}_I \cdot d\, {}_r x^I\,, \quad d\, {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^K{}_I \cdot d\, {}_r l^I{}_K\,, \\
&d\, {}_l\mathbf{x}^* = d\, {}_l x_I \cdot {}_l\mathbf{E}^I\,, \quad d\, {}_l\mathbf{l}^* = d\, {}_l l^{*I}{}_K \cdot {}_l\mathbf{K}^K{}_I\,.
\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1\, {}_r x^I \cdot {}_r\mathbf{e}_I + d_2 d_1\, {}_r l^M{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M + \\
&+ d_2 d_1\, {}_l l^{*K}{}_I \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K + d_2 d_1\, {}_l x_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L = \\
&= d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_r x^M \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_l x_I \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I) + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_r x^M \cdot ({}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot ({}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot ({}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_l x_I \cdot ({}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I) + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_r x^M \cdot ({}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M) + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot ({}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot ({}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M) + \\
&+ d_l\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l x_I \cdot ({}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I) + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_r x^M \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{e}_M) + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_l x_I \cdot ({}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{E}^I)\,.
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся правилами умножения базисных векторов в рассматриваемой алгебре (25):

$$\begin{aligned}
&{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I = {}_l\mathbf{K}^I{}_K + \delta^I{}_K\,, \\
&{}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_r C^L{}_{IK} + {}_r\mathbf{I}^M{}_L \cdot {}_r C^L{}_{MIK}\,, \\
&{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = g_{KM} \cdot {}_l\mathbf{E}^L\,, \\
&{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{e}_K\,, \\
&{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K\,, \\
&{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M\,, \\
&{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M = {}_l\mathbf{E}^L \cdot g_{KM}\,, \\
&{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = g_{KM} \cdot g^{LI}\,, \\
&{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = g^{LI} \cdot g_{KM}\,, \\
&{}_l\mathbf{K}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I = g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_K\,, \\
&{}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{K}^I{}_M = \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{E}^I\,, \\
&{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,, \\
&{}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_M\,, \\
&{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{E}^I = {}_l\mathbf{E}^L \cdot \delta^I{}_K\,, \\
&{}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K = {}_l C^{IK}{}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L + {}_l C^{IKM}{}_L \cdot {}_l\mathbf{K}^L{}_M\,, \\
&{}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{e}_M = \delta^L{}_M + {}_r\mathbf{I}^L{}_M\,.
\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1\, {}_r x^I \cdot {}_r\mathbf{e}_I + \\
&+ d_2 d_1\, {}_r l^M{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M + \\
&+ d_2 d_1\, {}_l l^{*K}{}_I \cdot {}_l\mathbf{K}^I{}_K + \\
&+ d_2 d_1\, {}_l x_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L = \\
&d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_r x^M \cdot {}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_r C^I{}_{KM} + \\
&+ d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_r x^M \cdot {}_r\mathbf{I}^P{}_L \cdot {}_r C^L{}_{PKM} \cdot + \\
&+ d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_r l^M{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M + \\
&+ d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_r l^{*M}{}_I \cdot g_{KM} \cdot {}_l\mathbf{E}^I + \\
&+ d_1\, {}_r x^K \cdot d_2\, {}_l x_I \cdot ({}_l\mathbf{K}^I{}_K + \delta^I{}_K) + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_r x^M \cdot g_{KM} \cdot {}_l\mathbf{E}^L + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_K \cdot (\delta^L{}_M + {}_r\mathbf{I}^L{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*M}{}_I \cdot g_{KM} \cdot g^{LI} + \\
&+ d_1\, {}_r l^K{}_L \cdot d_2\, {}_r x_K \cdot {}_l\mathbf{E}^L + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_r x^L \cdot {}_r\mathbf{e}_K + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_r l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot g_{KM} + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l l^{*L}{}_I \cdot (\delta^I{}_K + {}_l\mathbf{K}^I{}_K) + \\
&+ d_1\, {}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\, {}_l x_I \cdot g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_K + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_r x^M \cdot (\delta^L{}_M + {}_r\mathbf{I}^L{}_M) + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_l l^M{}_I \cdot g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_M + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_r l^{*L}{}_I \cdot {}_l\mathbf{E}^I + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_l x_I \cdot {}_l C^{LI}{}_K \cdot {}_l\mathbf{E}^K + \\
&+ d_1\, {}_l x_L \cdot d_2\, {}_l x_I \cdot {}_l C^{LIM}{}_K \cdot {}_l\mathbf{K}^K{}_M\,.
\end{aligned}$$

После разделения слагаемых по базисным векторам, получим уравнения структуры по отношению к дифференциалам координат векторов

$$d_2 d_1\,{}_r x^I = d_2\,{}_r l^I{}_K \cdot d_1\,{}_r x^K + \\ + d_1\,{}_l l^{*I}{}_L \cdot d_2\,{}_r x^L + {}_r C^I{}_{KL} \cdot d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r x^L + \\ + d_2\,{}_r l^I{}_M \cdot d_1\,{}_l x_L \cdot g^{LM} + d_2\,{}_l x_K \cdot d_1\,{}_l l^{*I}{}_L \cdot g^{LK}\,,$$

$$d_2 d_1\,{}_r l^M{}_L = d_2\,{}_r l^M{}_K \cdot d_1\,{}_r l^K{}_L + d_2\,{}_r x^M \cdot d_1\,{}_l x_L + \\ + {}_r C^M{}_{LIK} \cdot d_1\,{}_r x^I \cdot d_2\,{}_r x^K\,,$$

$$d_2 d_1\,{}_l l^{*K}{}_I = d_1\,{}_l l^{*K}{}_L \cdot d_2\,{}_l l^{*L}{}_I + d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_l x_I + \\ + d_1\,{}_l x_L \cdot d_2\,{}_l x_M \cdot {}_l C^{LMK}{}_I\,,$$

$$d_2 d_1\,{}_l x_L = d_2\,{}_l x_K \cdot d_1\,{}_r l^K{}_L + \\ + d_1\,{}_l x_K \cdot d_2\,{}_l l^{*K}{}_L + d_1\,{}_l x_K \cdot d_2\,{}_l x_I \cdot {}_l C^{KI}{}_L + \\ + g_{KM} \cdot d_1\,{}_r x^M \cdot d_2\,{}_l l^{*K}{}_L + g_{KM} \cdot d_1\,{}_r l^M{}_L \cdot d_2\,{}_r x^K\,,$$

$$d_2\,{}_r x^K \cdot d_1\,{}_l x_K + d_2\,{}_l x_K \cdot d_1\,{}_r x^K + d_2\,{}_r l^K{}_L \cdot d_1\,{}_r l^L{}_K + \\ + d_2\,{}_l l^{*K}{}_L \cdot d_1\,{}_l l^{*L}{}_K + g^{LI} \cdot g_{KM} \cdot d_2\,{}_r l^K{}_L \cdot d_1\,{}_l l^{*M}{}_I + \\ + g^{LI} \cdot g_{KM} \cdot d_2\,{}_l l^{*K}{}_L \cdot d_1\,{}_r l^M{}_I = 0\,. \tag{77}$$

Последнее соотношение представляет собой алгебраическое уравнение. Оно является следствием отображения произведений базисных векторов на множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

11. Квантовые уравнения право-левой общей кинематической алгебры в дифференциалах

В уравнениях (77) ведем обозначение $d_1\,{}_r x^I = {}_r\chi^I$ и назовем функцию ${}_r\chi^I$ *волновой* функцией пространства-времени ${}_r\mathbb{X}$. Кроме того, введем обозначение $d_1\,{}_r l^I{}_K = {}_r\lambda^I{}_K$ и назовем функцию ${}_r\lambda^I{}_K$ *волновой* функцией пространства ${}_r\mathbb{L}$. Кроме того, введем обозначение $d_1 x_I = {}_l\chi_I$ и назовем функцию ${}_l\chi_I$ *волновой* функцией сопряженного пространства-времени ${}_l\mathbb{X}^*$. Кроме того, введем обозначение $d_1\,{}_l l^{*I}{}_K = {}_l\lambda^{*I}{}_K$ и назовем функцию ${}_l\lambda^{*I}{}_K$ *волновой* функцией сопряженного пространства ${}_l\mathbb{L}^*$. Дифференциал d_2 обозначим d. Уравнения структуры, записанные по отношению к волновым функциям

$$d\,{}_r\chi^I = d\,{}_r l^I{}_K \cdot {}_r\chi^K + {}_l\lambda^{*I}{}_L \cdot d\,{}_r x^L + {}_r C^I{}_{KL} \cdot {}_r\chi^K \cdot d\,{}_r x^L + \\ + d\,{}_r l^I{}_M \cdot {}_l\chi^*_L \cdot g^{LM} + d\,{}_l x_K \cdot {}_l\lambda^{*I}{}_L \cdot g^{LK}\,,$$

$$d\,{}_r\lambda^M{}_L = d\,{}_r l^M{}_K \cdot {}_r\lambda^K{}_L + d\,{}_r x^M \cdot {}_l\chi^*_L + \\ + {}_r C^M{}_{LIK} \cdot {}_r\chi^I \cdot d\,{}_r x^K\,,$$

$$d\lambda^{*K}{}_I = {}_l\lambda^{*K}{}_L \cdot d\,{}_l l^{*L}{}_I + {}_r\chi^K \cdot d\,{}_l x_I + \\ + {}_l\chi_L \cdot d\,{}_l x_M \cdot {}_l C^{LMK}{}_I\,,$$

$$d\,{}_l\chi_L = d\,{}_l x_K \cdot {}_r\lambda^K{}_L + {}_l\chi_K \cdot d\,{}_l l^{*K}{}_L + {}_l\chi_K \cdot d\,{}_l x_I \cdot {}_l C^{KI}{}_L + \\ + g_{KM} \cdot {}_r\chi^M \cdot d\,{}_l l^{*K}{}_L + g_{KM} \cdot {}_r\lambda^M{}_L \cdot d\,{}_r x^K\,,$$

$$d\,{}_r x^K \cdot {}_l\chi_K + d\,{}_l x_K \cdot {}_r\chi^K + d\,{}_r l^K{}_L \cdot {}_r\lambda^L{}_K + d\,{}_l l^{*K}{}_L \cdot {}_l\lambda^{*L}{}_K + \\ g^{LI} \cdot g_{KM} \cdot d\,{}_r l^K{}_L \cdot {}_l\lambda^{*M}{}_I + g^{LI} \cdot g_{KM} \cdot d\,{}_l l^{*K}{}_L \cdot {}_r\lambda^M{}_I = 0,$$

являются *квантовыми уравнениями право-левой общей кинематической алгебры в дифференциалах*.

V. ОБОБЩЕНИЕ ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ

Умножение векторов допускает обобщение, основанное на общем подходе к универсальному произведению, которое должно содержать в качестве слагаемых тензорную, векторную и скалярную части. Например, для

$${}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M$$

из соотношения (25) имеем

$${}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = {}_l\mathbf{E}^L \circ {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \\ = {}_l\mathbf{E}^L \otimes {}_l\mathbf{E}^I \otimes {}_r\mathbf{e}_M + ({}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_l\mathbf{E}^I) \otimes {}_r\mathbf{e}_M = \\ = {}_r\mathbf{J}^{LI}{}_M + g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_M\,.$$

Указанное произведение имеет тот недостаток, что не содержит скалярной части. После необходимого обощения указанное произведение приобретает вид

$${}_l\mathbf{E}^L \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M = {}_r\mathbf{J}^{LI}{}_M + g^{LI} \cdot {}_r\mathbf{e}_M + {}_l C^{LI}{}_M\,.$$

Здесь

$${}_l C^{LI}{}_M = {}_l\mathbf{E}^L \cdot {}_r\mathbf{I}^I{}_M$$

– *скалярное* произведение рассматриваемых базисных векторов. Обобщение таблицы умножения базисных векторов, связанное с учетом скалярных произведений, понадобится в Главе 6.1 при конструировании скалярного действия. Далее приведем необходимые скалярные произведения базисных векторов для двух случаев:

1) право-левой общей алгебры;
2) лево-правой общей алгебры.

1. Право-левая общая алгебра

Скалярные произведения базисных векторов право-левой общей алгебры необходимы при конструировании скалярного действия относительно *правого* вектора действия физического объекта. В этом случае имеем

1) для скалярного действия фундаментального объекта

$${}_l\mathbf{E}^M \cdot {}_r\mathbf{e}_I = \delta^M{}_I\,, \tag{78}$$

$${}_l\mathbf{K}^M{}_N \cdot {}_r\mathbf{e}_I = {}_r C^M{}_{NI}\,, \tag{79}$$

$${}_l\mathbf{L}^M{}_{NP} \cdot {}_r\mathbf{e}_I = {}_r C^M{}_{NPI}\,; \tag{80}$$

2) для скалярного действия промежуточного объекта

$$ {}_l\mathbf{E}^M \cdot {}_r\mathbf{I}^K{}_I = {}_lC^{MK}{}_I \,, \tag{81} $$
$$ {}_l\mathbf{K}^M{}_N \cdot {}_r\mathbf{I}^K{}_I = g^{MK} \cdot g_{NI} \,, \tag{82} $$
$$ {}_l\mathbf{L}^M{}_{NP} \cdot {}_r\mathbf{I}^K{}_I = \delta^K{}_P \cdot {}_rC^M{}_{NI} \,; \tag{83} $$

3) для скалярного действия второго промежуточного объекта

$$ {}_l\mathbf{E}^M \cdot {}_r\mathbf{J}^{LK}{}_I = {}_lC^{MLK}{}_I \,, \tag{84} $$
$$ {}_l\mathbf{K}^M{}_N \cdot {}_r\mathbf{J}^{LK}{}_I = \delta^L{}_N \cdot {}_lC^{MK}{}_I \,, \tag{85} $$
$$ {}_l\mathbf{L}^M{}_{NP} \cdot {}_r\mathbf{J}^{LK}{}_I = \delta^L{}_P \cdot g^{MK} \cdot g_{NI} \,; \tag{86} $$

4) для скалярного действия фундаментального антиобъекта

$$ {}_l\mathbf{e}_M \cdot {}_r\mathbf{E}^I = \delta^I{}_M \,, \tag{87} $$
$$ {}_l\mathbf{I}^N{}_M \cdot {}_r\mathbf{E}^I = {}_rC^{IN}{}_M \,, \tag{88} $$
$$ {}_l\mathbf{J}^{PN}{}_M \cdot {}_r\mathbf{E}^I = {}_rC^{IPN}{}_M \,; \tag{89} $$

5) для скалярного действия промежуточного антиобъекта

$$ {}_l\mathbf{e}_M \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_K = {}_lC^I{}_{KM} \,, \tag{90} $$
$$ {}_l\mathbf{I}^N{}_M \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_K = g^{NI} \cdot g_{MK} \,, \tag{91} $$
$$ {}_l\mathbf{J}^{PN}{}_M \cdot {}_r\mathbf{K}^I{}_K = \delta^P{}_K \cdot {}_rC^{IN}{}_M \,; \tag{92} $$

6) для скалярного действия второго промежуточного антиобъекта

$$ {}_l\mathbf{e}_M \cdot {}_r\mathbf{L}^I{}_{KL} = {}_lC^I{}_{KLM} \,, \tag{93} $$
$$ {}_l\mathbf{I}^N{}_M \cdot {}_r\mathbf{L}^I{}_{KL} = \delta^N{}_L \cdot {}_lC^I{}_{KM} \,, \tag{94} $$
$$ {}_l\mathbf{J}^{PN}{}_M \cdot {}_r\mathbf{L}^I{}_{KL} = \delta^P{}_L \cdot g^{NI} \cdot g_{MK} \,. \tag{95} $$

2. Лево-правая общая алгебра

Скалярные произведения базисных векторов лево-правой общей алгебры необходимы при конструировании скалярного действия относительно *левого* вектора действия физического объекта. В этом случае имеем

1) для скалярного действия фундаментального объекта

$$ {}_l\mathbf{e}_I \cdot {}_r\mathbf{E}^M = \delta^M{}_I \,, \tag{96} $$
$$ {}_l\mathbf{e}_I \cdot {}_r\mathbf{K}^M{}_N = {}_lC^M{}_{NI} \,, \tag{97} $$
$$ {}_l\mathbf{e}_I \cdot {}_r\mathbf{L}^M{}_{NP} = {}_lC^M{}_{NPI} \,; \tag{98} $$

2) для скалярного действия промежуточного объекта

$$ {}_l\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_r\mathbf{E}^M = {}_rC^{MK}{}_I \,, \tag{99} $$
$$ {}_l\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_r\mathbf{K}^M{}_N = g^{KM} \cdot g_{IN} \,, \tag{100} $$
$$ {}_l\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_r\mathbf{L}^M{}_{NP} = \delta^K{}_P \cdot {}_lC^M{}_{NI} \,; \tag{101} $$

3) для скалярного действия второго промежуточного объекта

$$ {}_l\mathbf{J}^{LK}{}_I \cdot {}_r\mathbf{E}^M = {}_rC^{MLK}{}_I \,, \tag{102} $$
$$ {}_l\mathbf{J}^{LK}{}_I \cdot {}_r\mathbf{K}^M{}_N = \delta^L{}_N \cdot {}_rC^{MK}{}_I \,, \tag{103} $$
$$ {}_l\mathbf{J}^{LK}{}_I \cdot {}_r\mathbf{L}^M{}_{NP} = \delta^L{}_P \cdot g^{KM} \cdot g_{IN} \,; \tag{104} $$

4) для скалярного действия фундаментального антиобъекта

$$ {}_l\mathbf{E}^I \cdot {}_r\mathbf{e}_M = \delta^I{}_M \,, \tag{105} $$
$$ {}_l\mathbf{E}^I \cdot {}_r\mathbf{I}^N{}_M = {}_lC^{IN}{}_M \,, \tag{106} $$
$$ {}_l\mathbf{E}^I \cdot {}_r\mathbf{J}^{PN}{}_M = {}_lC^{IPN}{}_M \,; \tag{107} $$

5) для скалярного действия промежуточного антиобъекта

$$ {}_l\mathbf{K}^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M = {}_rC^I{}_{KM} \,, \tag{108} $$
$$ {}_l\mathbf{K}^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^N{}_M = g^{IN} \cdot g_{KM} \,, \tag{109} $$
$$ {}_l\mathbf{K}^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{J}^{PN}{}_M = \delta^P{}_K \cdot {}_lC^{IN}{}_M \,; \tag{110} $$

6) для скалярного действия второго промежуточного антиобъекта

$$ {}_l\mathbf{L}^I{}_{KL} \cdot {}_r\mathbf{e}_M = {}_rC^I{}_{KLM} \,, \tag{111} $$
$$ {}_l\mathbf{L}^I{}_{KL} \cdot {}_r\mathbf{I}^N{}_M = {}_rC^I{}_{KM} \cdot \delta^N{}_L \,, \tag{112} $$
$$ {}_l\mathbf{L}^I{}_{KL} \cdot {}_r\mathbf{J}^{PN}{}_M = \delta^P{}_L \cdot g^{IN} \cdot g_{KM} \,. \tag{113} $$

VI. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Алгебра пространства-времени $\mathbb{X}$ и алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$ объединяются в алгебру, названную *кинематической*. Кинематическая алгебра существует в двух модификациях: правой и левой.

- Алгебра сопряженного пространства-времени $\mathbb{X}^*$ и сопряженная алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}^*$ объединяются в алгебру, названную *сопряженной кинематической*. Сопряженная кинематическая алгебра существует в двух модификациях: правой и левой.

- $\circ$-умножение векторов во введенных алгебрах отождествляется с взаимодействием физических объектов, поставленных в соответствие указанным векторам.

- Наряду с фундаментальными физическими объектами, промежуточными физическими объектами и их антиобъектами необходимо постулировать *скалярные* физические объекты.

- Так как каждому фундаментальному объекту соответствует свой тип пространства-времени $\mathbb{X}$, то наряду с преобразованиями, не выводящими за рамки типа пространства-времени, необходимо ввести преобразования, изменяющие тип пространства-времени. Такие преобразования сопутствуют взаимодействию элементарных частиц.

- Так как фундаментальному объекту соответствует фундаментальный антиобъект, которому сопутствует сопряженное пространство-время $\mathbb{X}^*$, то в общую кинематическую алгебру необходимо включить сопряженное пространство-время $\mathbb{X}^*$.

- Вышеуказанные преобразования объединяются в *общую кинематическую алгебру*, которая является обобщением классической группы преобразований – группы Пуанкаре.

Глава 1.7 Вторая кинематическая алгебра. Кинематическое поле

I. ВТОРАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА.

1. Предварительные замечания

Фундаментальные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с пространством-временем $\mathbb{X}$. В соответствии с Главой 1.1. Раздел 3 *движение* пространства-времени (тел и процессов) определено, если определено *преобразование* $f\colon \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ ($\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$). Таким образом, движение как физическое явление отождествляется с преобразованием $f\colon \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ ($\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$) как элементом математики. Пространство-время $\mathbb{X}$, по отношению к которому определяется результирующее пространство-время $\mathbb{X}'$, называется *системой отсчета*. В Главе 1.5. преобразования общего вида $\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$ было сведено к простейшему частному случаю – *линейному* преобразованию, которое было обозначено $\mathbb{X}' = l(\mathbb{X})$. Здесь сделаем шаг по усложнению преобразования $\mathbb{X}' = l(\mathbb{X})$.

Однако прежде приведем поясняющий пример. Пусть функция

$$x = f(t)$$

описывает движение *общего вида* точки вдоль прямой. В простейшем случае движение описывается *линейной* функцией

$$x = v\cdot t\,.$$

Это прямолинейное равномерное движение со скоростью v. К более сложному движению можно перейти, положив, что скорость v является *линейной* функцией времени

$$v = a\cdot t\,.$$

Это прямолинейное равноускоренное движение с ускорением a.

Так и в нашем случае. Мы рассмотрели *линейное* преобразование $\mathbb{X}' = l(\mathbb{X})$. Теперь усложним преобразование $\mathbb{X}' = l(\mathbb{X})$, полагая, что имеет место линейное преобразование $a\colon \mathbb{X}\to\mathbb{L}$ ($\mathbb{L} = a(\mathbb{X})$). Это преобразование будем называть *вторым линейным*.

2. Векторное пространство вторых линейных преобразований

Введем оператор, который ставит в соответствие вектору $\mathbf{x}\in\mathbb{X}$ вектор $\mathbf{l}\in\mathbb{L}$. Обозначим такой оператор $\mathbf{a}(\ )$ и назовем его *вторым линейным преобразованием*. Таким образом,

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}\,. \tag{1}$$

Оператор $\mathbf{a}(\ )$ осуществляет преобразование $\mathbb{X}\to\mathbb{L}$. Обозначим множество преобразований, осуществляющих преобразование $\mathbb{X}\to\mathbb{L}$, следующим образом: $\mathbb{A}$. Введем на множестве преобразований $\mathbb{A}$ операции сложения $\oplus$

$$\mathbf{a}_1(\ )\oplus\mathbf{a}_2(\ ) = \mathbf{a}(\ )\in\mathbb{A}$$

и умножения на число $\odot$

$$\alpha\odot\mathbf{a}_1(\ ) = \mathbf{a}(\ )\in\mathbb{A}\,.$$

Пусть эти операции также удовлетворяют закону дистрибутивности

$$\alpha\odot[\mathbf{a}_1(\ )\oplus\mathbf{a}_2(\ )] = \alpha\odot\mathbf{a}_1(\ )\oplus\alpha\odot\mathbf{a}_2(\ )\,.$$

В результате множество преобразований $\mathbb{A}$ становится векторным пространством.

Преобразования $\mathbf{a}(\ )$ линейны относительно сложения векторов $\mathbf{x}$ и умножения векторов на число, то есть

$$\mathbf{a}(\alpha_1\cdot\mathbf{x}_1+\alpha_2\cdot\mathbf{x}_2) = \alpha_1\odot\mathbf{a}(\mathbf{x}_1)\oplus\alpha_2\odot\mathbf{a}(\mathbf{x}_2).$$

Эти соотношения являются условиями согласования сложений $\oplus$ и $+$ и умножений $\odot$ и $\cdot$. Эти условия состоят в том, что после действия оператора

$$\alpha_1\odot\mathbf{a}_1(\ )\oplus\alpha_2\odot\mathbf{a}_2(\ )$$

на вектор $\mathbf{x}$ получим

$$\alpha_1\cdot\mathbf{l}_1+\alpha_2\cdot\mathbf{l}_2\,,$$

то есть $\oplus$-сложение в $\mathbb{A}$ становится $+$-сложением в $\mathbb{L}$, а $\odot$-умножение в в $\mathbb{A}$ становится $\cdot$-умножением в в $\mathbb{L}$.

На векторном пространстве $\mathbb{A}$ введем *базисные преобразования* $\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I(\ )$, чтобы

$$\mathbf{a}(\ ) = \mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I(\ )\cdot l^I{}_{K_1K_2}\,,$$

где $l^I{}_{K_1K_2}$ есть *координаты* преобразования $\mathbf{a}(\ )$, представляющие собой коэффициенты разложения векторов $\mathbf{a}(\mathbf{e}_{K_2})$ по базисным векторам $\mathbf{I}^{\mathbf{K_1}}{}_I$. Линейное преобразование вектора $\mathbf{x} = \mathbf{e}_K\cdot x^K$ должно иметь вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{e}_K\cdot x^K) = \mathbf{I}^{K_1}{}_I\cdot l^I{}_{K_1K_2}\cdot x^{K_2}\,.$$

Таким образом, должно выполняться

$$\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I(\mathbf{e}_K)\cdot l^I{}_{K_1K_2}\cdot x^K = \mathbf{I}^{K_1}{}_I\cdot l^I{}_{K_1K_2}\cdot x^{K_2}\,.$$

Из этого условия найдем правило преобразования базисных векторов $\mathbf{e}_K$ пространства $\mathbb{X}$ с помощью базисных преобразований $\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I(\ )$:

$$\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I(\mathbf{e}_K) = \mathbf{I}^{K_1}{}_I\cdot\delta^{K_2}{}_K\,, \tag{2}$$

где $\delta^I{}_K$ есть символ Кронекера.

Воздействие преобразования $\mathbf{a}(\,)$ на вектор $\mathbf{x}$ можно рассматривать как вид умножения и записывать его в алгебраической, а не в операторной форме. Тогда вместо (1) можно записать

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} \circ \mathbf{x}\,,$$

а закон композиции (2) примет вид $\circ$-умножения

$$\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^{K_1}{}_I \cdot \delta^{K_2}{}_K\,.$$

Векторное пространство $\mathbb{A}$ само по себе не является алгеброй, но вместе с векторами пространства-времени $\mathbb{X}$ и линейными преобразованиями $\mathbb{L}$ оно образует алгебру. Обозначим ее

$$\mathbb{T}_2 = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A}$$

и назовем *второй кинематической* алгеброй.

3. Системообразующий постулат

Постулируем существование физических объектов, которые назовем *вторые промежуточные физические объекты*. Вторые промежуточные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны вторым линейным преобразованиям $\mathbb{A}$. Примером вторых промежуточных физических объектов служат *гипотетические* вторые промежуточные частицы.

4. Вторая кинематическая алгебра

Умножение векторов во второй кинематической алгебре $\mathbb{T}_2$ является некоммутативной операцией. Поэтому указанная алгебра существует в двух модификациях: левая вторая кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}_2$ и правая вторая кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}_2$.

4.1. Левая вторая кинематическая алгебра

Векторное пространство левой второй кинематической алгебры обозначим

$${}_l\mathbb{T}_2 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{A}\,.$$

Векторы в этой алгебре имеют вид[1]

$${}_l\mathbf{r} = {}_l\mathbf{x} + {}_l\mathbf{l} + {}_l\mathbf{a}\,.$$

[1] Здесь для удобства слагаемые вектора приняты безразмерными.

Умножение векторов в левой второй кинематической алгебре записывается следующим образом

$${}_l\mathbf{r} = {}_l\mathbf{r}_2 \circ {}_l\mathbf{r}_1\,.$$

Полную таблицу умножений базисных векторов в левой второй кинематической алгебре запишем, учитывая таблицу умножений базисных векторов в кинематической алгебре ${}_l\mathbb{T}$. Имеем

$$\begin{aligned}
{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M &= {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{MK} + {}_l\mathbf{I}^P{}_L \cdot {}_lC^L{}_{PMK}\,,\\
{}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= 0\,,\\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M\,,\\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^L{}_M\,,\\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_M\,,\\
{}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= 0\,,\\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{J}^{LI}{}_M + {}_l\mathbf{e}_M \cdot \delta^P{}_K \cdot g^{LI}\,,\\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K\,,\\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_l\mathbf{I}^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K + \delta^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Помимо таблицы умножений (3) будем пользоваться ее частным случаем, когда скалярные произведения не рассматриваются. Такая таблица умножений базисных векторов имеет вид

$$\begin{aligned}
{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M &= {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{MK} + {}_l\mathbf{I}^P{}_L \cdot {}_lC^L{}_{PMK}\,,\\
{}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= 0\,,\\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M\,,\\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^L{}_M\,,\\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_M\,,\\
{}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= 0\,,\\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{J}^{LI}{}_M\,,\\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K\,,\\
{}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= 0\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для дальнейшего изложения нам необходимо ввести новый вектор, который обозначим $\mathbf{\Gamma}$ и назовем *связность*. Определим связность следующим соотношением:

$${}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{l} \circ \mathbf{\Gamma}\,.$$

Воспользуемся координатной записью векторов в этом выражении

$$\begin{gathered}
{}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1K_2}\,, \quad {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^M{}_I \cdot {}_ll^I{}_M\,,\\
\mathbf{\Gamma} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2}\,.
\end{gathered}$$

Координаты $\Gamma^K{}_{K_1K_2}$ называются *коэффициенты связности*. Далее воспользуемся законом умножения

$${}_l\mathbf{I}^M{}_I \circ {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot \delta^M{}_K$$

из таблицы умножения (4) и получим выражение координат линейного преобразования ${}_l\mathbf{a}$ через коэффициенты связности

$$ {}_l l^I{}_{K_1K_2} = {}_l l^I{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2} \, . $$

Отсюда для коэффициентов связности имеем

$$ \Gamma^K{}_{K_1K_2} = {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_l l^I{}_{K_1K_2} \, . $$

4.2. Правая вторая кинематическая алгебра

Векторное пространство правой второй кинематической алгебры обозначим

$$ {}_r\mathbb{T}_2 = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L} + {}_r\mathbb{A} \, . $$

Векторы в этой алгебре имеют вид[2]

$$ {}_r\mathbf{r} = {}_r\mathbf{x} + {}_r\mathbf{l} + {}_r\mathbf{a} \, . $$

Умножение векторов в правой второй кинематической алгебре записывается следующим образом:

$$ {}_r\mathbf{r} = {}_r\mathbf{r}_1 \circ {}_r\mathbf{r}_2 $$

Полную таблицу умножений базисных векторов во второй кинематической алгебре запишем, учитывая таблицу умножений базисных векторов в кинематической алгебре ${}_r\mathbb{T}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M &= {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{KM} + {}_r\mathbf{I}^P{}_L \cdot {}_rC^L{}_{PKM} \, , \\
{}_r\mathbf{e}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{e}_K \, , \\
{}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0 \, , \\
{}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{I}^I{}_K \, , \\
{}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0 \, , \\
{}_r\mathbf{e}_M \circ {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K &= \delta^N{}_M \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_K \, , \\
{}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= {}_r\mathbf{J}^{PI}{}_K \cdot \delta^L{}_M \, , \\
{}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K &= \delta^N{}_M \cdot {}_r\mathbf{J}^{IL}{}_K + {}_r\mathbf{e}_K \cdot \delta^N{}_M \cdot g^{IL} \, , \\
{}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_r\mathbf{I}^P{}_K \cdot g^{IL} \cdot \delta^N{}_M + \delta^N{}_M \cdot g^{LI} \cdot \delta^P{}_K \, .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Помимо таблицы умножений (5) будем пользоваться ее частным случаем, когда скалярные произведения не рассматриваются. Такая таблица умножений базисных векторов имеет вид

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M &= {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{KM} + {}_r\mathbf{I}^P{}_L \cdot {}_rC^L{}_{PKM} \, , \\
{}_r\mathbf{e}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{e}_K \, , \\
{}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0 \, , \\
{}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M + \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{I}^I{}_K \, , \\
{}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0 \, , \\
{}_r\mathbf{e}_M \circ {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K &= \delta^N{}_M \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_K \, , \\
{}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= {}_r\mathbf{J}^{PI}{}_K \cdot \delta^L{}_M \, , \\
{}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K &= \delta^N{}_M \cdot {}_r\mathbf{J}^{IL}{}_K \, , \\
{}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K &= 0 \, .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Для дальнейшего изложения нам необходимо ввести новый вектор, который обозначим $\mathbf{A}$ и назовем *потенциал*. Определим потенциал следующим соотношением:

$$ {}_r\mathbf{a} = \mathbf{A} \circ {}_r\mathbf{l} \, . $$

Воспользуемся координатной записью векторов в этом выражении

$$
\begin{gathered}
{}_r\mathbf{a} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_r l^I{}_{K_1K_2} \, , \qquad {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^M{}_I \cdot {}_r l^I{}_M \, , \\
\mathbf{A} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K \cdot A^K{}_{K_1K_2} \, .
\end{gathered}
$$

Координаты $A^K{}_{K_1K_2}$ называются *потенциалы*. Далее воспользуемся законом умножения

$$ {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^M{}_I = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot \delta^M{}_K $$

из таблицы умножения (6) и получим выражение координат линейного преобразования ${}_l\mathbf{a}$ через потенциалы

$$ {}_l l^I{}_{K_1K_2} = {}_l l^I{}_K \cdot A^K{}_{K_1K_2} \, . $$

Отсюда для потенциалов имеем

$$ A^K{}_{K_1K_2} = {}_r\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_r l^I{}_{K_1K_2} \, . $$

5. Системообразующий постулат

$\circ$-умножение отождествляется с *взаимодействием* физических объектов, сопровождающимся их участием в пространственно-временных явлениях. В этом смысле, например, закон умножения

$$ \mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{I}^{K_1}{}_I \cdot \delta^{K_2}{}_K $$

нужно интерпретировать так. Участвуя в пространственно-временных явлениях, второй промежуточный физический объект ($\mathbf{J}$) взаимодействует с фундаментальным объектом ($\mathbf{e}$). Результатом этого взаимодействия является промежуточный объект ($\mathbf{I}$). Аналогичным образом следует интерпретировать другие законы умножения из вышеуказанных таблиц умножения.

[2] Здесь для удобства слагаемые вектора приняты безразмерными.

II. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ВТОРОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

1. Левая вторая кинематическая алгебра

Уравнение структуры левой второй кинематической алгебры запишем следующим образом:

$$d_2 d_1\, {}_l\mathbf{r} = d_2\, {}_l\mathbf{r} \circ d_1\, {}_l\mathbf{r} \tag{7}$$

или

$$\begin{aligned} & d_2(d_1\, {}_l\mathbf{x} + d_1\, {}_l\mathbf{l} + d_1\, {}_l\mathbf{a}) = \\ & = (d_2\, {}_l\mathbf{x} + d_2\, {}_l\mathbf{l} + d_2\, {}_l\mathbf{a}) \circ (d_1\, {}_l\mathbf{x} + d_1\, {}_l\mathbf{l} + d_1\, {}_l\mathbf{a}) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & d_2 d_1\, {}_l\mathbf{x} + d_2 d_1\, {}_l\mathbf{l} + d_2 d_1\, {}_l\mathbf{a} = \\ & = d_2\, {}_l\mathbf{x} \circ d_1\, {}_l\mathbf{x} + d_2\, {}_l\mathbf{x} \circ d_1\, {}_l\mathbf{l} + d_2\, {}_l\mathbf{x} \circ d_1\, {}_l\mathbf{a} + \\ & + d_2\, {}_l\mathbf{l} \circ d_1\, {}_l\mathbf{x} + d_2\, {}_l\mathbf{l} \circ d_1\, {}_l\mathbf{l} + d_2\, {}_l\mathbf{l} \circ d_1\, {}_l\mathbf{a} + \\ & + d_2\, {}_l\mathbf{a} \circ d_1\, {}_l\mathbf{x} + d_2\, {}_l\mathbf{a} \circ d_1\, {}_l\mathbf{l} + d_2\, {}_l\mathbf{a} \circ d_1\, {}_l\mathbf{a}\,. \end{aligned}$$

Запишем уравнение структуры относительно координат векторов. Для этого подставим в уравнение структуры выражения дифференциалов векторов через базисные векторы

$$\begin{aligned} d\, {}_l\mathbf{x} = {}_l\mathbf{e}_I \cdot d\, {}_l x^I\,,\ \ d\, {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^K{}_I \cdot d\, {}_l l^I{}_K\,, \\ d\, {}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{J}^{LI}{}_K \cdot d\, {}_l l^K{}_{IL}\,. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} & (d_2 d_1\, {}_l x^K) \cdot {}_l\mathbf{e}_I + \\ & + (d_2 d_1\, {}_l l^K{}_L) \cdot {}_l\mathbf{I}^L{}_M + \\ & + (d_2 d_1\, {}_l l^K{}_{IL}) \cdot {}_l\mathbf{J}^{LI}{}_M = \\ & = (d_2\, {}_l x^K \cdot d_1\, {}_l x^M) \cdot ({}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M) + \\ & + (d_2\, {}_l x^K \cdot d_1\, {}_l l^M{}_I) \cdot ({}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M) + \\ & + (d_2\, {}_l x^K \cdot d_1\, {}_l l^M{}_{IP}) \cdot ({}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M) + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_L \cdot d_1\, {}_l x^M) \cdot ({}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M) + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_L \cdot d_1\, {}_l l^M{}_I) \cdot ({}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M) + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_L \cdot d_1\, {}_l l^M{}_{IP}) \cdot ({}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M) + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_{LN} \cdot d_1\, {}_l x^M) \cdot ({}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M) + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_{LN} \cdot d_1\, {}_l l^M{}_I) \cdot ({}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M) + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_{LN} \cdot d_1\, {}_l l^M{}_{IP}) \cdot ({}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M)\,. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся таблицей умножения базисных векторов (3).

В результате имеем

$$\begin{aligned} & (d_2 d_1\, {}_l x^K) \cdot {}_l\mathbf{e}_I + \\ & + (d_2 d_1\, {}_l l^K{}_L) \cdot {}_l\mathbf{I}^L{}_M + \\ & + (d_2 d_1\, {}_l l^K{}_{IL}) \cdot {}_l\mathbf{J}^{LI}{}_M = \\ & = (d_2\, {}_l x^K \cdot d_1\, {}_l x^M) \cdot ({}_l\mathbf{e}_I \cdot {}_l C^I{}_{MK} + {}_l\mathbf{I}^P{}_N \cdot {}_l C^N{}_{PMK}) + \\ & + (d_2\, {}_l l^M{}_K \cdot d_1\, {}_l x^K) \cdot {}_l\mathbf{e}_M + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_M \cdot d_1\, {}_l l^M{}_I) \cdot (\delta^I{}_K + {}_l\mathbf{I}^I{}_K) + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_M \cdot d_1\, {}_l l^M{}_{IP}) \cdot {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_K + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_{LM} \cdot d_1\, {}_l x^M) \cdot {}_l\mathbf{I}^L{}_K + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_{LM} \cdot d_1\, {}_l l^M{}_I) \cdot ({}_l\mathbf{J}^{IL}{}_K + {}_l\mathbf{e}_K \cdot g^{IL}) + \\ & + (d_2\, {}_l l^K{}_{LM} \cdot d_1\, {}_l l^M{}_{IP}) \cdot ({}_l\mathbf{I}^P{}_K \cdot g^{LI} + \delta^P{}_K \cdot g^{LI})\,. \end{aligned}$$

После преобразований получим уравнения структуры левой второй кинематической алгебры

$$\begin{aligned} & d_2 d_1\, {}_l x^I = d_2\, {}_l l^I{}_K \cdot d_1\, {}_l x^K + d_2\, {}_l l^I{}_{MK} \cdot d_1\, {}_l l^K{}_L \cdot g^{ML} + \\ & + {}_l C^I{}_{KM} \cdot d_1\, {}_l x^K \cdot d_2\, {}_l x^M\,, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & d_2 d_1\, {}_l l^M{}_L = d_2\, {}_l l^M{}_K \cdot d_1\, {}_l l^K{}_L + d_2\, {}_l l^M{}_{LK} \cdot d_1\, {}_l x^K + \\ & + d_2\, {}_l l^M{}_{IK} \cdot d_1\, {}_l l^K{}_{NL} \cdot g^{NI} + {}_l C^M{}_{LIK} \cdot d_1\, {}_l x^I \cdot d_2\, {}_l x^K\,, \end{aligned}$$

$$d_2 d_1\, {}_l l^M{}_{IL} = d_2\, {}_l l^M{}_{IK} \cdot d_1\, {}_l l^K{}_L + d_2\, {}_l l^M{}_K \cdot d_1\, {}_l l^K{}_{IL}\,,$$

$$\begin{aligned} & d_2 d_1 r^0 = g_{KL} \cdot d_1\, {}_l x^K \cdot d_2\, {}_l x^L + d_2\, {}_l l^M{}_K \cdot d_1\, {}_l l^K{}_M + \\ & + d_2\, {}_l l^M{}_{IK} \cdot d_1\, {}_l l^K{}_{LM} \cdot g^{LI}\,. \end{aligned}$$

Для более простого частного случая умножения базисных векторов (4), когда скалярные произведения не рассматриваются, уравнения структуры (8) упрощаются

$$d_2 d_1\, {}_l x^I = d_2\, {}_l l^I{}_K \cdot d_1\, {}_l x^K + {}_l C^I{}_{KL} \cdot d_1\, {}_l x^K \cdot d_2\, {}_l x^L\,,$$

$$\begin{aligned} & d_2 d_1\, {}_l l^M{}_L = d_2\, {}_l l^M{}_K \cdot d_1\, {}_l l^K{}_L + d_2\, {}_l l^M{}_{LK} \cdot d_1\, {}_l x^K + \\ & + {}_l C^M{}_{LIK} \cdot d_1\, {}_l x^I \cdot d_2\, {}_l x^K\,, \end{aligned} \tag{9}$$

$$d_2 d_1\, {}_l l^M{}_{IL} = d_2\, {}_l l^M{}_{IN} \cdot d_1\, {}_l l^N{}_L + d_2\, {}_l l^M{}_N \cdot d_1\, {}_l l^N{}_{IL}\,,$$

$$d_2 d_1 r^0 = g_{KL} \cdot d_1\, {}_l x^K \cdot d_2\, {}_l x^L + d_1\, {}_l l^M{}_K \cdot d_2\, {}_l l^K{}_M\,.$$

2. Правая вторая кинематическая алгебра

Уравнение структуры правой второй кинематической алгебры запишем следующим образом:

$$d_2 d_1\, {}_r\mathbf{r} = d_1\, {}_r\mathbf{r} \circ d_2\, {}_r\mathbf{r} \tag{10}$$

или

$$\begin{aligned} & d_2(d_1\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{l} + d_1\, {}_r\mathbf{a}) = \\ & = (d_1\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{l} + d_1\, {}_r\mathbf{a}) \circ (d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_2\, {}_r\mathbf{l} + d_2\, {}_r\mathbf{a}) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & d_2 d_1\, {}_r\mathbf{x} + d_2 d_1\, {}_r\mathbf{l} + d_2 d_1\, {}_r\mathbf{a} = \\ & = d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} + d_1\, {}_r\mathbf{x} \circ d_2\, {}_r\mathbf{a} + \\ & + d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} + d_1\, {}_r\mathbf{l} \circ d_2\, {}_r\mathbf{a} + \\ & + d_1\, {}_r\mathbf{a} \circ d_2\, {}_r\mathbf{x} + d_1\, {}_r\mathbf{a} \circ d_2\, {}_r\mathbf{l} + d_1\, {}_r\mathbf{a} \circ d_2\, {}_r\mathbf{a}\,. \end{aligned}$$

Запишем уравнение структуры относительно координат векторов. Для этого подставим в уравнение структуры выражения дифференциалов векторов через базисные векторы

$$d\,{}_r\mathbf{x} = {}_r\mathbf{e}_I \cdot d\,{}_r x^I\,, \quad d\,{}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^K{}_I \cdot d\,{}_r l^I{}_K\,, \\ d\,{}_r\mathbf{a} = {}_r\mathbf{J}^{LI}{}_K \cdot d\,{}_r l^K{}_{IL}\,.$$

Получим

$$\begin{aligned}
&(d_2 d_1\,{}_r x^K) \cdot {}_r\mathbf{e}_I + \\
&+ (d_2 d_1\,{}_r l^K{}_L) \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M + \\
&+ (d_2 d_1\,{}_r l^K{}_{IL}) \cdot {}_r\mathbf{J}^{LI}{}_M = \\
&= (d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r x^M) \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M) + \\
&+ (d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r l^M{}_I) \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M) + \\
&+ (d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r l^M{}_{IP}) \cdot ({}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M) + \\
&+ (d_1\,{}_r l^K{}_L \cdot d_2\,{}_r x^M) \cdot ({}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M) + \\
&+ (d_1\,{}_r l^K{}_L \cdot d_2\,{}_r l^M{}_I) \cdot ({}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M) + \\
&+ (d_1\,{}_r l^K{}_L \cdot d_2\,{}_r l^M{}_{IP}) \cdot ({}_r\mathbf{J}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M) + \\
&+ (d_1\,{}_r l^K{}_{LN} \cdot d_2\,{}_r x^M) \cdot ({}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M) + \\
&+ (d_1\,{}_r l^K{}_{LN} \cdot d_2\,{}_r l^M{}_I) \cdot ({}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M) + \\
&+ (d_1\,{}_r l^K{}_{LN} \cdot d_2\,{}_r l^M{}_{IP}) \cdot ({}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ {}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M)\,.
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся таблицей умножения базисных векторов (5).

В результате имеем

$$\begin{aligned}
&(d_2 d_1\,{}_r x^K) \cdot {}_r\mathbf{e}_I + \\
&+(d_2 d_1\,{}_r l^K{}_L) \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M + \\
&+(d_2 d_1\,{}_r l^K{}_{IL}) \cdot {}_r\mathbf{J}^{LI}{}_M = \\
&= (d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r x^M) \cdot ({}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_r C^I{}_{KM} + {}_r\mathbf{I}^P{}_N \cdot {}_r C^N{}_{PKM}) + \\
&+(d_2\,{}_r l^M{}_K \cdot d_1\,{}_r x^K) \cdot {}_r\mathbf{e}_M + \\
&+(d_2\,{}_r l^M{}_{IK} \cdot d_1\,{}_r x^K) \cdot {}_r\mathbf{I}^I{}_M + \\
&+(d_2\,{}_r l^M{}_K \cdot d_1\,{}_r l^K{}_L) \cdot (\delta^L{}_M + {}_r\mathbf{I}^L{}_M) + \\
&+(d_2\,{}_r l^M{}_{IK} \cdot d_1\,{}_r l^K{}_L) \cdot ({}_r\mathbf{J}^{LI}{}_M + {}_r\mathbf{e}_M \cdot g^{LI}) + \\
&+(d_2\,{}_r l^M{}_K \cdot d_1\,{}_r l^K{}_{LN}) \cdot {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_M + \\
&+(d_2\,{}_r l^M{}_{IK} \cdot d_1\,{}_r l^K{}_{LN}) \cdot ({}_r\mathbf{I}^N{}_M \cdot g^{LI} + \delta^N{}_M \cdot g^{LI})\,.
\end{aligned}$$

После преобразований получим уравнения структуры второй кинематической алгебры

$$d_2 d_1\,{}_r x^I = d_2\,{}_r l^I{}_K \cdot d_1\,{}_r x^K + d_2\,{}_r l^I{}_{MK} \cdot d_1\,{}_r l^K{}_L \cdot g^{ML} + \\ + {}_r C^I{}_{KM} \cdot d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r x^M\,, \tag{11}$$

$$d_2 d_1\,{}_r l^M{}_L = d_2\,{}_r l^M{}_K \cdot d_1\,{}_r l^K{}_L + d_2\,{}_r l^M{}_{LK} \cdot d_1\,{}_r x^K + \\ + d_2\,{}_r l^M{}_{IK} \cdot d_1\,{}_r l^K{}_{NL} \cdot g^{NI} + {}_r C^M{}_{LIK} \cdot d_1\,{}_r x^I \cdot d_2\,{}_r x^K\,,$$

$$d_2 d_1\,{}_r l^M{}_{IL} = d_2\,{}_r l^M{}_{IK} \cdot d_1\,{}_r l^K{}_L + d_2\,{}_r l^M{}_K \cdot d_1\,{}_r l^K{}_{IL}\,,$$

$$d_2 d_1 r^0 = g_{KL} \cdot d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r x^L + d_2\,{}_r l^M{}_K \cdot d_1\,{}_r l^K{}_M + \\ + d_2\,{}_r l^M{}_{IK} \cdot d_1\,{}_r l^K{}_{LM} \cdot g^{LI}\,.$$

Для более простого частного случая умножения базисных векторов (6), когда скалярные произведения не рассматриваются, уравнения структуры (11) упрощаются

$$d_2 d_1\,{}_r x^I = d_2\,{}_r l^I{}_K \cdot d_1\,{}_r x^K + {}_r C^I{}_{KL} \cdot d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r x^L\,,$$

$$d_2 d_1\,{}_r l^M{}_L = d_2\,{}_r l^M{}_K \cdot d_1\,{}_r l^K{}_L + d_2\,{}_r l^M{}_{LK} \cdot d_1\,{}_r x^K + \\ + {}_r C^M{}_{LIK} \cdot d_1\,{}_r x^I \cdot d_2\,{}_r x^K\,, \tag{12}$$

$$d_2 d_1\,{}_r l^M{}_{IL} = d_2\,{}_r l^M{}_{IN} \cdot d_1\,{}_r l^N{}_L + d_2\,{}_r l^M{}_N \cdot d_1\,{}_r l^N{}_{IL}\,,$$

$$d_2 d_1 r^0 = g_{KL} \cdot d_1\,{}_r x^K \cdot d_2\,{}_r x^L + d_1\,{}_r l^M{}_K \cdot d_2\,{}_r l^K{}_M\,.$$

III. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Фундаментальные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с пространством-временем $\mathbb{X}$. В соответствии с Главой 1.1. Раздел III. *движение* пространства-времени (тел и процессов) определено, если определено *преобразование* $f\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ ($\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$). Таким образом, движение как физическое явление отождествляется с преобразованием $f\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ ($\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$) как элементом математики. Пространство-время $\mathbb{X}$, по отношению к которому определяется результирующее пространство-время $\mathbb{X}'$, называется *системой отсчета*. В Главе 1.5. преобразования общего вида $\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$ было сведено к простейшему частному случаю: *линейному* преобразованию, которое было обозначено

$$\mathbb{X}' = l(\mathbb{X})\,.$$

Для него выполняется

$$\mathbf{y} = \mathbf{l} \circ \mathbf{x}\,.$$

Здесь $\mathbf{y} \in \mathbb{X}', \mathbf{l} \in \mathbb{L},\ \mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

В предыдущем Разделе сделан шаг по усложнению преобразования $\mathbb{X}' = l(\mathbb{X})$ на основании предположения, что имеет место линейное преобразование

$$\mathbb{L} = a(\mathbb{X})\,.$$

Это преобразование называно *вторым линейным*. Для него выполняется

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} \circ \mathbf{x}\,.$$

Здесь $\mathbf{l} \in \mathbb{L}, \mathbf{a} \in \mathbb{A},\ \mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

Указанная процедура усложнения может быть *продолжена* путем введения *третьего линейного* преобразования

$$\mathbb{A} = b(\mathbb{X})\,.$$

Для него выполняется[3]

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \circ \mathbf{x}\,.$$

[3] $\mathbf{b}$ это оператор, который ставит в соответствие вектору $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{a}$.

Здесь $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{B}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

Все указанные усложнения нужны для того, чтобы рассмотреть преобразование *общего вида*

$$\mathbb{X}' = f(\mathbb{X}) , \tag{13}$$

к которому обратимся. Пусть $\mathbf{x}$ произвольный вектор системы отсчета $\mathbb{X}$. Тогда преобразование *общего вида* (13), записанное в следующей форме

$$\mathbb{X}'(\mathbf{x}) ,$$

представляет собой *поле*[4] преобразованного пространства $\mathbb{X}'$ на системе отсчета. Указанное поле назовем *кинематическим.*

Пусть $\mathbf{y}$ произвольный вектор преобразованного пространства $\mathbb{X}'$. Тогда кинематическое поле представляется функциональной зависимостью общего вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) .$$

Используя ранее рассмотренные линейные преобразования различных порядков, запишем указанную функциональную зависимость в виде ряда Тейлора в векторной форме

$$\begin{aligned}&\mathbf{y}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \mathbf{l}(\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} + (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} + \\ &+((\mathbf{b}(\mathbf{x}) \circ d_3\mathbf{x}) \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} + \dots .\end{aligned} \tag{14}$$

Тогда кинематическое поле $\mathbf{y}(\mathbf{x}+d\mathbf{x})$ сводится к полям коэффициентов ряда Тейлора[5]

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) , \dots .$$

Укажем дифференциальную связь между коэффициентами ряда Тейлора и обыкновенными дифференциалами $d\mathbf{y}$, $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{a}$

$$\mathbf{l} \circ d\mathbf{x} = d\mathbf{y} + \mathbf{l}' \circ d\mathbf{x} , \tag{15}$$
$$\mathbf{a} \circ d\mathbf{x} = d\mathbf{l} + \mathbf{a}' \circ d\mathbf{x} , \tag{16}$$
$$\mathbf{b} \circ d\mathbf{x} = d\mathbf{a} + \mathbf{b}' \circ d\mathbf{x} . \tag{17}$$

Прежде, чем двигаться дальше, напомним, что кинематическая алгебра $\mathbb{T} = \mathbb{X} + \mathbb{L}$ и вторая кинематическая алгебра $\mathbb{T}_2 = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A}$ являются некоммутативными, поэтому они рассматриваются в двух модификациях: левые и правые алгебры. Соответственно алгебрам необходимо рассматривать кинематическое поле в двух модификациях: левое кинематическое поле и правое кинематическое поле.

[4] Мы исходим из общего определения *поля*, используемого в физике. Если величина α задана в каждой точке x пространства X, то есть $\alpha = \alpha(x)$, то такая зависимость называется *полем* величины α на пространстве X.

[5] Мы ограничимся тремя указанными коэффициентами.

1. Левое кинематическое поле

Запишем ряд Тейлора (14) для левых векторов

$$\begin{aligned}&{}_l\mathbf{y}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = {}_l\mathbf{y}(\mathbf{x}) + {}_l\mathbf{l}(\mathbf{x}) \circ d\,{}_l\mathbf{x} + \\ &+({}_l\mathbf{a}(\mathbf{x}) \circ d_2\,{}_l\mathbf{x}) \circ d_1\,{}_l\mathbf{x} + \\ &+(({}_l\mathbf{b}(\mathbf{x}) \circ d_3\,{}_l\mathbf{x}) \circ d_2\,{}_l\mathbf{x}) \circ d_1\,{}_l\mathbf{x} + \dots .\end{aligned} \tag{18}$$

Перейдем к координатной записи ряда Тейлора. Для этого запишем векторы через базисные векторы и координаты

$${}_l\mathbf{y} = {}_l\mathbf{e}_I \cdot d\,{}_ly^I , \quad d\,{}_l\mathbf{x} = {}_l\mathbf{e}_L \cdot d\,{}_lx^L ,$$
$${}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_ll^I{}_K , \quad {}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1K_2} ,$$
$${}_l\mathbf{b} \circ d_1\,{}_l\mathbf{x} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3}$$

и учтем следующие законы умножения базисных векторов

$${}_l\mathbf{I}^K{}_I \circ {}_l\mathbf{e}_L = \delta^K{}_L \cdot {}_l\mathbf{e}_I ,$$
$${}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \circ {}_l\mathbf{e}_L = \delta^{K_2}{}_L \cdot {}_l\mathbf{I}^{K_1}{}_I .$$

Получим

$$\begin{aligned}&{}_ly^I(x+dx) = {}_ly^I(x) + {}_ll^I{}_K \cdot dx^K + \\ &+ {}_ll^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ &+ {}_ll^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \dots .\end{aligned} \tag{19}$$

Левое кинематическое поле определяется тремя наборами кинематических переменных, причем каждая из переменных зависит от точек пространства-времени.

Первые переменные определяются на основании дифференциала вектора движущегося пространства[6]

$$D\,{}_l\mathbf{y} = {}_l\mathbf{l}(\mathbf{x}) \circ d\,{}_l\mathbf{x} , \text{ и } \quad D\,{}_ly^I = {}_ll^I{}_K \cdot dx^K . \tag{20}$$

Отсюда к *первым* переменным левого кинематического поля отнесены зависимости

$${}_l\mathbf{l}(\mathbf{x}) , \quad {}_ll^I{}_K(x) ,$$

а для параметрического представления это зависимость

$${}_ll^I{}_K(\varphi(x)) .$$

Таким образом, к *первым* переменным левого кинематического поля отнесены: поле левого линейного преобразования, его координат и поле параметров представления этого преобразования

$${}_l\mathbf{l}(\mathbf{x}) , \quad {}_ll^I{}_K(x) , \quad {}_l\varphi^\alpha(x) .$$

[6] Дифференциал, относящийся к движущемуся пространству, обозначен символом D.

Вторые переменные левого кинематического поля определяются на основании дифференциала линейного преобразования (16) и

$$D\,{}_l l^I{}_{K_1} = d\,{}_l l^I{}_{K_1} + {}_l l'^I{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2}\,. \tag{21}$$

Этими переменными являются коэффициенты

$${}_l\mathbf{a}\,, \qquad {}_l l'^I{}_{K_1K_2}\,.$$

Используем матрицу обратного линейного преобразования ${}_l\tilde{l}^K{}_I$, для которой

$${}_l l^I{}_K \cdot {}_l\tilde{l}^K{}_{I_1} = \delta^I{}_{I_1}\,, \qquad {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_l l^I{}_{K_1} = \delta^K{}_{K_1}$$

и перейдем от коэффициентов ${}_l l'^I{}_{K_1K_2}$ к коэффициентам

$$\Gamma^K{}_{K_1K_2} = {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_l l'^I{}_{K_1K_2}\,,$$

которые называются *коэффициентами связности* кинематического поля.

Таким образом, к *вторым* переменным левого кинематического поля отнесены: поле второго левого линейного преобразования, его координат и поле коэффициентов связности

$${}_l\mathbf{a}(x)\,, \qquad {}_l l^I{}_{K_1K_2}(x)\,, \qquad \Gamma^K{}_{K_1K_2}(x)\,.$$

Третьи переменные левого кинематического поля определяются на основании дифференциала (17) и

$$D\,{}_l l^I{}_{K_1K_2} = d\,{}_l l^I{}_{K_1K_2} + {}_l l'^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3}\,. \tag{22}$$

Этими переменными являются коэффициенты

$${}_l\mathbf{b}\,, \qquad {}_l l'^I{}_{K_1K_2K_3}\,.$$

Используя матрицу обратного линейного преобразования, перейдем от коэффициентов ${}_l l'^I{}_{K_1K_2K_3}$ к коэффициентам

$$R^K{}_{K_1K_2K_3} = {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_l l'^I{}_{K_1K_2K_3}\,,$$

которые называются *объектом кривизны* кинематического поля[7].

Таким образом, к *третьим* переменным левого кинематического поля отнесены: поле третьего левого линейного преобразования, его координат и поле объекта кривизны

$${}_l\mathbf{b}(x)\,, \qquad {}_l l^I{}_{K_1K_2K_3}(x)\,, \qquad R^K{}_{K_1K_2K_3}(x)\,.$$

[7] Антисимметризация объекта кривизны по коэффициентам K_2 и K_3 приводит к величине, назывемой тензором кривизны кинематического поля.

2. Правое кинематическое поле

Запишем ряд Тейлора (14) для правых векторов

$$\begin{aligned}&{}_r\mathbf{y}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = {}_r\mathbf{y}(\mathbf{x}) + d\,{}_r\mathbf{x}\circ {}_r\mathbf{l}(\mathbf{x}) + \\ &+ d_1\,{}_r\mathbf{x}\circ(d_2\,{}_r\mathbf{x}\circ {}_r\mathbf{a}(\mathbf{x})) + \\ &+ d_1\,{}_r\mathbf{x}\circ(d_2\,{}_r\mathbf{x}\circ(d_{r\,3}\mathbf{x}\circ {}_r\mathbf{b}(\mathbf{x}))) + \ldots\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Перейдем к координатной записи ряда Тейлора. Для этого запишем векторы через базисные векторы и координаты

$${}_r\mathbf{y} = {}_r\mathbf{e}_I \cdot d\,{}_r y^I\,, \quad d\,{}_r\mathbf{x} = {}_r\mathbf{e}_L \cdot d\,{}_r x^L\,,$$

$${}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_r l^I{}_K\,, \quad {}_r\mathbf{a} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_r l^I{}_{K_1K_2}\,,$$

$${}_r\mathbf{b}\circ d_1\,{}_r\mathbf{x} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_r l^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3}$$

и учтем следующие законы умножения базисных векторов в правой алгебре

$${}_r\mathbf{e}_L \circ {}_r\mathbf{I}^K{}_I = \delta^K{}_L \cdot {}_r\mathbf{e}_I\,,$$

$${}_r\mathbf{e}_L \circ {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I = \delta^{K_2}{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^{K_1}{}_I\,.$$

Получим

$$\begin{aligned}&{}_r y^I(x+dx) = {}_r y^I(x) + {}_r l^I{}_K \cdot dx^K + \\ &+ {}_r l^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ &+ {}_r l^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \ldots\,.\end{aligned} \tag{24}$$

Правое кинематическое поле определяется тремя наборами кинематических переменных. Каждая из переменных зависит от точек пространства-времени.

Первые переменные определяются на основании дифференциала вектора движущегося пространства[8]

$$D\,{}_r\mathbf{y}(\mathbf{x}) = d\,{}_r\mathbf{x}\circ {}_r\mathbf{l}(\mathbf{x})\,, \text{и} \quad D\,{}_r y^I = {}_r l^I{}_K \cdot dx^K\,. \tag{25}$$

Отсюда к *первым* переменным правого кинематического поля отнесены зависимости

$${}_r\mathbf{l}(\mathbf{x})\,, \qquad {}_r l^I{}_K(x)\,,$$

а для параметрического представления это зависимость

$${}_r l^I{}_K(\varphi(x))\,.$$

Таким образом, к *первым* переменным правого кинематического поля отнесены: поле правого линейного преобразования, его координат и поле параметров представления этого преобразования

$${}_r\mathbf{l}(\mathbf{x})\,, \quad {}_r l^I{}_K(x)\,, \quad {}_r\varphi^\alpha(x)\,.$$

[8] Дифференциал, относящийся к движущемуся пространству, обозначен символом D.

Вторые переменные правого кинематического поля определяется на основании дифференциала линейного преобразования (16) и

$$D\, {}_r l^I{}_{K_1} = d\, {}_r l^I{}_{K_1} + {}_r l'^I{}_{K_1 K_2} \cdot dx^{K_2}\,. \qquad (26)$$

Этими переменными являются коэффициенты

$${}_r\mathbf{a}\,, \qquad {}_r l'^I{}_{K_1 K_2}\,.$$

Используем матрицу обратного линейного преобразования ${}_r\tilde{l}^K{}_I$, для которой

$${}_r l^I{}_K \cdot {}_r\tilde{l}^K{}_{I_1} = \delta^I{}_{I_1}\,, \quad {}_r\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_r l^I{}_{K_1} = \delta^K{}_{K_1}\,,$$

и перейдем от коэффициентов ${}_r l'^I{}_{K_1 K_2}$ к коэффициентам

$$A^I{}_{I_1 K_2} = {}_r\tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} \cdot {}_r l'^I{}_{K_1 K_2}\,,$$

которые называются *потенциалами* кинематического поля.

Таким образом, к *вторым* переменным правого кинематического поля отнесены: поле второго правого линейного преобразования, его координат и поле потенциалов

$${}_r\mathbf{a}(x)\,, \qquad {}_r l^I{}_{K_1 K_2}(x)\,, \qquad A^K{}_{K_1 K_2}(x)\,.$$

Третьи переменные правого кинематического поля определяются на основании дифференциала (17) и

$$D\, {}_r l^I{}_{K_1 K_2} = d\, {}_r l^I{}_{K_1 K_2} + {}_r l'^I{}_{K_1 K_2 K_3} \cdot d\, {}_r x^{K_3}\,. \qquad (27)$$

Этими функциями являются коэффициенты

$${}_r\mathbf{b}\,, \qquad {}_r l'^I{}_{K_1 K_2 K_3}\,.$$

Используя матрицу обратного линейного преобразования, перейдем от коэффициентов ${}_r l'^I{}_{K_1 K_2 K_3}$ к коэффициентам

$$F^I{}_{I_1 K_2 K_3} = {}_r\tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} \cdot {}_r l'^I{}_{K_1 K_2 K_3}\,,$$

которые называются *объектом* кинематического поля[9].

Таким образом, к *третьим* переменным правого кинематического поля отнесены поле третьего правого линейного преобразования, его координат и поле объекта поля

$${}_r\mathbf{b}(x)\,, \qquad {}_r l^I{}_{K_1 K_2 K_3}(x)\,, \qquad F^I{}_{I_1 K_2 K_3}(x)\,.$$

[9] Антисимметризация объекта поля по коэффициентам K_2 и K_3 приводит к величине, назывемой тензором кинематического поля. В частных случаях этот тензор сводится к тензору Максвелла и тензору Янга-Миллса.

3. Системообразующие постулаты

1. В Разделе V.1. Главы 1.5. установлено, что левая алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ является линейной частью левой кинематической группы ${}_l\mathbb{G}$. Эта группа была названа кинематической группой *внешней симметрии*[10]. Например, группа гравитации является подгруппой кинематической группы внешней симметрии ${}_l\mathbb{G}$.

В продолжение указанного определения группы ${}_l\mathbb{G}$ левое кинематическое поле назовем *кинематическим полем внешней симметрии.* Например, гравитационное поле отнесем к кинематическому полю внешней симметрии.

2. В Разделе V.2. Главы 1.5. установлено, что правая алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ является линейной частью правой кинематической группы ${}_r\mathbb{G}$. Эта группа была названа кинематической группой *внутренней симметрии*[11]. Например, электрическая группа является группой внутренней симметрии и подобна подгруппе кинематической группы внутренней симметрии ${}_r\mathbb{G}$.

В продолжение указанного определения группы ${}_r\mathbb{G}$ назовем правое кинематическое поле *кинематическим полем внутренней симметрии.* Например, электромагнитное поле отнесено к кинематическому полю внутренней симметрии.

IV. ЛЕВАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА В ПОЛЕ ВНЕШНЕЙ СИММЕТРИИ. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ

Напомним, что левая кинематическая алгебра построена на векторах пространства-времени с левым умножением

$${}_l\mathbf{x} = \frac{1}{L} \cdot \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1$$

и векторах пространства линейных преобразований с левым умножением

$${}_l\mathbf{l} = \mathbf{l}_2 \circ \mathbf{l}_1\,.$$

Непрерывные левые линейные преобразования образуют группу ${}_l\mathbb{G}$, которая подобна группе *внешней симметрии.*

По отношению к координатам векторов пространства-времени левое умножение имеет вид

$${}_l x^K = \frac{1}{L_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot x_1^{K_1} \cdot x_2^{K_2}\,.$$

[10] Термин *внешняя симметрия*, с одной стороны, продиктован представлением о *внутренней симметрии*, используемой в современной физике, а, с другой стороны, введен для подчеркивания отличия рассматриваемой симметрии от внутренней симметрии.

[11] Термин *внутренняя симметрия* используется здесь в том смысле, в котором он используется в современной физике.

По отношению к координатам векторов линейных преобразований левое умножение имеет вид

$${}_l l^M{}_L = (l_2)^M{}_K \cdot (l_1)^K{}_L \,.$$

Базисные векторы в пространстве-времени ${}_l\mathbf{e}_I$ и базисные векторы в пространстве линейных преобразований ${}_l\mathbf{I}^I{}_M$ составляют таблицу умножения, определяющую левую кинематическую алгебру ${}_l\mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}
{}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= {}_l\mathbf{e}_I \cdot {}_lC^I{}_{KM} + {}_l\mathbf{I}^I{}_L \cdot {}_lC^L{}_{IKM}\,,\\
{}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= 0\,,\\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M\,,\\
{}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Подгруппы группы внешней симметрии удобно рассматривать, используя параметрическое представление, для которого

$${}_l l^I{}_K = {}_lC^I{}_{K\alpha} \cdot {}_l\varphi^\alpha\,,$$

где ${}_l\varphi^\alpha$ – параметры подгруппы внешней симметрии. Базисными векторами подгруппы внешней симметрии являются

$${}_l\mathbf{e}_\alpha = {}_l\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_lC^I{}_{K\alpha}\,.$$

Они подчиняются левому закону умножения

$${}_l\mathbf{e}_\alpha \circ {}_l\mathbf{e}_\beta = {}_l\mathbf{e}_\gamma \cdot {}_lC^\gamma{}_{\beta\alpha}\,.$$

Уравнения структуры левой кинематической алгебры ${}_l\mathbb{T}$ записываются следующим образом:

$$d_2 d_1\, {}_l\mathbf{t} = d_2\, {}_l\mathbf{t} \circ d_1\, {}_l\mathbf{t}\,, \tag{29}$$

где

$$d\, {}_l\mathbf{t} = \frac{1}{L_0} \cdot d\, {}_l\mathbf{x} + d\, {}_l\mathbf{l}.$$

Запишем полученные уравнения через координаты векторов ${}_l\mathbf{x}$ и ${}_l\mathbf{l}$. Для этого подставим в (29) выражения векторов через базисные векторы

$${}_l\mathbf{x} = {}_l\mathbf{e}_I \cdot {}_lx^I \quad \text{и} \quad {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_l l^K{}_I$$

и воспользуемся таблицей умножения базисных векторов (28). Получим

$$\begin{aligned}
&d_2 d_1\, {}_lx^I = \tfrac{1}{L_0}\, {}_lC^I{}_{ML} \cdot d_1\, {}_lx^M \cdot d_2\, {}_lx^L + d_2\, {}_l l^L{}_M \cdot d_1\, {}_lx^M\,,\\
&d_2 d_1\, {}_l l^I{}_K = d_2\, {}_l l^I{}_L \cdot d_1\, {}_l l^L{}_K +\\
&\qquad + \tfrac{1}{L_0{}^2} \cdot {}_lC^M{}_{LPQ} \cdot d_1\, {}_lx^P \cdot d_2\, {}_lx^Q\,.
\end{aligned}$$

К этим уравнениям необходимо добавить проекцию уравнения (29) на скалярное направление

$$d_2 d_1\, {}_lt^0 = \frac{1}{L_0{}^2} \cdot g_{KM} \cdot d_1\, {}_lx^K \cdot d_2\, {}_lx^M + d_2\, {}_l l^M{}_K \cdot d_1\, {}_l l^K{}_M\,.$$

1. Уравнения структуры левой кинематической алгебры в поле внешней симметрии

Для того, чтобы перейти от левой кинематической алгебры к левой кинематической алгебре в поле внешней симметрии, необходимо в координатной записи выражений дифференциалов векторов

$$d\, {}_l\mathbf{x} = {}_l\mathbf{e}_I \cdot d\, {}_lx^I\,, \qquad d\, {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^{K_1}{}_I \cdot d\, {}_l l^I{}_{K_1}\,,$$

дифференциалы координат $d\, {}_l l^I{}_{K_1}$ определять из выражения

$$D\, {}_l l^I{}_{K_1} = d\, {}_l l^I{}_{K_1} + \Gamma^I{}_{K_1K_2} \cdot d\, {}_lx^{K_2}\,.$$

С учетом этого[12]

$$d\, {}_l\mathbf{t} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot d\, {}_lx^K + {}_l\mathbf{I}^{K_1}{}_I \cdot (D\, {}_l l^I{}_{K_1} - \Gamma^I{}_{K_1K_2} \cdot d\, {}_lx^{K_2})\,. \tag{30}$$

Подставим в уравнение (29) выражения (30) дифференциала вектора[13]

$$\begin{aligned}
d_2 d_1 x^I \cdot \mathbf{e}_I + d_2(D_1 l^M{}_L - \Gamma^M{}_{LN} \cdot d_1 x^N) \cdot \mathbf{I}^L{}_M = (d_2 x^M \cdot d_1 x^K) \cdot (\mathbf{e}_M \circ \mathbf{e}_K) +\\
+ d_2 x^K \cdot (D_1 l^M{}_I - \Gamma^M{}_{IN} \cdot d_1 x^N) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M) + (D_2 l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LN} \cdot d_2 x^N) \cdot d_1 x^M \cdot (\mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{e}_M) +\\
+ (D_2 l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_2 x^P) \cdot (D_1 l^M{}_I - \Gamma^M{}_{IQ} \cdot d_1 x^Q) \cdot (\mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M)\,.
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся таблицей умножения базисных векторов (28). В результате имеем

$$\begin{aligned}
d_2 d_1 x^I \cdot \mathbf{e}_I + (d_2 D_1 l^M{}_L - d_2\Gamma^M{}_{LP} \cdot d_1 x^P - \Gamma^M{}_{LN} \cdot d_2 d_1 x^N) \cdot \mathbf{I}^L{}_M = (d_2 x^M \cdot d_1 x^K) \cdot (\mathbf{e}_I \cdot C^I{}_{KM} - \mathbf{I}^I{}_L \cdot C^L{}_{IKM}) +\\
+ d_2 x^K \cdot (D_1 l^M{}_K - \Gamma^M{}_{KP} \cdot d_1 x^P) \cdot \mathbf{e}_M + (D_2 l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_2 x^P) \cdot (D_1 l^M{}_K - \Gamma^M{}_{KQ} \cdot d_1 x^Q) \cdot (\mathbf{I}^L{}_M + \delta^L{}_M)\,.
\end{aligned}$$

---

[12] Слагаемые векторы приняты безразмерными.
[13] Далее указание на то, что векторы и координаты относятся к *левой* алгебре, опущены.

Разделяя слагаемые по базисным векторам, получим:

$$d_2 d_1 x^I = {}_l C^I{}_{KM} \cdot d_1 x^K \cdot d_2 x^M + D_2 l^I{}_K \cdot d_1 x^K - \Gamma^I{}_{MK} \cdot d_1 x^M \cdot d_2 x^K ,$$

$$d_2 D_1 l^M{}_L - d_2 \Gamma^M{}_{LP} \cdot d_1 x^P - \Gamma^M{}_{LK} \cdot d_2 d_1 x^K =$$
$$= {}_l C^M{}_{LPQ} \cdot d_1 x^P \cdot d_2 x^Q + (D_2 l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_2 x^P) \cdot (D_1 l^M{}_K - \Gamma^M{}_{KQ} \cdot d_1 x^Q) ,$$

$$d_2 d_1 t^0 = g_{MK} \cdot d_1 x^M \cdot d_2 x^K + (D_2 l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_2 x^P) \cdot (D_1 l^L{}_K - \Gamma^L{}_{KQ} \cdot d_1 x^Q) .$$

После подстановки первого уравнения во второе и необходимых преобразований, получим уравнения структуры левой кинематической алгебры в поле внешней симметрии относительно дифференциалов координат векторов

$$\begin{aligned} d_2 d_1 {}_l x^I &= D_2 {}_l l^I{}_K \cdot d_1 {}_l x^K + T^I{}_{MK} \cdot d_1 {}_l x^M \cdot d_2 {}_l x^K , \\ d_2 D_1 {}_l l^M{}_L &= D_2 {}_l l^M{}_K \cdot D_1 {}_l l^K{}_L + \Gamma^M{}_{LK} \cdot D_2 {}_l l^K{}_P \cdot d_1 {}_l x^P - \Gamma^M{}_{KP} \cdot D_1 {}_l l^K{}_L \cdot d_2 {}_l x^P - D_2 {}_l l^M{}_K \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_1 {}_l x^P + \\ &\quad + R^M{}_{LPQ} \cdot d_1 {}_l x^P \cdot d_2 {}_l x^Q , \\ d_2 d_1 t^0 &= g_{MK} \cdot d_2 {}_l x^M \cdot d_1 {}_l x^K + (D_2 {}_l l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_2 {}_l x^P) \cdot (D_1 {}_l l^L{}_K - \Gamma^L{}_{KQ} \cdot d_1 {}_l x^Q) , \end{aligned} \tag{31}$$

где

$T^I{}_{MK} = {}_l C^I{}_{MK} - \Gamma^I{}_{MK}$ – объект кручения поля внешней симметрии,
$R^M{}_{LPQ} = \Gamma^M{}_{LPQ} + \Gamma^M{}_{KQ} \cdot \Gamma^K{}_{LP} + \Gamma^M{}_{LK} \cdot T^K{}_{PQ} + {}_l C^M{}_{LPQ}$ – объект кривизны поля внешней симметрии.

Здесь использовано обозначение $\Gamma^M{}_{LPQ} \cdot dx^Q = d\Gamma^M{}_{LP}$.
Введем скалярную функцию s' из условия[14]

$$ds'^2 = d^2 t^0 .$$

В результате кинематическая алгебра в поле снабжается квадратом линейного элемента

$$ds'^2 = g_{MK} \cdot d_l x^M \cdot d_l x^K + (D_l l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_l x^P) \cdot (D_l l^L{}_K - \Gamma^L{}_{KQ} \cdot d_l x^Q) . \tag{32}$$

Из этого выражения видно, что метрика кинематического пространства в поле включает в себя метрику пространства-времени и метрику линейных преобразований, поставленных в соответствие точкам пространства-времени. Поэтому имеет место корреляция между пространством кинематической алгебры в поле внешней симметрии и пространством, рассматриваемым в многомерных обобщениях теории гравитации.

V. ПРАВАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА В ПОЛЕ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ

Напомним, что правая кинематическая алгебра построена на векторах пространства-времени с правым умножением

$${}_r\mathbf{x} = \frac{1}{L_0} \cdot \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2$$

и векторах пространства линейных преобразований с правым умножением

$${}_r\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 \circ \mathbf{l}_2 .$$

Непрерывные правые линейные преобразования образуют группу ${}_r\mathbb{G}$, которая отождествлена с группой *внутренней симметрии*.

По отношению к координатам векторов пространства-времени правое умножение имеет вид

$${}_r x^K = \frac{1}{L_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot {}_r x_1^{K_1} \cdot {}_r x_2^{K_2} .$$

[14] Для скалярной величины $d_1 = d_2 = d$.

По отношению к координатам векторов линейных преобразований правое умножение имеет вид

$$ {}_r l^M{}_L = (l_1)^M{}_K \cdot (l_2)^K{}_L \,. $$

Базисные векторы в пространстве-времени ${}_r\mathbf{e}_I$ и базисные векторы в пространстве правых линейных преобразований ${}_r\mathbf{I}^I{}_M$ составляют таблицу умножения, определяющую правую кинематическую алгебру ${}_r\mathbb{T}$

$$ \begin{aligned} {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M &= {}_r\mathbf{e}_I \cdot {}_rC^I{}_{KM} + {}_r\mathbf{I}^I{}_L \cdot {}_rC^L{}_{IKM} \,, \\ {}_r\mathbf{e}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^L{}_M \cdot {}_r\mathbf{e}_K \,, \\ {}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0 \,, \\ {}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= \delta^L{}_M \cdot \mathbf{I}^I{}_K + \delta^L{}_M \cdot \delta^I{}_K \,. \end{aligned} \tag{33} $$

Подгруппы группы внутренней симметрии удобно рассматривать, используя параметрическое представление, для которого

$$ {}_r l^I{}_K = {}_rC^I{}_{K\alpha} \cdot {}_r\varphi^\alpha \,, $$

где ${}_r\varphi^\alpha$ – параметры подгруппы внутренней симметрии. Базисными векторами подгруппы внутренней симметрии являются

$$ {}_r\mathbf{e}_\alpha = {}_r\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_rC^I{}_{K\alpha} \,. $$

Они подчиняются правому закону умножения

$$ {}_r\mathbf{e}_\beta \circ {}_r\mathbf{e}_\alpha = {}_r\mathbf{e}_\gamma \cdot {}_rC^\gamma{}_{\beta\alpha} \,. $$

Уравнение структуры правой кинематической алгебры ${}_r\mathbb{T}$ записывается следующим образом:

$$ d_2 d_1 \, {}_r\mathbf{t} = d_1 \, {}_r\mathbf{t} \circ d_2 \, {}_r\mathbf{t} \,, \tag{34} $$

где

$$ d\, {}_r\mathbf{t} = \frac{1}{L_0} \cdot d\, {}_r\mathbf{x} + d\, {}_r\mathbf{l}. $$

Запишем полученное уравнение через координаты векторов ${}_r\mathbf{x}$ и ${}_r\mathbf{l}$. Для этого подставим в (34) выражения векторов через базисные векторы

$$ {}_r\mathbf{x} = \mathbf{e}_I \cdot {}_r x^I \quad \text{и} \quad {}_r\mathbf{l} = \mathbf{I}^I{}_K \cdot {}_r l^K{}_I $$

и воспользуемся таблицей умножения базисных векторов (33). Получим

$$ \begin{aligned} d_2 d_1 \, {}_r x^I &= \tfrac{1}{L_0} \cdot {}_rC^I{}_{ML} \cdot d_1 \, {}_r x^M \cdot d_2 \, {}_r x^L + d_2 \, {}_r l^L{}_M \cdot d_1 \, {}_r x^M \,, \\ d_2 d_1 \, {}_r l^I{}_K &= d_2 \, {}_r l^I{}_L \cdot d_1 \, {}_r l^L{}_K + \tfrac{1}{{L_0}^2} \cdot {}_rC^M{}_{LPQ} \cdot d_1 \, {}_r x^P \cdot d_2 \, {}_r x^Q \,. \end{aligned} $$

К этим уравнениям необходимо добавить проекцию уравнения (34) на скалярное направление

$$ d_2 d_1 t^0 = \frac{1}{L_0} \cdot g_{KM} \cdot d_1 \, {}_r x^K \cdot d_2 \, {}_r x^M + d_2 \, {}_r l^M{}_K \cdot d_1 \, {}_r l^K{}_M \,. $$

1. Уравнения структуры правой кинематической алгебры в поле внутренней симметрии

Для того, чтобы перейти от правой кинематической алгебры к правой кинематической алгебре в поле внутренней симметрии, необходимо в дифференциалах векторов

$$ d\, {}_r\mathbf{x} = {}_r\mathbf{e}_I \cdot d\, {}_r x^I \,, \qquad d\, {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^{K_1}{}_I \cdot d\, {}_r l^I{}_{K_1} $$

дифференциалы координат $d\, {}_r l^I{}_{K_1}$ определять из выражения[15]

$$ D\, {}_r l^I{}_{K_1} = d\, {}_r l^I{}_{K_1} + A^I{}_{K_1 K_2} \cdot d\, {}_r x^{K_2} \,. $$

---

[15] Здесь $A^I{}_{K_1 K_2}$ – это потенциалы поля внутренней симметрии.

С учетом этого[16]

$$d_{\,r}\mathbf{t} = {}_{r}\mathbf{e}_K \cdot d_{\,r}x^K + {}_{r}\mathbf{I}^K{}_I \cdot (D_{\,r}l^I{}_K - A^I{}_{KN} \cdot d_{\,r}x^N)\,. \tag{35}$$

Подставим в уравнение (34) выражение (35) дифференциалов векторов[17]

$$\begin{aligned} &d_2 d_1 x^K \cdot \mathbf{e}_K + d_2(D_1 l^M{}_L - A^M{}_{LN} \cdot d_1 x^N) \cdot \mathbf{I}^L{}_M = (d_1 x^M \cdot d_2 x^K) \cdot (\mathbf{e}_M \circ \mathbf{e}_K) + \\ &\quad + d_1 x^K \cdot (D_2 l^M{}_I - A^M{}_{IN} \cdot d_2 x^N) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M) + (D_1 l^K{}_L - A^K{}_{LN} \cdot d_1 x^N) \cdot d_2 x^M \cdot (\mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{e}_M) + \\ &\quad + (D_1 l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P) \cdot (D_2 l^M{}_I - A^M{}_{IQ} \cdot d_2 x^Q) \cdot (\mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M)\,. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся таблицей умножения базисных векторов (33). В результате имеем

$$\begin{aligned} &d_2 d_1 x^K \cdot \mathbf{e}_K + (d_2 D_1 l^M{}_L - d_2 A^M{}_{LP} \cdot d_1 x^P - A^M{}_{LN} \cdot d_2 d_1 x^N) \cdot \mathbf{I}^L{}_M = (d_1 x^M \cdot d_2 x^K) \cdot (\mathbf{e}_I \cdot {}_{r}C^I{}_{MK} + \mathbf{I}^I{}_L \cdot {}_{r}C^L{}_{IMK}) + \\ &\quad + (D_2 l^M{}_K - A^M{}_{KN} \cdot d_2 x^N) \cdot d_1 x^K \cdot \mathbf{e}_M + (D_2 l^M{}_K - A^M{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q) \cdot (D_1 l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P) \cdot (\mathbf{I}^L{}_M + \delta^L{}_M)\,. \end{aligned}$$

Разделяя слагаемые по базисным векторам, получим

$$\begin{aligned} &d_2 d_1 x^I = {}_{r}C^I{}_{MK} \cdot d_1 x^M \cdot d_2 x^K + D_2 l^I{}_K \cdot d_1 x^K - A^I{}_{MK} \cdot d_1 x^M \cdot d_2 x^K\,, \\ &d_2 D_1 l^M{}_L - d_2 A^M{}_{LP} \cdot d_1 x^P - A^M{}_{LK} \cdot d_2 d_1 x^K = \\ &\qquad = {}_{r}C^M{}_{LPQ} \cdot d_1 x^P \cdot d_2 x^Q + (D_2 l^M{}_K - A^M{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q) \cdot (D_1 l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P)\,, \\ &d_2 d_1 t^0 = g_{MK} \cdot d_1 x^M \cdot d_2 x^K + (D_1 l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P) \cdot (D_2 l^L{}_K - A^L{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q)\,. \end{aligned}$$

После подстановки первого уравнения во второе и необходимых преобразований, получим уравнения структуры кинематической алгебры в калибровочном поле относительно дифференциалов координат векторов

$$\begin{aligned} d_2 d_1\, {}_{r}x^I &= D_2\, {}_{r}l^I{}_K \cdot d_1\, {}_{r}x^K + F^I{}_{MK} \cdot d_1\, {}_{r}x^M \cdot d_2\, {}_{r}x^K\,, \\ d_2 D_1\, {}_{r}l^M{}_L &= D_2\, {}_{r}l^M{}_K \cdot D_1\, {}_{r}l^K{}_L + A^M{}_{LK} \cdot D_2\, {}_{r}l^K{}_P \cdot d_1\, {}_{r}x^P - A^M{}_{KQ} \cdot d_2\, {}_{r}x^Q \cdot D_1\, {}_{r}l^K{}_L - D_2\, {}_{r}l^M{}_K \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1\, {}_{r}x^P + \\ &\quad + F^M{}_{LPQ} \cdot d_1\, {}_{r}x^P \cdot d_2\, {}_{r}x^Q\,, \\ d_2 d_1 t^0 &= g_{MK} \cdot d_1\, {}_{r}x^M \cdot d_2\, {}_{r}x^K + (D_1\, {}_{r}l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1\, {}_{r}x^P) \cdot (D_2\, {}_{r}l^L{}_K - A^L{}_{KQ} \cdot d_2\, {}_{r}x^Q)\,, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$F^I{}_{MK} = C^I{}_{MK} - A^I{}_{KM}$
$F^M{}_{LPQ} = A^M{}_{LPQ} + A^M{}_{KQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{LK} \cdot F^K{}_{PQ} + {}_{r}C^M{}_{LPQ}$ – объект поля внутренней симметрии.

Здесь использовано обозначение $A^M{}_{LPQ} \cdot dx^Q = dA^M{}_{LP}$.
Введем скалярную функцию s' из условия

$$ds'^2 = d^2 t^0\,.$$

В результате кинематическая алгебра в поле внутренней симметрии снабжается квадратом линейного элемента

$$ds'^2 = g_{MK} \cdot d_{\,r}x^M \cdot d_{\,r}x^K + (D_{\,r}l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_{\,r}x^P) \cdot (D_{\,r}l^L{}_K - A^L{}_{KQ} \cdot d_{\,r}x^Q)\,. \tag{37}$$

Из этого выражения видно, что метрика кинематического пространства в поле внутренней симметрии включает в себя метрику пространства-времени и метрику правых линейных преобразований, поставленных в соответствие точкам пространства-времени. Поэтому имеет место корреляция между пространством кинематической алгебры в поле внутренней симметрии и пространством, рассматриваемым в многомерных обобщениях теории поля.

---

[16] Слагаемые векторы приняты безразмерными.
[17] Далее указание на то, что векторы и координаты относятся к *правой* алгебре, опущены.

VI. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ЛЕВОЙ ВТОРОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ В ПОЛЕ ВНЕШНЕЙ СИММЕТРИИ

Для того, чтобы перейти от левой второй кинематической алгебры к левой второй кинематической алгебре в поле внешней симметрии, необходимо в дифференциалах векторов

$$d_{\,l}\mathbf{x} = {}_l\mathbf{e}_I \cdot d_{\,l}x^I\,, \quad d_{\,l}\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^{K_1}{}_I \cdot d_{\,l}l^I{}_{K_1}\,, \quad d_{\,l}\mathbf{a} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot d_{\,l}l^I{}_{K_1K_2}\,,$$

дифференциалы координат $d_{\,l}l^I{}_{K_1}$ и $d_{\,l}l^I{}_{K_1K_2}$ определять из выражений[18]

$$D_{\,l}l^I{}_{K_1} = d_{\,l}l^I{}_{K_1} + \Gamma^I{}_{K_1K_2} \cdot d_{\,l}x^{K_2}\,, \quad D_{\,l}l^I{}_{K_1K_2} = d_{\,l}l^I{}_{K_1K_2} + \Gamma^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_{\,r}x^{K_2}\,.$$

Уравнение структуры для левой второй кинематической алгебры в поле принимает вид

$$d_2d_1\,{}_l\mathbf{r} = d_2\,{}_l\mathbf{r} \circ d_1\,{}_l\mathbf{r}\,. \tag{38}$$

Подставим в это уравнение выражения дифференциалов векторов через базисные векторы. Вычислим каждое слагаемое правой части уравнения структуры (38), используя таблицу умножения базисных векторов (3). Получим[19]

$$d_2\mathbf{x} \circ d_1\mathbf{x} = (d_2x^I \cdot d_1x^K) \cdot (\mathbf{e}_I \circ \mathbf{e}_K) = (d_2x^I \cdot d_1x^K) \cdot (\mathbf{e}_L \cdot C^L{}_{KI} + \mathbf{I}^P{}_L \cdot C^L{}_{PKI}\,,$$

$$d_2\mathbf{x} \circ d_1\mathbf{l} = (d_2x^K \cdot (D_1l^M{}_I - \Gamma^M{}_{IN} \cdot d_2x^N)) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M) = 0\,, \quad \text{так как} \quad \mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M = 0\,,$$

$$d_2\mathbf{x} \circ d_1\mathbf{a} = (d_2x^K \cdot (D_1l^M{}_{IP} - \Gamma^M{}_{IPN} \cdot d_1x^N)) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{J}^{PI}{}_M) = 0\,, \quad \text{так как} \quad \mathbf{e}_K \circ \mathbf{J}^{PI}{}_M = 0\,,$$

$$d_2\mathbf{l} \circ d_1\mathbf{x} = ((D_2l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1x^M) \cdot (\mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{e}_M) = ((D_2l^K{}_M - \Gamma^K{}_{MN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1x^M) \cdot \mathbf{e}_K\,,$$

$$\begin{aligned} d_2\mathbf{l} \circ d_1\mathbf{l} &= (D_2l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_2x^P) \cdot (D_1l^M{}_I - \Gamma^M{}_{IQ} \cdot d_1x^Q) \cdot (\mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M) = \\ &= (D_2l^K{}_M - \Gamma^K{}_{MP} \cdot d_2x^P) \cdot (D_1l^M{}_I - \Gamma^M{}_{IQ} \cdot d_1x^Q) \cdot (\delta^I{}_K + \mathbf{I}^I{}_K)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2\mathbf{l} \circ d_1\mathbf{a} &= (D_2l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (D_1l^M{}_{IP} - \Gamma^M{}_{IPN} \cdot d_1x^N) \cdot (\mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{J}^{PI}{}_M) = \\ &= (D_2l^K{}_M - \Gamma^K{}_{MQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (D_1l^M{}_{IP} - \Gamma^M{}_{IPN} \cdot d_1x^N) \cdot \mathbf{J}^{PI}{}_K\,, \end{aligned}$$

$$d_2\mathbf{a} \circ d_1\mathbf{x} = ((D_2l^K{}_{LN} - \Gamma^K{}_{LNQ} \cdot d_2x^Q) \cdot d_1x^M) \cdot (\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ \mathbf{e}_M) = ((D_2l^K{}_{LM} - \Gamma^K{}_{LMQ} \cdot d_2x^Q) \cdot d_1x^M) \cdot \mathbf{I}^L{}_K\,,$$

$$\begin{aligned} d_2\mathbf{a} \circ d_1\mathbf{l} &= (D_2l^K{}_{LN} - \Gamma^K{}_{LNP} \cdot d_2x^P) \cdot (D_1l^M{}_I - \Gamma^M{}_{IN} \cdot d_1x^N) \cdot (\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M) = \\ &= (D_2l^K{}_{LM} - \Gamma^K{}_{LMP} \cdot d_2x^P) \cdot (D_1l^M{}_I - \Gamma^M{}_{IN} \cdot d_1x^N) \cdot (\mathbf{J}^{IL}{}_K + \mathbf{e}_K \cdot g^{IL})\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2\mathbf{a} \circ d_1\mathbf{a} &= (D_2l^K{}_{LN} - \Gamma^K{}_{LNP} \cdot d_2x^P) \cdot (D_1l^M{}_{IP} - \Gamma^M{}_{IPS} \cdot d_1x^S) \cdot (\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ \mathbf{J}^{PI}{}_M) = \\ &= (D_2l^K{}_{LM} - \Gamma^K{}_{LMP} \cdot d_2x^P) \cdot (D_1l^M{}_{IP} - \Gamma^M{}_{IPS} \cdot d_1x^S) \cdot (\mathbf{I}^P{}_K \cdot g^{IL} + \delta^P{}_K \cdot g^{IL})\,. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (38) и разделяя уравнение по базисным векторам, получим первое уравнение структуры

$$d_2d_1x^I = D_2l^I{}_K \cdot d_1x^K + T^I{}_{KL} \cdot d_1x^K \cdot d_2x^L + (D_2L^I{}_{MK} - \Gamma^I{}_{MKN} \cdot d_2x^N) \cdot (D_1l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LQ} \cdot d_1x^Q) \cdot g^{LM}\,,$$

где

$$T^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - \Gamma^I{}_{KL} \quad \text{– объект кручения,}$$

второе уравнение структуры

$$\begin{aligned} d_2D_1l^M{}_L - d_2\Gamma^M{}_{LN} \cdot d_1x^N - \Gamma^M{}_{LN} \cdot d_2d_1x^N &= C^M{}_{LIK} \cdot d_1x^I \cdot d_2x^K + (D_2l^M{}_{LK} - \Gamma^M{}_{LKN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1x^K + \\ &+ (D_1l^K{}_L \cdot D_2l^M{}_K - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_1x^P \cdot D_2l^M{}_K - D_1l^K{}_L \cdot \Gamma^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q + \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_1x^P \cdot \Gamma^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q) + \\ &+ (D_1l^K{}_{NL} - \Gamma^K{}_{NLP} \cdot d_1x^P) \cdot (D_2l^M{}_{IK} - \Gamma^M{}_{IKS} \cdot d_2x^S) \cdot g^{NI} \end{aligned}$$

---

[18] Здесь $\Gamma^I{}_{K_1K_2K_3}$ это вторые коэффициенты связности поля внешней симметрии. В современной физике не используются.

[19] Для простоты указания на то, что векторы и координаты относятся к левой алгебре, опущены.

и третье уравнение структуры

$$d_2D_1l^M{}_{IL} - d_2\Gamma^M{}_{ILN}\cdot d_1x^N - \Gamma^M{}_{ILN}\cdot d_2d_1x^N = \\ +(D_2l^M{}_{IK} - \Gamma^M{}_{IKN}\cdot d_2x^N)\cdot(D_1l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LQ}\cdot d_1x^Q) + (D_2l^M{}_K - \Gamma^M{}_{KQ}\cdot d_2x^Q)\cdot(D_1l^K{}_{IL} - \Gamma^K{}_{ILP}\cdot d_1x^P)\,.$$

После подстановки первого уравнения во второе и третье для этих уравнений соответственно получим

$$d_2D_1l^M{}_L = D_2l^M{}_K\cdot D_1l^K{}_L + D_2l^M{}_{LK}\cdot d_1x^K + \Gamma^M{}_{LN}\cdot D_2l^N{}_K\cdot d_1x^K - D_2l^M{}_K\cdot\Gamma^K{}_{LP}\cdot d_1x^P - \\ -\Gamma^M{}_{KQ}\cdot D_1l^K{}_L\cdot d_2x^Q + \Gamma^M{}_{LPQ}\cdot d_1x^P\cdot d_2x^Q + \\ +\Gamma^M{}_{LN}\cdot(D_2l^N{}_{TK} - \Gamma^N{}_{TKP}\cdot d_2x^P)\cdot(D_1l^K{}_S - \Gamma^K{}_{SQ}\cdot d_1x^Q)\cdot g^{ST} + \\ +(D_2l^M{}_{IK} - \Gamma^M{}_{IKQ}\cdot d_2x^Q)\cdot(D_1l^K{}_{NL} - \Gamma^K{}_{NLP}\cdot d_1x^P)\cdot g^{NI}\,,$$

где

$$R^M{}_{LPQ} = \Gamma^M{}_{LP,Q} + \Gamma^M{}_{KQ}\cdot\Gamma^K{}_{LP} + \Gamma^M{}_{LN}\cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ} - \Gamma^M{}_{LPQ}$$

– объект кривизны поля внешней симметрии,

$$d_2D_1l^M{}_{IL} = D_2l^M{}_{IK}\cdot D_1l^K{}_L + D_2l^M{}_K\cdot D_1l^K{}_{IL} + \\ +\Gamma^M{}_{ILN}\cdot D_2l^N{}_K\cdot d_1x^K - \Gamma^M{}_{IKN}\cdot d_2x^N\cdot D_1l^K{}_L - D_2l^M{}_K\cdot\Gamma^K{}_{ILP}\cdot d_1x^P - \\ -D_2l^M{}_{IK}\cdot\Gamma^K{}_{LP}\cdot d_1x^P + \Gamma^M{}_{KQ}\cdot d_2x^Q\cdot D_1l^K{}_{IL} + R^M{}_{ILPQ}\cdot d_1x^P\cdot d_2x^Q + \\ +\Gamma^M{}_{ILN}\cdot(D_2l^N{}_{MK} - \Gamma^N{}_{MKQ}\cdot d_2x^Q)\cdot(D_1l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP}\cdot d_1x^P)\cdot g^{LM}\,,$$

где

$$R^M{}_{ILPQ} = \Gamma^M{}_{ILP,Q} + B^\Gamma{}_{IKQ}\cdot\Gamma^K{}_{LP} + \Gamma^M{}_{KQ}\cdot\Gamma^K{}_{ILP} + \Gamma^M{}_{ILN}\cdot T^N{}_{PQ}$$

– второй объект кривизны поля внешней симметрии. Здесь использовано обозначение $\Gamma^M{}_{ILP,Q}\cdot dx^Q = d\Gamma^M{}_{ILP}$.

Окончательно уравнения структуры для левой второй кинематической алгебры в поле внешней симметрии принимают вид:

первое уравнение структуры

$$d_2d_1x^I = D_2l^I{}_K\cdot d_1x^K + T^I{}_{KL}\cdot d_1x^K\cdot d_2x^L + D_2l^I{}_{MK}\cdot D_1l^K{}_L\cdot g^{LM} - \\ -\Gamma^I{}_{MKN}\cdot d_2x^N\cdot D_1l^K{}_L\cdot g^{LM} - D_2l^I{}_{MK}\cdot\Gamma^K{}_{LQ}\cdot d_1x^Q\cdot g^{LM} + \Gamma^I{}_{MKN}\cdot d_2x^N\cdot\Gamma^K{}_{LQ}\cdot d_1x^Q\cdot g^{LM}\,, \tag{39}$$

где

$$T^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - \Gamma^I{}_{KL} \quad \text{– объект кручения,}$$

второе уравнение структуры

$$d_2D_1l^M{}_L = D_2l^M{}_K\cdot D_1l^K{}_L + D_2l^M{}_{LK}\cdot d_1x^K + \Gamma^M{}_{LN}\cdot D_2l^N{}_K\cdot d_1x^K - D_2l^M{}_K\cdot\Gamma^K{}_{LP}\cdot d_1x^P - \\ -\Gamma^M{}_{KQ}\cdot D_1l^K{}_L\cdot d_2x^Q + R^M{}_{LPQ}\cdot d_1x^P\cdot d_2x^Q + \Gamma^M{}_{LN}\cdot D_2l^N{}_{TK}\cdot D_1l^K{}_S\cdot g^{ST} - \\ -\Gamma^M{}_{LN}\cdot D_2l^N{}_{TK}\cdot\Gamma^K{}_{SQ}\cdot d_1x^Q\cdot g^{ST} - \Gamma^M{}_{LN}\cdot\Gamma^N{}_{TKP}\cdot d_2x^P\cdot D_1l^K{}_S\cdot g^{ST} + \\ +\Gamma^M{}_{LN}\cdot\Gamma^N{}_{TKP}\cdot d_2x^P\cdot\Gamma^K{}_{SQ}\cdot d_1x^Q\cdot g^{ST} + D_2l^M{}_{IK}\cdot D_1l^K{}_{NL}\cdot g^{NI} - D_2l^M{}_{IK}\cdot\Gamma^K{}_{NLP}\cdot d_1x^P\cdot g^{NI} - \\ -\Gamma^M{}_{IKQ}\cdot d_2x^Q\cdot D_1l^K{}_{NL}\cdot g^{NI} + \Gamma^M{}_{IKQ}\cdot d_2x^Q\cdot\Gamma^K{}_{NLP}\cdot d_1x^P\cdot g^{NI}\,, \tag{40}$$

где

$R^M{}_{LPQ} = \Gamma^M{}_{LPQ} + \Gamma^M{}_{KQ}\cdot\Gamma^K{}_{LP} + \Gamma^M{}_{LN}\cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ} - \Gamma^M{}_{LPQ}$ – объект кривизны поля внешней симметрии,

третье уравнение структуры

$$d_2D_1l^M{}_{IL} = D_2l^M{}_{IK}\cdot D_1l^K{}_L + D_2l^M{}_K\cdot D_1l^K{}_{IL} + \Gamma^M{}_{ILN}\cdot D_2l^N{}_K\cdot d_1x^K - \Gamma^M{}_{IKN}\cdot d_2x^N\cdot D_1l^K{}_L - \\ -D_2l^M{}_K\cdot\Gamma^K{}_{ILP}\cdot d_1x^P - D_2l^M{}_{IK}\cdot\Gamma^K{}_{LP}\cdot d_1x^P - \Gamma^M{}_{KQ}\cdot d_2x^Q\cdot D_1l^K{}_{IL} + R^M{}_{ILPQ}\cdot d_1x^P\cdot d_2x^Q + \\ +\Gamma^M{}_{ILN}\cdot D_2l^N{}_{MK}\cdot D_1l^K{}_L\cdot g^{LM} - \Gamma^M{}_{ILN}\cdot D_2l^N{}_{MK}\cdot\Gamma^K{}_{LP}\cdot d_1x^P\cdot g^{LM} - \\ -\Gamma^M{}_{ILN}\cdot\Gamma^N{}_{MKQ}\cdot d_2x^Q\cdot D_1l^K{}_L\cdot g^{LM} + \Gamma^M{}_{ILN}\cdot\Gamma^N{}_{MKQ}\cdot d_2x^Q\cdot\Gamma^K{}_{LP}\cdot d_1x^P\cdot g^{LM}\,, \tag{41}$$

где

$$R^M{}_{ILPQ} = \Gamma^M{}_{ILP,Q} + \Gamma^M{}_{IKQ} \cdot \Gamma^K{}_{LP} + \Gamma^M{}_{KQ} \cdot \Gamma^K{}_{ILP} + \Gamma^M{}_{ILN} \cdot T^N{}_{PQ}$$

– второй объект кривизны поля внешней симметрии. Здесь введено обозначение $\Gamma^M{}_{ILP,Q} \cdot dx^Q = d\Gamma^M{}_{ILP}$.

К этим уравнениям необходимо добавить проекцию уравнения (38) на скалярное направление

$$\begin{aligned} d_2 d_1 r^0 \ = \ & g_{KL} \cdot d_1 x^K \cdot d_2 x^L + (D_1 l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P) \cdot (D_2 l^L{}_K - \Gamma^L{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q) + \\ & + (D_1 l^K{}_{LM} - \Gamma^K{}_{LMP} \cdot d_1 x^P) \cdot (D_2 l^M{}_{IK} - \Gamma^M{}_{IKS} \cdot d_2 x^S) \cdot g^{LI} \, . \end{aligned} \tag{42}$$

1. Частный случай

Приведем уравнения структуры левой второй кинематической алгебры в поле в поле внешней симметрии для частного случая, когда, во-первых, вторые коэффициенты связности поля внешней симметрии равны нулю

$$\Gamma^K{}_{LMP} = 0$$

и, во-вторых, для частного случая таблицы умножений базисных векторов (4). При этом уравнения структуры левой второй кинематической алгебры в поле внешней симметрии принимают вид:

первое уравнение

$$d_2 d_1 x^I = D_2 l^I{}_K \cdot d_1 x^K + T^I{}_{KL} \cdot d_1 x^K \cdot d_2 x^L \, ,$$

где

$$T^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - \Gamma^I{}_{KL} \quad \text{– объект кручения,}$$

второе уравнение

$$\begin{aligned} & d_2 D_1 l^M{}_L = D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_{LK} \cdot d_1 x^K + \\ & + \Gamma^M{}_{LN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot d_1 x^K - D_2 l^M{}_K \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P - \\ & - \Gamma^M{}_{KQ} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot d_2 x^Q + R^M{}_{LPQ} \cdot d_1 x^P \cdot d_2 x^Q \, , \end{aligned}$$

где

$$R^M{}_{LPQ} = \Gamma^M{}_{LP,Q} + \Gamma^M{}_{KQ} \cdot \Gamma^K{}_{LP} + \Gamma^M{}_{LN} \cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ} \quad \text{– объект кривизны поля внешней симметрии,}$$

третье уравнение

$$d_2 D_1 l^M{}_{IL} = D_2 l^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_{IL} - D_2 l^M{}_{IK} \cdot \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P - \Gamma^M{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q \cdot D_1 l^K{}_{IL} \, .$$

К этим уравнениям необходимо добавить проекцию уравнения (43) на скалярное направление

$$d_2 d_1 r^0 = g_{KL} \cdot d_1 x^K \cdot d_2 x^L + (D_1 l^K{}_L - \Gamma^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P) \cdot (D_2 l^L{}_K - \Gamma^L{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q) \, .$$

VII. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ПРАВОЙ ВТОРОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ В ПОЛЕ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ

Для того, чтобы перейти от правой второй кинематической алгебры к правой второй кинематической алгебре в поле внутренней симметрии, необходимо в дифференциалах векторов

$$d_r \mathbf{x} = {}_r\mathbf{e}_I \cdot d_r x^I \, , \quad d_r \mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^{K_1}{}_I \cdot d_r l^I{}_{K_1} \, , \quad d_r \mathbf{a} = {}_r\mathbf{J}^{K_2 K_1}{}_I \cdot d_r l^I{}_{K_1 K_2} \, ,$$

дифференциалы координат $d_r l^I{}_{K_1}$ и $d_r l^I{}_{K_1 K_2}$ определять из выражений[20]

$$D_r l^I{}_{K_1} = d_r l^I{}_{K_1} + A^I{}_{K_1 K_2} \cdot d_r x^{K_2} \, , \quad D_r l^I{}_{K_1 K_2} = d_r l^I{}_{K_1 K_2} + B^I{}_{K_1 K_2 K_3} \cdot d_r x^{K_2} \, .$$

[20] Здесь $B^I{}_{K_1 K_2 K_3}$ это вторые потенциалы поля внутренней симметрии. В современной физике не используются.

Уравнение структуры для правой второй кинематической алгебры в поле принимает вид

$$d_2 d_{1\,r}\mathbf{r} = d_{1\,r}\mathbf{r} \circ d_{2\,r}\mathbf{r}\,. \tag{43}$$

Подставим в это уравнение выражения дифференциалов векторов через базисные векторы. Вычислим каждое слагаемое правой части уравнения структуры (43), используя таблицу умножения базисных векторов (5). Получим[21]

$$d_1\mathbf{x} \circ d_2\mathbf{x} = (d_1x^I \cdot d_2x^K) \cdot (\mathbf{e}_I \circ \mathbf{e}_K) = (d_1x^I \cdot d_2x^K) \cdot (\mathbf{e}_L \cdot C^L{}_{IK} + \mathbf{I}^M{}_L \cdot C^L{}_{MIK}\,,$$

$$d_1\mathbf{x} \circ d_2\mathbf{l} = (d_1x^K \cdot (D_2l^M{}_I - A^M{}_{IN} \cdot d_2x^N)) \cdot (\mathbf{e}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M) = ((D_2l^M{}_K - A^M{}_{KN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1x^K) \cdot \mathbf{e}_M\,,$$

$$d_1\mathbf{x} \circ d_2\mathbf{a} = (d_1x^K \cdot (D_2l^M{}_{IK} - B^M{}_{IKN} \cdot d_2x^N)) \cdot \mathbf{I}^I{}_M\,,$$

$$d_1\mathbf{l} \circ d_2\mathbf{x} = 0\,, \quad \text{так как} \quad \mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{e}_M = 0\,,$$

$$\begin{aligned} d_1\mathbf{l} \circ d_2\mathbf{l} &= (D_1l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P) \cdot (D_2l^M{}_I - A^M{}_{IQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (\mathbf{I}^L{}_K \circ \mathbf{I}^I{}_M) = \\ &(D_1l^K{}_L \cdot D_2l^M{}_K - A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P \cdot D_2l^M{}_K - D_1l^K{}_L \cdot A^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q + A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P \cdot A^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (\delta^L{}_M + \mathbf{I}^L{}_M)\,, \end{aligned}$$

$$d_1\mathbf{l} \circ d_2\mathbf{a} = (D_1l^K{}_L - A^K{}_{LQ} \cdot d_1x^Q) \cdot (D_2l^M{}_{IK} - F^M{}_{IKN} \cdot d_2x^N) \cdot (\mathbf{J}^{LI}{}_M + \mathbf{e}_M \cdot g^{LI})\,,$$

$$d_1\mathbf{a} \circ d_2\mathbf{x} = 0\,, \quad \text{так как} \quad \mathbf{J}^{NL}{}_K \circ \mathbf{e}_M = 0\,,$$

$$d_1\mathbf{a} \circ d_2\mathbf{l} = (D_1l^K{}_{LN} - B^K{}_{LNP} \cdot d_1x^P) \cdot (D_2l^M{}_K - A^M{}_{KN} \cdot d_2x^N) \cdot \mathbf{J}^{NL}{}_M\,,$$

$$d_1\mathbf{a} \circ d_2\mathbf{a} = (D_1l^K{}_{LN} - B^K{}_{LNP} \cdot d_1x^P) \cdot (D_2l^M{}_{IK} - B^M{}_{IKS} \cdot d_2x^S) \cdot (\mathbf{I}^N{}_M \cdot g^{LI} + \delta^N{}_M \cdot g^{LI})\,.$$

Подставляя полученные выражения в (43) и разделяя уравнение по базисным векторам, получим первое уравнение структуры

$$d_2d_1x^I = D_2l^I{}_K \cdot d_1x^K + F^I{}_{KL} \cdot d_1x^K \cdot d_2x^L + (D_2L^I{}_{MK} - B^I{}_{MKN} \cdot d_2x^N) \cdot (D_1l^K{}_L - A^K{}_{LQ} \cdot d_1x^Q) \cdot g^{LM}\,,$$

где

$$F^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - A^I{}_{KL}\,,$$

второе уравнение структуры

$$\begin{aligned} d_2D_1l^M{}_L - d_2A^M{}_{LN} \cdot d_1x^N - A^M{}_{LN} \cdot d_2d_1x^N &= C^M{}_{LIK} \cdot d_1x^I \cdot d_2x^K + (D_2l^M{}_{LK} - B^M{}_{LKN} \cdot d_2x^N) \cdot d_1x^K + \\ &+ (D_1l^K{}_L \cdot D_2l^M{}_K - A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P \cdot D_2l^M{}_K - D_1l^K{}_L \cdot A^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q + A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P \cdot A^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q) + \\ &+ (D_1l^K{}_{NL} - B^K{}_{NLP} \cdot d_1x^P) \cdot (D_2l^M{}_{IK} - B^M{}_{IKS} \cdot d_2x^S) \cdot g^{NI} \end{aligned}$$

и третье уравнение структуры

$$\begin{aligned} &d_2D_1l^M{}_{IL} - d_2B^M{}_{ILN} \cdot d_1x^N - B^M{}_{ILN} \cdot d_2d_1x^N = \\ &+ (D_2l^M{}_{IK} - B^M{}_{IKN} \cdot d_2x^N) \cdot (D_1l^K{}_L - A^K{}_{LQ} \cdot d_1x^Q) + (D_2l^M{}_K - A^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (D_1l^K{}_{IL} - B^K{}_{ILP} \cdot d_1x^P)\,. \end{aligned}$$

После подстановки первого уравнения во второе и третье для этих уравнений соответственно получим

$$\begin{aligned} d_2D_1l^M{}_L = D_2l^M{}_K \cdot D_1l^K{}_L &+ D_2l^M{}_{LK} \cdot d_1x^K + A^M{}_{LN} \cdot D_2l^N{}_K \cdot d_1x^K - D_2l^M{}_K \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P - \\ &- A^M{}_{KQ} \cdot D_1l^K{}_L \cdot d_2x^Q + B^M{}_{LPQ} \cdot d_1x^P \cdot d_2x^Q + \\ &+ A^M{}_{LN} \cdot (D_2l^N{}_{TK} - B^N{}_{TKP} \cdot d_2x^P) \cdot (D_1l^K{}_S - A^K{}_{SQ} \cdot d_1x^Q) \cdot g^{ST} + \\ &+ (D_2l^M{}_{IK} - B^M{}_{IKQ} \cdot d_2x^Q) \cdot (D_1l^K{}_{NL} - B^K{}_{NLP} \cdot d_1x^P) \cdot g^{NI}\,, \end{aligned}$$

где

$$F^M{}_{LPQ} = A^M{}_{LPQ} + A^M{}_{KQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{LN} \cdot T^N{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ} - B^M{}_{LPQ} \quad \text{– объект поля внутренней симметрии}\,,$$

[21] Для простоты указания на то, что векторы и координаты относятся к правой алгебре, опущены.

$$\begin{aligned} d_2 D_1 l^M{}_{IL} = {} & D_2 l^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_{IL} + \\ & + B^M{}_{ILN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot d_1 x^K - B^M{}_{IKN} \cdot d_2 x^N \cdot D_1 l^K{}_L - D_2 l^M{}_K \cdot B^K{}_{ILP} \cdot d_1 x^P - \\ & - D_2 l^M{}_{IK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P + A^M{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q \cdot D_1 l^K{}_{IL} + F^M{}_{ILPQ} \cdot d_1 x^P \cdot d_2 x^Q + \\ & + B^M{}_{ILN} \cdot (D_2 l^N{}_{MK} - B^N{}_{MKQ} \cdot d_2 x^Q) \cdot (D_1 l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P) \cdot g^{LM} , \end{aligned}$$

где

$$F^M{}_{ILPQ} = B^M{}_{ILPQ} + B^M{}_{IKQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{KQ} \cdot B^K{}_{ILP} + B^M{}_{ILN} \cdot F^N{}_{PQ}$$

– второй объект поля внутренней симметрии. Здесь использовано обозначение $B^M{}_{ILP,Q} \cdot dx^Q = dB^M{}_{ILP}$.

Окончательно уравнения структуры для правой второй кинематической алгебры в поле внутренней симметрии принимают вид:

первое уравнение структуры

$$\begin{aligned} & d_2 d_1 x^I = D_2 l^I{}_K \cdot d_1 x^K + F^I{}_{KL} \cdot d_1 x^K \cdot d_2 x^L + D_2 l^I{}_{MK} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} - \\ & - B^I{}_{MKN} \cdot d_2 x^N \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} - D_2 l^I{}_{MK} \cdot A^K{}_{LQ} \cdot d_1 x^Q \cdot g^{LM} + B^I{}_{MKN} \cdot d_2 x^N \cdot A^K{}_{LQ} \cdot d_1 x^Q \cdot g^{LM} , \end{aligned} \tag{44}$$

где

$$F^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - A^I{}_{KL} ,$$

второе уравнение структуры

$$\begin{aligned} d_2 D_1 l^M{}_L = {} & D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_{LK} \cdot d_1 x^K + A^M{}_{LN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot d_1 x^K - D_2 l^M{}_K \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P - \\ & - A^M{}_{KQ} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot d_2 x^Q + F^M{}_{LPQ} \cdot d_1 x^P \cdot d_2 x^Q + A^M{}_{LN} \cdot D_2 l^N{}_{TK} \cdot D_1 l^K{}_S \cdot g^{ST} - \\ & - A^M{}_{LN} \cdot D_2 l^N{}_{TK} \cdot A^K{}_{SQ} \cdot d_1 x^Q \cdot g^{ST} - A^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot d_2 x^P \cdot D_1 l^K{}_S \cdot g^{ST} + \\ & + A^M{}_{LN} \cdot B^N{}_{TKP} \cdot d_2 x^P \cdot A^K{}_{SQ} \cdot d_1 x^Q \cdot g^{ST} + D_2 l^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K{}_{NL} \cdot g^{NI} - D_2 l^M{}_{IK} \cdot B^K{}_{NLP} \cdot d_1 x^P \cdot g^{NI} - \\ & - B^M{}_{IKQ} \cdot d_2 x^Q \cdot D_1 l^K{}_{NL} \cdot g^{NI} + B^M{}_{IKQ} \cdot d_2 x^Q \cdot B^K{}_{NLP} \cdot d_1 x^P \cdot g^{NI} , \end{aligned} \tag{45}$$

где

$F^M{}_{LPQ} = A^M{}_{LPQ} + A^M{}_{KQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{LN} \cdot F^N{}_{PQ} + C^M{}_{LPQ} - B^M{}_{LPQ}$ – объект поля внутренней симметрии,

третье уравнение структуры

$$\begin{aligned} d_2 D_1 l^M{}_{IL} = {} & D_2 l^M{}_{IK} \cdot D_1 l^K{}_L + D_2 l^M{}_K \cdot D_1 l^K{}_{IL} + B^M{}_{ILN} \cdot D_2 l^N{}_K \cdot d_1 x^K - B^M{}_{IKN} \cdot d_2 x^N \cdot D_1 l^K{}_L - \\ & - D_2 l^M{}_K \cdot B^K{}_{ILP} \cdot d_1 x^P - D_2 l^M{}_{IK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P - A^M{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q \cdot D_1 l^K{}_{IL} + F^M{}_{ILPQ} \cdot d_1 x^P \cdot d_2 x^Q + \\ & + B^M{}_{ILN} \cdot D_2 l^N{}_{MK} \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} - B^M{}_{ILN} \cdot D_2 l^N{}_{MK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P \cdot g^{LM} - \\ & - B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot d_2 x^Q \cdot D_1 l^K{}_L \cdot g^{LM} + B^M{}_{ILN} \cdot B^N{}_{MKQ} \cdot d_2 x^Q \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P \cdot g^{LM} , \end{aligned} \tag{46}$$

где

$$F^M{}_{ILPQ} = B^M{}_{ILPQ} + B^M{}_{IKQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{KQ} \cdot B^K{}_{ILP} + B^M{}_{ILN} \cdot F^N{}_{PQ}$$

– второй объект поля внутренней симметрии. Здесь введено обозначение $B^M{}_{ILP,Q} \cdot dx^Q = dB^M{}_{ILP}$.

К этим уравнениям необходимо добавить проекцию уравнения (43) на скалярное направление

$$\begin{aligned} d_2 d_1 r^0 \; = \; & g_{KL} \cdot d_1 x^K \cdot d_2 x^L + (D_1 l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1 x^P) \cdot (D_2 l^L{}_K - A^L{}_{KQ} \cdot d_2 x^Q) + \\ & + (D_1 l^K{}_{LM} - B^K{}_{LMP} \cdot d_1 x^P) \cdot (D_2 l^M{}_{IK} - B^M{}_{IKS} \cdot d_2 x^S) \cdot g^{LI} . \end{aligned} \tag{47}$$

1. Частный случай

Для частного случая таблицы умножений базисных векторов (4) уравнения структуры правой второй кинематической алгебры в поле внутренней симметрии принимают вид:

первое уравнение

$$d_2d_1x^I = D_2l^I{}_K \cdot d_1x^K + F^I{}_{KL} \cdot d_1x^K \cdot d_2x^L\,,$$

где

$$F^I{}_{KL} = C^I{}_{KL} - A^I{}_{KL}\,,$$

второе уравнение

$$\begin{aligned}&d_2D_1l^M{}_L = D_2l^M{}_K \cdot D_1l^K{}_L + D_2l^M{}_{LK} \cdot d_1x^K +\\&+A^M{}_{LN} \cdot D_2l^N{}_K \cdot d_1x^K - D_2l^M{}_K \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P -\\&-A^M{}_{KQ} \cdot D_1l^K{}_L \cdot d_2x^Q + F^M{}_{LPQ} \cdot d_1x^P \cdot d_2x^Q\,,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&F^M{}_{LPQ} = A^M{}_{LPQ} + A^M{}_{KQ} \cdot A^K{}_{LP} + A^M{}_{LN} \cdot F^N{}_{PQ}+\\&+C^M{}_{LPQ}\end{aligned}$$

– объект поля внутренней симметрии,

третье уравнение

$$\begin{aligned}&d_2D_1l^M{}_{IL} = D_2l^M{}_{IK} \cdot D_1l^K{}_L + D_2l^M{}_K \cdot D_1l^K{}_{IL}-\\&-D_2l^M{}_{IK} \cdot A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P - A^M{}_{KQ} \cdot d_2x^Q \cdot D_1l^K{}_{IL}\,.\end{aligned}$$

К этим уравнениям необходимо добавить проекцию уравнения (43) на скалярное направление

$$\begin{aligned}&d_2d_1r^0 = g_{KL} \cdot d_1x^K \cdot d_2x^L+\\&+(D_1l^K{}_L - A^K{}_{LP} \cdot d_1x^P) \cdot (D_2l^L{}_K - A^L{}_{KQ} \cdot d_2x^Q)\,.\end{aligned}$$

VIII. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Представление о кинематическом поле позволяет дать общую и прозрачную формулировку принципа эквивалентности. Пусть дано движение $f\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ или $\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$. Оно определяется функциональной зависимостью векторов $\mathbf{y} \in \mathbb{X}'$ движущегося пространства от векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ системы отсчета

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})\,.$$

В малом эта зависимость дается рядом Тейлора (18). Далее воспользуемся разложением в ряд Тейлора зависимости координат векторов движущегося пространства от координат векторов системы отсчета (19)

$$\begin{aligned}&y^I(x+dx) = y^I(x) + l^I{}_K \cdot dx^K +\\&+l^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} +\\&+l^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \ldots\,.\end{aligned}$$

Пусть в начале движения движущееся пространство совпадает с системой отсчета, то есть

$$y^I(x) = \delta^I{}_K \cdot x^K\,.$$

Таким образом, в этом случае движение задается рядом Тейлора следующего вида:

$$\begin{aligned}&y^I(x+dx) = \delta^I{}_K \cdot x^K + l^I{}_K \cdot dx^K +\\&+l^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} +\\&+l^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \ldots\,.\end{aligned}$$

Запишем его иначе

$$\begin{aligned}&y^I(x+dx) = \delta^I{}_K \cdot x^K + Dy^I +\\&+Dl^I{}_K \cdot dx^K +\\&+Dl^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \ldots\,.\end{aligned}$$

Далее воспользуемся формулами (20), (21) и (22), выражающими коэффициенты ряда Тейлора через параметры кинематического поля

$$\begin{aligned}&y^I(x+dx) = \delta^I{}_K \cdot x^K + l^I{}_K \cdot dx^K +\\&+(d_l l^I{}_{K_1} + {}_l l^I{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2}) \cdot dx^{K_1} +\\&+(d_l l^I{}_{K_1K_2} + {}_l l^I{}_K \cdot R^K{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3}) \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \ldots\,.\end{aligned}$$

Эта форма записи позволяет говорить о движении пространства $\mathbb{X}'$ в кинематическом поле.

Назовем движение пространства $\mathbb{X}'$ в кинематическом поле *свободным*, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&l^I{}_K = \delta^I{}_K\\&d_l l^I{}_{K_1} + {}_l l^I{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2} = 0\,,\\&d_l l^I{}_{K_1K_2} + {}_l l^I{}_K \cdot R^K{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3} = 0\,.\end{aligned} \tag{48}$$

В этом случае описание движения пространства $\mathbb{X}'$ сводится к формуле

$$y^I(x+dx) = \delta^I{}_K \cdot (x^K + dx^K)\,, \tag{49}$$

то есть, движение пространства $\mathbb{X}'$ представляет собой сдвиг системы отсчета.

Таким образом, пространство, движущееся свободно в кинематическом поле, эквивалентно системе отсчета. Этот тезис и есть так называемый *принцип эквивалентности.*

Дадим следующие определения:

- условие $l^I{}_K = \delta^I{}_K$ – назовем первым соотношением принципа эквивалентности;
- условие $d_l l^I{}_{K_1} + {}_l l^I{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2} = 0$ – назовем вторым соотношением принципа эквивалентности[22];
- условие $d_l l^I{}_{K_1K_2} + {}_l l^I{}_K \cdot R^K{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3} = 0$ – назовем третьим соотношением принципа эквивалентности.

---

[22] В частном случае это соотношение сводится к общеизвестному принципу эквивалентности, который вводится в теории гравитации.

IX. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Вторая кинематическая алгебра включает в себя векторное пространство $\mathbb{A}$ линейных преобразований $\mathbf{a}\colon \mathbb{X}\to\mathbb{L}$. Она может быть обобщена до третьей кинематической алгебры, включающей в себя векторное пространство $\mathbb{B}$ линейных преобразований $\mathbf{b}\colon \mathbb{X}\to\mathbb{A}$. Кинематические алгебры различных порядков необходимы для описания движения $\mathbf{f}\colon \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ общего вида.

- Постулируем существование *вторых промежуточных физических объектов*. Вторые промежуточные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны векторному пространству $\mathbb{A}$ линейных преобразований $\mathbf{a}\colon \mathbb{X}\to\mathbb{L}$. Следует предположить существование промежуточных частиц второго рода, реализующих представление о вторых промежуточных физических объектах.

- Вторые промежуточные физические объекты взаимодействуют с фундаментальными физическими объектами. Результатом этого взаимодействия является промежуточный физический объект.

- Кинематическое поле в общем понимании – это поле векторов движущегося пространства, поставленных в соответствие точкам системы отсчета, то есть это поле $\mathbf{y}(\mathbf{x})$. В детальном определении кинематическое поле – это поле коэффициентов разложения функции $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора. Это поля

  1) линейных преобразований $\mathbf{l}(\mathbf{x})$, ${l^I}_K(x)$,

  2) вторых линейных преобразований $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, ${l^I}_{K_1K_2}(x)$,

  3) третьих линейных преобразований $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, ${l^I}_{K_1K_2K_3}(x)$.

- Движение пространства представляется кинематическими алгебрами различных порядков. В общем случае эти кинематические алгебры являются некоммутативными. Поэтому представление движения с помощью ряда Тейлора существует в двух модификациях: левые и правые представления. Отсюда возникает необходимость различать левые и правые кинематические поля. Левое кинематическое поле определено как *кинематическое поле внешней симметрии*. Правое кинематическое поле определено как *кинематическое поле внутренней симметрии*.

- Кинематическое поле внешней симметрии (левое кинематическое поле) представляется:

  1) полем левых линейных преобразований ${}_l{l^I}_K(x)$; левые линейные преобразования определены как алгебра внешней симметрии ${}_l\mathbb{L}$; в свою очередь алгебра внешней симметрии ${}_l\mathbb{L}$ является линейной частью кинематической группы внешней симметрии ${}_l\mathbb{G}$;

  2) полем левых вторых линейных преобразований ${}_l{l^I}_{K_1K_2}(x)$ или полем коэффициентов связности ${\Gamma^K}_{K_1K_2}(x)$;

  3) полем левых третьих линейных преобразований ${}_l{l^I}_{K_1K_2K_3}(x)$ или полем объекта кривизны ${R^K}_{K_1K_2K_3}(x)$.

- Кинематическое поле внутренней симметрии (правое кинематическое поле) представляется:

  1) полем правых линейных преобразований ${}_r{l^I}_K(x)$; правые линейные преобразования определены как алгебра внутренней симметрии ${}_r\mathbb{L}$; в свою очередь алгебра внутренней симметрии ${}_r\mathbb{L}$ является линейной частью кинематической группы внутренней симметрии ${}_r\mathbb{G}$;

  2) полем правых вторых линейных преобразований ${}_r{l^I}_{K_1K_2}(x)$ потенциалом поля внутренней симметрии ${A^I}_{I_1K_2}(x)$;

  3) полем правых третьих линейных преобразований ${}_r{l^I}_{K_1K_2K_3}(x)$ или объектом поля внутренней симметрии ${F^I}_{I_1K_2K_3}(x)$.

- Представление о кинематическом поле позволяет дать общую и прозрачную формулировку принципа эквивалентности. Пространство, движущееся свободно в кинематическом поле, эквивалентно системе отсчета. Условием указанного свободного движения является выполнение соотношений (48).

Часть 2

Искривленное пространство

Глава 2.1 Начальное представление об искривленном пространстве

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В Главе 1.1. введено представление о системе отсчета СТО как о векторном пространстве. Реализацией геометрической части векторного пространства системы отсчета X могут служить абсолютно твердые тела и их сдвиги. Находясь в гравитационном поле, абсолютно твердые тела испытывают силовое воздействие.

Другим - *искривленным* - геометрическим векторным пространством Y могут служить пылевые образования, находящиеся в гравитационном поле. Сдвиг пылевых образований сопровождается их деформацией. Однако эти деформации обнаруживаются только с помощью абсолютно твердых тел. Обнаружить деформацию исследуемого пылевого образования, используя другое пылевое образование, нельзя.

Между силами, действующими на абсолютно твердые тела, и деформациями пылевого образования существует взаимосвязь.

Отсюда возникает следующая математическая конструкция, предназначенная для исследования поведения тел в силовом поле. На одном и том же точечно-событийном многообразии определены две группы сдвигов, которые обозначены G_x и G_y. Движение точки-события под действием одного либо другого типа сдвигов приводит к разным типам линий сдвигов, разным типам векторов и разным типам векторных пространств, которые обозначим X и Y. Требование измеряемости пространств приводит к необходимости введения двух типов скалярных произведений, соответственно в пространствах X и Y.

При этом ставится задача представления группы сдвигов, векторов, закона сложения векторов, закона умножения вектора на число, скалярного произведения одного пространства, например Y, с помощью средств второго пространства, например X. Исследуемое пространство Y названо *искривленным пространством*, а пространство-инструмент X, с помощью которого осуществляется представление (исследование) пространства Y, названо *системой отсчета.* Так как заранее неясно, да и несущественно, какое из пространств выбрано за систему отсчета, то решение указанной задачи составляет *общую теорию относительности.*

II. СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Напомним последовательность рассуждений, которая приводит к представлению о пространстве-времени как о векторном пространстве. Сначала пространство-время выступает как неоформленное множество точек-событий. Затем на этом множестве вводится отношение порядка, выражаемое словами *дальше*, *ближе* для точек и *раньше*, *позже* для событий. Обозначим это отношение порядка R_x.

Далее. Из всех движений (преобразований) множества точек-событий выделяются те, которые составляют непрерывную абелеву просто-транзитивную группу – группу сдвигов. Обозначим эту группу G_x. Точка-событие, совершающая движение под действием непрерывного преобразования группы сдвигов, пересекает множество точек-событий, называемое линией сдвигов. В рассматриваемом случае назовем линию сдвигов *прямой.* Направленный отрезок прямой между двумя точками-событиями определяется как вектор, обозначаемый символом *синего* цвета

$$\mathbf{x}\,.$$

Композиции двух сдвигов соответствует закон сложения векторов

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\,.$$

Композиции нескольких (n) одинаковых сдвигов соответствует умножение вектора на число

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \cdot n\,.$$

Таким образом, пространство-время выступает как векторное пространство. Обозначим его X.

С введением векторного пространства в рассмотрение входят такие понятия как *базисные векторы*

$$\mathbf{e}_1\,, \quad \mathbf{e}_2\,, \quad \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{e}_4\,,$$

размерность пространства, *координаты* точек-событий

$$x^1\,, \quad x^2\,, \quad x^3\,, \quad x^4$$

и разложение вектора по базисным векторам

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot x^k\,.$$

Числа x^k, поставленные в соответствие точкам-событиям пространства-времени X, названы *нормальной системой координат*. Каждая из нормальных систем координат в X обладает следующими инвариантными свойствами:

1) *координатные* линии – линии, вдоль которых меняется только одна из координат,– являются прямыми;

2) сложение сдвигов (векторов) записывается через сложение координат граничных точек и событий векторов, которые приводятся в соприкосновение в результате слагаемых движений:

$$x'^k = x^k + a^k .$$

1. Прямая в нормальной системе координат

Пусть $\mathbf{e}$ – базисный вектор вдоль некоторой прямой. Тогда уравнение этой прямой имеет вид

$$\mathbf{x}(x) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{e} \cdot x \,. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{x}_0$ – начальный вектор, от которого отсчитывается прямая, x – нормальная координата точки-события на прямой. Векторы $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{e}$ не зависят от нормальной координаты x. Пусть

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_k \cdot k^k \,,$$

где $k^i \in \mathbb{R}$ – проекции базисного вектора $\mathbf{e}$ на базисные векторы $\mathbf{e}_k$. Тогда

$$\mathbf{x}(x) = \mathbf{e}_k \cdot (x_0^k + k^k \cdot x)$$

и уравнение прямой по отношению к нормальным координатам имеет вид

$$x^k(x) = x_0^k + k^k \cdot x \,.$$

2. Дифференциал в системе отсчета

В векторном пространстве X введем дифференциал d как бесконечно малое приращение при бесконечно малом приращении $d\mathbf{x}$ вектора $\mathbf{x}$. Например, dx – это бесконечно малое приращение нормальной координаты, соответствующее $d\mathbf{x}$. В уравнении прямой (1) векторы $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{e}$ не меняются при изменении вектора $\mathbf{x}$ или нормальной координаты x, другими словами эти векторы являются постоянными. Поэтому

$$d\mathbf{x}_0 = 0 \,, \quad d\mathbf{e} = 0 \,.$$

Здесь важно отметить, что понятие *постоянная величина* является *относительным*, а именно это понятие устанавливается по отношению к дифференциалу d в системе отсчета.

Так как вектор $\mathbf{x}$ является аргументом, то есть независимой величиной, то

$$d^2\mathbf{x} = 0 \,.$$

Нормальные координаты являются линейными функциями вектора, поэтому

$$d^2x = 0 \,, \quad d^2x^k = 0 \,.$$

Отсюда следует, что нормальные координаты в X в свою очередь можно рассматривать как аргументы.

3. Система отсчета как евклидово пространство

Для того, чтобы из всех движений пространства-времени СТО X выделить повороты и бусты, необходимо рассматривать пространство-время СТО X как евклидово пространство. Векторное пространство X выступает как евклидово пространство благодаря тому, что оно снабженно *скалярным умножением* векторов, которое каждой паре векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из X ставит в соответствие число[1]

$$\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}$$

– скалярное произведение.

Скалярное умножение обладает следующими свойствами:

1) скалярное произведение не зависит от порядка используемых сомножителей;

2) скалярное умножение связано с законами векторного пространства[2] следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} (a \cdot \mathbf{x_2}) \cdot \mathbf{x_1} = \mathbf{x_2} \cdot (a \cdot \mathbf{x_1}) = a \cdot (\mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_1}) \,, \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_2 \,. \end{gathered} \qquad (2)$$

Пусть векторы, участвующие в скалярном произведении, записаны через базисные векторы

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_{k_2} \cdot {x_1}^{k_2} \,, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_{k_1} \cdot {x_2}^{k_1} \,.$$

Здесь $k_1 \,, k_2 = 1, 2, 3, 4$. Тогда в силу (2) имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = (\mathbf{e}_{k_2} \cdot {x_2}^{k_2}) \cdot (\mathbf{e}_{k_1} \cdot {x_1}^{k_1}) = \\ (\mathbf{e}_{k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_1}) \cdot {x_2}^{k_2} \cdot {x_1}^{k_1} = g_{k_2 k_1} \cdot {x_2}^{k_2} \cdot {x_1}^{k_1} \,. \end{gathered}$$

Величина

$$g_{k_1 k_2} = \mathbf{e}_{k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_1} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2}$$

представляет собой *метрический тензор* системы отсчета. Метрический тензор $g_{k_1 k_2}$ есть величина постоянная.[3]

---

[1] Здесь векторы и координаты полагаются безрамерными.

[2] сложением векторов и умножением вектора на число.

[3] Здесь также нужно отметить, что постоянство метрического тензора $g_{k_1 k_2}$ означает только то, что

$$dg_{k_1 k_2} = 0 \,.$$

Квадрат длины четырехмерного вектора системы отсчета записывается следующим образом:

$$x^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x^{k_2} \cdot x^{k_1} \cdot g_{k_1 k_2} \,.$$

Скалярные произведения базисных векторов системы отсчета удобно подчинить *условию ортонормированности*

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1\,, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1\,, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1\,, \\ &\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = -1\,, \quad \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} = 0 \quad \text{для} \quad k_1 \neq k_2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

В этом случае метрический тензор системы отсчета принимает вид:

$$g_{k_1 k_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

В ортонормированном базисе квадрат длины вектора в системе отсчета приобретает вид

$$x^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (c \cdot t)^2 \,.$$

III. ИСКРИВЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Приведем последовательность рассуждений, которая приводит к представлению о пространстве-времени как о *другом* векторном пространстве. Пусть на том же неоформленном множестве точек-событий, что и для рассмотренной выше системы отсчета, имеет место *другое* отношение порядка, выражаемое прежними, но имеющими другой смысл, словами *дальше*, *ближе* для точек и *раньше*, *позже* для событий. Обозначим это отношение порядка R_y.

Далее. Из всех движений (преобразований) множества точек-событий выделяются те, которые составляют *другую* непрерывную абелеву просто-транзитивную группу – группу сдвигов. Обозначим эту группу G_y. Точка-событие, совершающая движение под действием непрерывного преобразования этой группы сдвигов, пересекает множество точек-событий, называемое линией сдвигов. В этом другом случае назовем линию сдвигов *геодезической.* Направленный отрезок геодезической между двумя точками-событиями определяется как *другой* вектор, обозначаемый символом *красного* цвета

$$\mathcal{Y}\,.$$

Композиции двух сдвигов соответствует закон сложения векторов

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2\,.$$

Композиции нескольких (n) одинаковых сдвигов соответствует умножение вектора на число

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cdot n\,.$$

Таким образом, пространство-время выступает как *другое* векторное пространство. Обозначим его Y и назовем *искривленным пространством.*

С введением векторного пространства Y в рассмотрение входят такие понятия как *базисные векторы*

$$\mathfrak{e}_1\,, \quad \mathfrak{e}_2\,, \quad \mathfrak{e}_3\,, \quad \mathfrak{e}_4\,,$$

размерность пространства, *координаты* точек-событий

$$y^1\,, \quad y^2\,, \quad y^3\,, \quad y^4$$

и разложение вектора $\mathcal{Y} \in Y$ по базисным векторам

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_i \cdot y^i\,.$$

Числа y^i, поставленные в соответствие точкам-событиям пространства-времени Y, является *нормальной системой координат*. Каждая из нормальных систем координат в Y обладает следующими инвариантными свойствами:

1) *координатные* линии – линии, вдоль которых меняется только одна из координат,– являются геодезическими;

2) сложение сдвигов (векторов) записывается через сложение координат граничных точек и событий векторов, которые приводятся в соприкосновение в результате слагаемых движений:

$$y'^i = y^i + b^i.$$

1. Геодезическая в нормальной системе координат

Пусть $\mathfrak{e}$ – базисный вектор вдоль некоторой геодезической. Тогда уравнение этой геодезической имеет вид

$$\mathcal{Y}(y) = \mathcal{Y}_0 + \mathfrak{e} \cdot y\,. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{Y}_0$ – начальный вектор, от которого отсчитывается геодезическая, y – нормальная координата точки-события на геодезической. Здесь векторы $\mathcal{Y}_0$ и $\mathfrak{e}$ не зависят от нормальной координаты y. Пусть

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_i \cdot n^i\,,$$

где $n^i \in \mathbb{R}$ – проекции базисного вектора $\mathfrak{e}$ на базисные векторы $\mathfrak{e}_i$. Тогда

$$\mathcal{Y}(y) = \mathfrak{e} \cdot (y_0^i + n^i \cdot y)$$

и уравнение геодезической по отношению к нормальным координатам имеет вид

$$y^i(y) = y_0^i + n^i \cdot y\,.$$

2. Дифференциал в искривленном пространстве

В векторном пространстве Y введем дифференциал D как бесконечно малое приращение при бесконечно малом приращении $D\mathcal{Y}$ вектора $\mathcal{Y}$. Например, Dy – это бесконечно малое приращение нормальной координаты, соответствующее $D\mathcal{Y}$. В уравнении геодезической (5) векторы $\mathcal{Y}_0$ и $\mathfrak{e}$ не меняются при изменении вектора $\mathcal{Y}$ или нормальной координаты y, другими словами эти векторы являются постоянными. Поэтому

$$D\mathcal{Y}_0 = 0\,, \quad D\mathfrak{e} = 0\,. \tag{6}$$

Отсюда, в частности, следует, что дифференциал в искривленном пространстве-времени Y не может быть таким же, как в пространстве-времени X, принятом за систему отсчета. Действительно, векторы $\mathcal{Y}_0$ и $\mathfrak{e}$ постоянны только при изменении вектора $\mathcal{Y}$, то есть при выполнении условий (6), но не при изменении вектора $\mathbf{x}$.[4]

Так как вектор $\mathcal{Y}$ является аргументом, то есть независимой величиной, то

$$D^2\mathcal{Y} = 0\,.$$

Нормальные координаты являются линейными функциями вектора, поэтому

$$D^2 y = 0\,, \quad D^2 y^i = 0\,.$$

Отсюда следует, что нормальные координаты в Y в свою очередь можно рассматривать как аргументы.

3. Искривленное пространство как евклидово пространство

Будем рассматривать искривленное пространство-время Y как евклидово пространство. Для этого снабдим пространство Y скалярным умножением векторов, которое каждой паре векторов $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ из Y ставит в соответствие число

$$\mathcal{Y}_2 \cdot \mathcal{Y}_1 \in \mathbb{R}$$

– скалярное произведение.

Скалярное умножение в Y обладает следующими свойствами:

1) скалярное произведение не зависит от порядка используемых сомножителей;

2) скалярное умножение связано с законами векторного пространства[5] Y следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}(a \cdot \boldsymbol{\mathcal{Y}_2}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{Y}_1} = \boldsymbol{\mathcal{Y}_2} \cdot (a \cdot \boldsymbol{\mathcal{Y}_1}) = a \cdot (\boldsymbol{\mathcal{Y}_2} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Y}_1})\,, \\ \mathcal{Y} \cdot (\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2) = \mathcal{Y} \cdot \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y} \cdot \mathcal{Y}_2\,.\end{gathered} \tag{7}$$

Пусть векторы, участвующие в скалярном произведении, записаны через базисные векторы

$$\mathcal{Y}_2 = \mathfrak{e}_{i_1} \cdot {y_1}^{i_1}\,, \quad \mathcal{Y}_1 = \mathfrak{e}_{i_2} \cdot {y_2}^{i_2}\,.$$

Здесь $i_1\,, i_2 = 1, 2, 3, 4$. Тогда в силу соотношений (7) имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{Y}_2 \cdot \mathcal{Y}_1 = (\mathfrak{e}_{i_2} \cdot {y_2}^{i_2}) \cdot (\mathfrak{e}_{i_1} \cdot {y_1}^{i_1}) = \\ (\mathfrak{e}_{i_1} \cdot \mathfrak{e}_{i_2}) \cdot {y_2}^{i_2} \cdot {y_1}^{i_1} = G_{i_1 i_2} \cdot {y_2}^{i_2} \cdot {y_1}^{i_1}\,.\end{gathered}$$

Величина

$$G_{i_1 i_2} = \mathfrak{e}_{i_1} \cdot \mathfrak{e}_{i_2} = \mathfrak{e}_{i_2} \cdot \mathfrak{e}_{i_1}$$

представляет собой *метрический тензор* в искривленном пространстве. Метрический тензор $G_{i_1 i_2}$ есть величина постоянная в искривленном пространстве.[6]

Квадрат длины четырехмерного вектора $\mathcal{Y}$ в искривленном пространстве запишется следующим образом:

$$y^2 = \mathcal{Y} \cdot \mathcal{Y} = y^{i_1} \cdot y^{i_2} \cdot G_{i_1 i_2}\,.$$

Скалярное произведение в искривленном пространстве удобно подчинить *условию ортонормтрованности*

$$\begin{gathered}\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 = 1\,, \quad \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_2 = 1\,, \quad \mathfrak{e}_3 \cdot \mathfrak{e}_3 = 1\,, \\ \mathfrak{e}_4 \cdot \mathfrak{e}_4 = -1\,, \quad \mathfrak{e}_{i_1} \cdot \mathfrak{e}_{i_2} = 0 \quad \text{для} \quad i_1 \neq i_2\,.\end{gathered} \tag{8}$$

В этом случае метрический тензор искривленного пространства принимает вид

$$G_{i_1 i_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Необходимо отметить, что, несмотря на одинаковую запись (4) и (9) метрических тензоров $g_{k_1 k_2}$ и $G_{i_1 i_2}$ в соответствующих ортонормированных базисах, эти числовые тензоры не тождественны друг другу. Дело в том, что числа – это результат *измерения* векторов пространства и поэтому числовое множество является принадлежностью векторного пространства, *встроено* в векторное пространство. Множества действительных чисел, встроенные в *разные* векторные пространства, следует считать *разными*. И поэтому, когда речь идет о нескольких векторных пространствах, целесообразно множество действительных чисел, встроенное в некоторое векторное пространство,

---

[4] Напомним, что понятие *постоянная величина* устанавливается относительно дифференциала векторного пространства, к которому принадлежит эта величина.

[5] сложением векторов и умножением вектора на число

[6] Здесь также нужно отметить, что постоянство метрического тензора $G_{i_1 i_2}$ означает, что

$$DG_{i_1 i_2} = 0\,.$$

снабжать отметкой о том, в какое векторное пространство встроено это множество действительных чисел. Например, иногда удобно множество действительных чисел, встроенное в систему отсчета X, обозначить $\mathbb{R}_x$, а множество действительных чисел, встроенное в искривленное пространство Y, обозначить $\mathbb{R}_y$. Тогда нужно записать

$$g_{k_1k_2} \in \mathbb{R}_x\,, \quad \text{а} \quad G_{i_1i_2} \in \mathbb{R}_y\,.$$

Отсюда ясно, что, несмотря на одинаковую запись в соответствующих ортонормированных базисах,

$$g_{k_1k_2} \neq G_{i_1i_2}\,.$$

В ортонормированном базисе квадрат длины вектора $\mathbf{y}$ искривленного пространства приобретает вид

$$y^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 - (y^4)^2\,,$$

причем

$$y\,, \quad y^1\,, \quad y^2\,, \quad y^3\,, \quad y^4 \quad \in \mathbb{R}_y\,.$$

IV. СОПОСТАВИТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА

Точечно-событийное многообразие

Система отсчета	*Искривленное пространство-время*
Группа сдвигов – G_x	Группа сдвигов – G_y
Линия сдвигов – прямая	Линия сдвигов – геодезическая
Пространство-время системы отсчета X	Искривленное пространство-время Y
Вектор в системе отсчета $\mathbf{x}$	Вектор в искривленном пространстве $\mathcal{Y}$
Базисный вектор на прямой $\mathbf{e}$	Базисный вектор на геодезической $\mathfrak{e}$
Множество действительных чисел $\mathbb{R}_x$	Множество действительных чисел $\mathbb{R}_y$
Нормальная координата на прямой x $\mathbf{x} = \mathbf{e}\cdot x\,, \quad x \in \mathbb{R}_x$	Нормальная координата на геодезической y $\mathcal{Y} = \mathfrak{e}\cdot y\,, \quad y \in \mathbb{R}_y$
Дифференциал в системе отсчета $d\,, \quad d\mathbf{x}\,, \quad dx\,,$ $d\mathbf{x} = \mathbf{e}\cdot dx\,,$ $d\mathbf{e} = 0\,,$ $d^2\mathbf{x} = 0\,, \quad d^2x = 0$	Дифференциал в искривленном пространстве $D\,, \quad D\mathcal{Y}\,, \quad Dy\,,$ $D\mathcal{Y} = \mathfrak{e}\cdot Dy\,,$ $D\mathfrak{e} = 0\,,$ $D^2\mathcal{Y} = 0\,, \quad D^2y = 0$
Инвариантное уравнение прямой: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dx} = \mathbf{e}\,, \quad \dfrac{d\mathbf{e}}{dx} = 0\,, \quad \dfrac{d^2\mathbf{x}}{dx^2} = 0$	Инвариантное уравнение геодезической: $\dfrac{D\mathcal{Y}}{Dy} = \mathfrak{e}\,, \quad \dfrac{D\mathfrak{e}}{Dy} = 0\,, \quad \dfrac{D^2\mathcal{Y}}{Dy^2} = 0$
Нормальные координаты в X – x^k $x^k \in \mathbb{R}_x\,, \quad k = 1,2,3,4$	Нормальные координаты в Y – y^i $y^i \in \mathbb{R}_y\,, \quad i = 1,2,3,4$
Базисные векторы в X – $\mathbf{e}_k$ $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k\cdot x^k\,, \quad d\mathbf{x} = \mathbf{e}_k\cdot dx^k$	Базисные векторы в Y – $\mathfrak{e}_i$ $\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_i\cdot y^i\,, \quad D\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_i\cdot Dy^i$
Проекции вектора $\mathbf{e}$ на $\mathbf{e}_k$ – k^k $\mathbf{e} = \mathbf{e}_k\cdot k^k\,, \quad k^k \in \mathbb{R}_x$ $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}\cdot k_k\,, \quad k_k \in \mathbb{R}_x$ $k_k\cdot k^k = 1\,, \quad 1 \in \mathbb{R}_x$	Проекции вектора $\mathfrak{e}$ на $\mathfrak{e}_i$ – n^i $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_i\cdot n^i\,, \quad n^i \in \mathbb{R}_y$ $\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}\cdot n_i\,, \quad n_i \in \mathbb{R}_y$ $n_i\cdot n^i = 1\,, \quad 1 \in \mathbb{R}_y$
Уравнение прямой в нормальных координатах: $\mathbf{e}_k\cdot\dfrac{dx^k}{dx} = \mathbf{e}_k\cdot k^k\,, \quad \dfrac{dk^k}{dx} = 0\,, \quad \dfrac{d^2x^k}{dx^2} = 0$	Уравнение геодезической в нормальных координатах: $\mathfrak{e}_i\cdot\dfrac{Dy^i}{Dy} = \mathfrak{e}_i\cdot n^i\,, \quad \dfrac{Dn^i}{Dy} = 0\,, \quad \dfrac{D^2y^i}{Dy^2} = 0$
Квадрат длины вектора $\mathbf{e}$ $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}) = 1\,, \quad 1 \in \mathbb{R}_x$	Квадрат длины вектора $\mathfrak{e}$ $(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e}) = 1\,, \quad 1 \in \mathbb{R}_y$

Длина векторов $\mathbf{x}$, $d\mathbf{x}$

$(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\cdot x = x\,,$

$(\mathbf{e}\cdot d\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\cdot dx = dx$

Квадрат длины векторов $\mathbf{x}$, $d\mathbf{x}$

$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\cdot x\cdot x = x^2\,,$

$(d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{e})\cdot dx\cdot dx = dx^2$

$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_{k_1}\cdot\mathbf{e}_{k_2})\cdot x^{k_1}\cdot x^{k_2} = x^2\,,$

$(d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_{k_1}\cdot\mathbf{e}_{k_2})\cdot dx^{k_1}\cdot dx^{k_2} = dx^2$

Метрический тензор в X – $g_{k_1k_2}$

$g_{k_1k_2} = (\mathbf{e}_{k_1}\cdot\mathbf{e}_{k_2})\,,\quad g_{k_1k_2}\in\mathbb{R}_x$

Сопряженные базисные векторы в X – $\mathbf{E}^k$,

$(\mathbf{E}^k\cdot\mathbf{e}_{k_1}) = \delta^k_{k_1}\,,\quad \delta^k_{k_1}\in\mathbb{R}_x$

Произвольные координаты в X – y^α

$x^k(y^\alpha)$

Вектор $d\mathbf{x}$ в произвольных координатах

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_k\cdot dx^k = \mathbf{e}_k\cdot\frac{\partial x^k(y)}{\partial y^\alpha}\cdot dy^\alpha = \mathbf{e}_\alpha\cdot dy^\alpha$$

Базисные векторы в X
для произвольных координат – $\mathbf{e}_\alpha$,

$$\mathbf{e}_\alpha(y) = \mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^\alpha}$$

Вектор $\mathbf{e}_\alpha(y)$ –
направленный отрезок прямой.

Квадрат длины вектора $d\mathbf{x}$
в произвольных координатах

$(d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_{\alpha_1}\cdot\mathbf{e}_{\alpha_2})\cdot dy^{\alpha_1}\cdot dy^{\alpha_2} = dx^2$

Метрический тензор в X
в произвольных координатах

$$g_{\alpha_1\alpha_2} = (\mathbf{e}_{\alpha_1}\cdot\mathbf{e}_{\alpha_2}) = (\mathbf{e}_{k_1}\cdot\mathbf{e}_{k_2})\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{\partial y^{\alpha_1}}\cdot\frac{\partial x^{k_2}(y)}{\partial y^{\alpha_2}} = g_{k_1k_2}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{\partial y^{\alpha_1}}\cdot\frac{\partial x^{k_2}(y)}{\partial y^{\alpha_1}}$$

Уравнение прямой в произвольных координатах:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\mathbf{e}_\alpha\cdot\frac{dy^\alpha}{dx}\right) = \mathbf{e}_\alpha\cdot\left(\frac{d^2y^\alpha}{dx^2} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha_1\alpha_2}\cdot\frac{dy^{\alpha_1}}{dx}\cdot\frac{dy^{\alpha_2}}{dx}\right) = 0$$

$\Gamma^\alpha{}_{\alpha_1\alpha_2}\in\mathbb{R}_x\,.$

Длина векторов $\mathcal{Y}$, $D\mathcal{Y}$

$(\mathfrak{e}\cdot\mathcal{Y}) = (\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e})\cdot y = y\,,$

$(\mathfrak{e}\cdot D\mathcal{Y}) = (\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e})\cdot Dy = Dy$

Квадрат длины векторов $\mathcal{Y}$, $D\mathcal{Y}$

$(\mathcal{Y}\cdot\mathcal{Y}) = (\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e})\cdot y\cdot y = y^2\,,$

$(D\mathcal{Y}\cdot D\mathcal{Y}) = (\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e})\cdot Dy\cdot Dy = Dy^2$

$(\mathcal{Y}\cdot\mathcal{Y}) = (\mathfrak{e}_{i_1}\cdot\mathfrak{e}_{i_2})\cdot y^{i_1}\cdot y^{i_2} = y^2\,,$

$(D\mathcal{Y}\cdot D\mathcal{Y}) = (\mathfrak{e}_{i_1}\cdot\mathfrak{e}_{i_2})\cdot Dy^{i_1}\cdot Dy^{i_2} = Dy^2$

Метрический тензор в Y – $G_{i_1i_2}$

$G_{i_1i_2} = (\mathfrak{e}_{i_1}\cdot\mathfrak{e}_{i_2})\,,\quad G_{i_1i_2}\in\mathbb{R}_y$

Сопряженные базисные векторы в Y – $\mathfrak{E}^i$,

$(\mathfrak{E}^i\cdot\mathfrak{e}_{i_1}) = \delta^i_{i_1}\,,\quad \delta^i_{i_1}\in\mathbb{R}_y$

Произвольные координаты в Y – x^β

$y^i(x^\beta)$

Вектор $D\mathcal{Y}$ в произвольных координатах

$$D\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_i\cdot Dy^i = \mathfrak{e}_i\cdot\frac{Dy^i(x)}{Dx^\beta}\cdot Dx^\beta = \mathfrak{e}_\beta\cdot Dx^\beta$$

Базисные векторы в Y
для произвольных координат – $\mathfrak{e}_\beta$,

$$\mathfrak{e}_\beta(x) = \mathfrak{e}_i\cdot\frac{Dy^i(x)}{Dx^\beta}$$

Вектор $\mathfrak{e}_\beta(x)$ –
направленный отрезок геодезической.

Квадрат длины вектора $D\mathcal{Y}$
в произвольных координатах

$(D\mathcal{Y}\cdot D\mathcal{Y}) = (\mathfrak{e}_{\beta_1}\cdot\mathfrak{e}_{\beta_2})\cdot Dx^{\beta_1}\cdot Dx^{\beta_2} = Dy^2$

Метрический тензор в Y
в произвольных координатах

$$G_{\beta_1\beta_2} = (\mathfrak{e}_{\beta_1}\cdot\mathfrak{e}_{\beta_2}) = (\mathfrak{e}_{i_1}\cdot\mathfrak{e}_{i_2})\cdot\frac{Dy^{i_1}(x)}{Dx^{\beta_1}}\cdot\frac{Dy^{i_2}(x)}{Dx^{\beta_2}} = G_{i_1i_2}\cdot\frac{Dy^{i_1}(x)}{Dx^{\beta_1}}\cdot\frac{Dy^{i_2}(x)}{Dx^{\beta_2}}$$

Уравнение геодезической в произвольных координатах:

$$\frac{D^2\mathcal{Y}}{Dy^2} = \frac{D}{Dy}\left(\mathfrak{e}_\beta\cdot\frac{Dx^\beta}{Dy}\right) = \mathfrak{e}_\beta\cdot\left(\frac{D^2x^\beta}{Dy^2} + \Gamma^\beta{}_{\beta_1\beta_2}\cdot\frac{Dx^{\beta_1}}{Dy}\cdot\frac{Dx^{\beta_2}}{Dy}\right) = 0$$

$\Gamma^\beta{}_{\beta_1\beta_2}\in\mathbb{R}_y\,.$

В следующей Главе рассмотрим связь между нормальными координатами искривленного пространства и нормальными координатами системы отсчета. При этом учтем, что указанная связь сопровождается разными видами дифференциалов – в искривленном пространстве и в системе отсчета.

V. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Искривленное пространство – это *другое* пространство, отличающееся от системы отсчета другой группой сдвигов, другим множеством действительных чисел, другим скалярным произведением и другим дифференциалом.
- Общая теория относительности устанавливает связь между искривленным пространством и системой отсчета в терминах системы отсчета.

Глава 2.2 Искривленное дифференцирование

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Целый ряд разделов математики, положенных в основу современной физики, используют разные виды дифференциального исчисления. Это теория векторного поля, тензорное исчисление с абсолютным дифференцированием, алгебры Ли, теория дифференциальных форм Картана-Лаптева, неевклидова геометрия, вариационное исчисление и другие. Для нас важно предположение о том, что разные виды дифференциального исчисления являются разновидностями одного *гипотетического* дифференциального исчисления, которое назовем *искривленным*[1]. Построение такого исчисления должно привести к объединению вышеуказанных разделов математики. А так как эти разделы положены в основу современного физического знания, то с построением искривленного дифференцирования можно связать надежду на прорыв в новую физику. Можно предположить, что противоречия и неясности, с которыми мы сталкиваемся в квантовой теории и теории относительности, есть следствия несовершенства той математики, которую они используют.

Ранее мы в той или иной форме обращались к искривленному дифференцированию. Здесь мы попытаемся изложить это исчисление в необходимой последовательности.

II. РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть на точечном многообразии заданы пространства Y и X с нормальными координатами y^i и x^k соответственно. Будем называть пространство Y *искривленным*, а пространство X *системой отсчета*. Геодезическую в пространстве X будем называть *прямой*. Тогда, следовательно, определена функция

$$y^i(x^k)\,.$$

Разложим эту функцию вблизи точки с координатами x^k в ряд Тейлора, который запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + \left(y^i_{,k}+y^i_k\right)dx^k + \\ + \left(y^i_{,k_1,k_2}+y^i_{k_1,k_2}+y^i_{k_1k_2}\right)\,dx^{k_1}dx^{k_2} + \\ + \left(y^i_{,k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2,k_3} + \right.\\ \left. + \; y^i_{k_1k_2k_3}\right)dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь производные

$$y^i_{,k} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\,, \quad y^i_{,k_1,k_2} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\,,$$
$$y^i_{,k_1,k_2,k_3} = \frac{\partial^3 y^i}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\,, \quad \ldots$$

определяются различием систем координат пространств Y и X. Коэффициенты

$$y^i_k\,, \quad y^i_{k_1k_2}\,, \quad y^i_{k_1k_2k_3}\,, \quad y^i_{k_1k_2k_3k_4}\,, \quad \ldots$$

определяют искривление пространства Y по отношению к пространству X. Через d обозначен дифференциал в пространстве X.

Рассматривая разложение функции в ряд Тейлора, мы будем полагать ограничение слагаемыми четвертого порядка, так как этим порядком ограничивается описание взаимодействий, которое мы рассматриваем.

Если в пространстве Y используется та же система координат, что и в пространстве X, то

$$y^i_{,k} = \delta^i_k\,, \quad y^i_{,k_1,k_2} = 0\,, \quad y^i_{,k_1,k_2,k_3} = 0\,, \quad \ldots$$

и ряд Тейлора приобретает вид[2]

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) = x^i + \left(\delta^i_k + y^i_k\right)dx^k + \\ + \left(y^i_{k_1,k_2}+y^i_{k_1k_2}\right)dx^{k_1}dx^{k_2} + \\ + \left(y^i_{k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2k_3}\right)dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \ldots \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} l^i_k &= y^i_{,k}+y^i_k\,, \\ l^i_{k_1k_2} &= y^i_{,k_1,k_2}+y^i_{k_1,k_2}+y^i_{k_1k_2}\,, \\ l^i_{k_1k_2k_3} &= y^i_{,k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2k_3}\,, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

с учетом которых ряд Тейлора запишется

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + l^i_k dx^k + \\ + l^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} + l^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} + \\ + l^i_{k_1k_2k_3k_4}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}dx^{k_4} + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Если учесть, что

$$l^i_{k_1k_2} = l^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2}\,, \tag{4}$$
$$l^i_{k_1k_2k_3} = l^i_{k_1k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2k_3}\,, \tag{5}$$

[1] Его можно было бы назвать *неполным* или *неголономным*.

[2] Заметим, что решение Шварцшильда уравнений Эйнштейна ищется при условии, что координаты в римановом пространстве Y совпадают со сферическими координатами в евклидовом пространстве X.

то имеем

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+l^i_k dx^k+\left(l^i_{k_1,k_2}+y^i_{k_1k_2}\right)dx^{k_1}dx^{k_2} + \left(l^i_{k_1k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2k_3}\right)dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\dots$$

Для описания взаимодействий важен частный случай

$$y^i_{k_1k_2}\neq 0\,,\ y^i_{k_1k_2k_3}=0\,,\ \dots y^i_{k_1k_2\dots k_p}=0\,,\ \dots$$

При этом коэффициенты $y^i_{k_1k_2}$ отождествляются с компонентами потенциала калибровочного поля или с коэффициентами связности для неевклидовой геометрии. В этом случае

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+l^i_k dx^k+\left(l^i_{k_1,k_2}+y^i_{k_1k_2}\right)dx^{k_1}dx^{k_2} + \left(l^i_{k_1,k_2,k_3}+y^i_{k_1k_2,k_3}\right)dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\dots \tag{6}$$

Если калибровочное поле отсутствует ($y^i_{k_1k_2}=0$), то

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+l^i_k dx^k+l^i_{k_1,k_2}dx^{k_1}dx^{k_2}+ + l^i_{k_1,k_2,k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\dots$$

1. Дифференциал D и оператор частного дифференцирования X

Введем обозначение

$$Dy^i=l^i_k dx^k\,. \tag{7}$$

Здесь символ D означает дифференциал в пространстве Y.

$$Dy^i=l^i_k dx^k=y^i_{,k}dx^k+y^i_k dx^k=dy^i+y^i_k dx^k\,.$$

Таким образом, дифференциал в пространстве Y складывается из дифференциала в пространстве X и добавки, представляющей собой неполный дифференциал, которую удобно обозначить

$$\delta y^i=y^i_k dx^k\,.$$

Таким образом,

$$Dy^i=dy^i+\delta y^i\,.$$

Используя введенный дифференциал, запишем ряд Тейлора в следующем виде[3]:

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+Dy^i+D^2y^i+D^3y^i+\dots \tag{8}$$

[3] Необходимо отметить, что, так как координаты x^k являются независимыми, то имеет место $d^2x^k=0$. Вместе с тем $D^2y^i\neq 0$.

Введем оператор частного дифференцирования

$$X_k\equiv\frac{D}{\partial x^k}\,.$$

Используя его, получим

$$l^i_k=\frac{Dy^i}{\partial x^k}=X_k(y^i)\,, \tag{9}$$

$$l^i_{k_1k_2}=\frac{D^2y^i}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}=X_{k_2}X_{k_1}(y^i)\,, \tag{10}$$

$$l^i_{k_1k_2k_3}=\frac{D^3y^i}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}=X_{k_3}X_{k_2}X_{k_1}(y^i)\,, \tag{11}$$

$$\dots$$

А ряд Тейлора запишется так:

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+\frac{Dy^i}{\partial x^k}dx^k+\frac{D^2y^i}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}dx^{k_1}dx^{k_2}+ + \frac{D^3y^i}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\dots$$

или

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+X_k(y^i)dx^k+X_{k_2}X_{k_1}(y^i)dx^{k_1}dx^{k_2} + X_{k_3}X_{k_2}X_{k_1}(y^i)dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\dots$$

Введем дифференциал в пространстве Y от коэффициентов l^i_k в соответствии с определением

$$Dl^i_{k_1}=l^i_{k_1,k_2}dx^{k_2}+y^i_{k_1k_2}dx^{k_2}=dl^i_{k_1}+y^i_{k_1k_2}dx^{k_2}\,.$$

Таким образом, дифференциал от l^i_k в пространстве Y также складывается из дифференциала в пространстве X и добавки, представляющей собой неполный дифференциал, которую удобно обозначить

$$\delta l^i_{k_1}=y^i_{k_1k_2}dx^{k_2}\,.$$

Таким образом,

$$Dl^i_{k_1}=dl^i_{k_1}+\delta l^i_{k_1}\,.$$

Аналогично можно записать для коэффициентов $l^i_{k_1\dots k_p}$

$$Dl^i_{k_1\dots k_p}=dl^i_{k_1\dots k_p}+\delta l^i_{k_1\dots k_p}\,,$$

где

$$\delta l^i_{k_1\dots k_p}=y^i_{k_1\dots k_pk_{p+1}}dx^{k_{p+1}}\,.$$

Используя введенные дифференциалы, запишем ряд Тейлора в следующем виде[4]:

$$y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+Dy^i+Dl^i_{k_1}dx^{k_1}+ + Dl^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2}+Dl^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\dots \tag{12}$$

[4] Из $D^2y^i=Dl^i_{k_1}dx^{k_1}$ или $D(l^i_{k_1}dx^{k_1})=Dl^i_{k_1}dx^{k_1}$ следует $Ddx^{k_1}=ddx^{k_1}$ и $ddx^{k_1}=0$, так как координаты x^k являются независимыми.

Аналогично тому, как частная производная обозначается с помощью индекса, отделенного запятой:

$$\frac{\partial l^i_{k_1\ldots k_p}}{\partial x^{k_{p+1}}} = l^i_{k_1\ldots k_p,k_{p+1}}\,,$$

так дифференцирование X будем обозначать с помощью индекса, отделенного чертой:

$$\frac{Dl^i_{k_1\ldots k_p}}{\partial x^{k_{p+1}}} = l^i_{k_1\ldots k_p|k_{p+1}}\,.$$

2. Касательное разложение

Введем матрицу $\tilde{l}^k_i$, обратную матрице l^i_k. Для нее выполняется

$$\tilde{l}^{k_1}_i \cdot l^i_{k_2} = \delta^{k_1}_{k_2}\,. \tag{13}$$

Умножим ряд Тейлора (3) на эту матрицу. Получим

$$\begin{aligned}\tilde{l}^k_i\left(y^i(x^k+dx^k)-y^i(x^k)\right) = dx^k &+ \\ +\tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} + \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} &+ \\ +\tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3k_4}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}dx^{k_4} + \ldots &\end{aligned} \tag{14}$$

Назовем это разложение *касательным*, исходя из того, что в первом приближении оно представлено дифференциалом dx^k.

2.1. Объект связности

Введем обозначение

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2}\,. \tag{15}$$

Эти коэффициенты назовем *объектом связности, или потенциалом калибровочного поля в касательном пространстве* X. Объект связности можно записать также в следующем виде:

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1|k_2} = \tilde{l}^k_i \frac{Dl^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\,.$$

Используя (4), запишем

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1,k_2} + \gamma^k_{k_1k_2}\,, \tag{16}$$

где введено обозначение

$$\gamma^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i y^i_{k_1k_2}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* потенциала или объекта связности в касательном пространстве X.

2.2. Объект кривизны

Введем обозначение

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3}\,. \tag{17}$$

Эти коэффициенты назовем *объектом кривизны или объектом калибровочного поля в касательном пространстве* X. Объект кривизны можно записать также в следующем виде:

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2|k_3} = \tilde{l}^k_i \frac{Dl^i_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}}\,.$$

Используя выражение (5), запишем

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2,k_3} + r^k_{k_1k_2k_3}\,, \tag{18}$$

где введено обозначение

$$r^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i y^i_{k_1k_2k_3}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* объекта кривизны в касательном пространстве X.

Далее выразим объект кривизны через объекты связности в касательном пространстве. Для этого предварительно выведем необходимое нам соотношение, которое получим, действуя оператором дифференцирования X_{k_3} на соотношение (13). Получим

$$\tilde{l}^{k_1}_{i|k_3} \cdot l^i_{k_2} + \tilde{l}^{k_1}_i \cdot l^i_{k_2|k_3} = 0\,.$$

Отсюда

$$\tilde{l}^{k_1}_{i|k_3} \cdot l^i_{k_2} = -\Gamma^{k_1}_{k_2k_3}\,. \tag{19}$$

Теперь учтем, что

$$\begin{aligned}R^k_{k_1k_2k_3} &= \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2|k_3} = (\tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2})_{,k_3} - \tilde{l}^k_{i|k_3}\, l^i_{k_1k_2} \\ &= (\tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2})_{|k_3} - (\tilde{l}^k_{i|k_3}\, l^{i_1}_{k_4}) \cdot (\tilde{l}^{k_4}_i\, l^i_{k_1k_2})\,.\end{aligned}$$

И далее, используя соотношения (15) и (19), получим искомое выражение объекта кривизны через объекты связности

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2}\,. \tag{20}$$

Здесь

$$\Gamma^k_{k_1k_2,k_3} = \Gamma^k_{k_1k_2|k_3} - \gamma^k_{k_1k_2k_3}\,.$$

Или в другой записи

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2}\,.$$

Аналогично определяется *второй объект кривизны* в касательном пространстве X

$$R^k_{k_1k_2k_3k_4} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3k_4}$$

и в общем случае n-ый объект кривизны в касательном пространстве X

$$R^k_{k_1k_2\dots k_{n+2}} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2\dots k_{n+2}}\,.$$

С использованием коэффициентов связности и объекта кривизны ряд Тейлора в касательном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned}\tilde{l}^k_i\left(y^i(x^k+dx^k)-y^i(x^k)\right) &= dx^k + \Gamma^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} + \\ R^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} &+ R^k_{k_1k_2k_3k_4}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}dx^{k_4} + \dots\end{aligned} \tag{21}$$

3. Собственное разложение

В разложении (3) перейдем от дифференциалов dx к дифференциалам Dy. Для этого запишем указанное разложение в следующем виде:

$$\begin{aligned}y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + l^i_k dx^k + \\ &+ \left(l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\right)\cdot\left(l^{i_1}_{k_3}dx^{k_3}\,l^{i_2}_{k_4}dx^{k_4}\right) + \\ &+ \left(l^i_{k_1k_2k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\right)\cdot\left(l^{i_1}_{k_4}dx^{k_4}\,l^{i_2}_{k_5}dx^{k_5}\,l^{i_3}_{k_6}dx^{k_6}\right) + \dots\end{aligned}$$

Используя выражение (7), перепишем разложение в следующем виде:

$$\begin{aligned}y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + Dy^i + \left(l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\right)\cdot Dy^{i_1}Dy^{i_2} \\ &+ \left(l^i_{k_1k_2k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\right)\cdot Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \dots\end{aligned} \tag{22}$$

Назовем это разложение *собственным*, исходя из того, что в первом приближении оно представлено дифференциалом Dy^i.

3.1. Объект связности

Введем обозначение

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,. \tag{23}$$

Эти коэффициенты назовем *объектом связности или потенциалом калибровочного поля в собственном пространстве* Y. Объект связности можно записать также в следующем виде:

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = l^i_{k_1|k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} = \frac{Dl^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,.$$

Используя выражение (4), запишем

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = l^i_{k_1,k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} + \gamma^i_{i_1i_2}\,, \tag{24}$$

где введено обозначение

$$\gamma^i_{i_1i_2} = y^i_{k_1,k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* потенциала или объекта связности в собственном пространстве Y.

3.2. Объект кривизны

Введем обозначение

$$R^i_{i_1i_2i_3} = l^i_{k_1k_2k_3}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\,. \tag{25}$$

Эти коэффициенты назовем *объектом кривизны или объектом калибровочного поля в собственном пространстве* Y. Объект кривизны можно записать также в следующем виде:

$$R^i_{i_1i_2i_3} = l^i_{k_1k_2|k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} = \frac{Dl^i_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\,.$$

Используя выражение (5), запишем

$$R^i_{i_1i_2i_3} = l^i_{k_1k_2|k_3}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} = l^i_{k_1k_2,k_3}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} + r^i_{i_1i_2i_3}\,, \tag{26}$$

где введено обозначение

$$r^i_{i_1i_2i_3} = y^i_{k_1k_2k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* объекта кривизны в собственном пространстве Y.

Далее выразим объект кривизны через объекты связности в собственном пространстве. Для этого предварительно выведем необходимое нам соотношение. Сначала заметим, что обратная матрица $\tilde{l}^{k_1}_{i_1}$ помимо соотношений (13), удовлетворяет соотношению

$$l^i_{k_1}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1} = \delta^i_{i_1}\,. \tag{27}$$

Затем подействуем оператором дифференцирования X_{k_2} на это соотношение. Получим

$$l^i_{k_1|k_2}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1} + l^i_{k_1}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1|k_2} = 0\,.$$

Умножим это соотношение на $\tilde{l}^{k_2}_{i_2}$. Получим

$$l^i_{k_1|k_2}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} + l^i_{k_1}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1|k_2}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} = 0\,.$$

Отсюда

$$l^i_{k_1}\cdot\tilde{l}^{k_1}_{i_1|k_2}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} = -\Gamma^i_{i_1i_2}\,. \tag{28}$$

Теперь учтем, что

$$\begin{aligned}R^i_{i_1i_2i_3} &= l^i_{k_1k_2|k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} = (l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2})_{|k_3}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} - \\ &\qquad - l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1|k_3}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} - l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2|k_3}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} \\ &= (l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2})_{|k_3}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} - (l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_4}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde{l}^{k_4}_{i_1|k_3}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}) - \\ &\qquad - (l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_4})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde{l}^{k_4}_{i_2|k_3}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3})\,.\end{aligned}$$

И далее, используя соотношения (23) и (28), получим искомое выражение объекта кривизны через объекты связности

$$R^i_{i_1i_2i_3} = \Gamma^i_{i_1i_2,i_3} + \Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3} + \Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3}\,.$$

Здесь

$$\Gamma^i_{i_1 i_2, i_3} = \Gamma^i_{i_1 i_2 | k_3} \tilde{l}^{k_3}_{i_3} = \frac{D\Gamma^i_{i_1 i_2}}{\partial x^{k_3}} \frac{\partial x^{k_3}}{Dy^{i_3}}\,.$$

Или в другой записи

$$R^i_{i_1 i_2 i_3} = \frac{D\Gamma^i_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}} + \Gamma^i_{i_4 i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1 i_3} + \Gamma^i_{i_1 i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\,. \qquad (29)$$

Аналогично определяется *второй объект кривизны* в собственном пространстве Y

$$R^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} = l^i_{k_1 k_2 k_3 k_4} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_3}_{i_3}\, \tilde{l}^{k_4}_{i_4}$$

и в общем случае n-ый объект кривизны в собственном пространстве Y

$$R^i_{i_1 i_2 \ldots i_{n+2}} = l^i_{k_1 k_2 \ldots k_{n+2}} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2} \ldots \tilde{l}^{k_{n+2}}_{i_{n+2}}$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в собственном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned} y^i(x^k + dx^k) &= y^i(x^k) + Dy^i + \Gamma^i_{i_1 i_2} Dy^{i_1} Dy^{i_2} + \\ &+ R^i_{i_1 i_2 i_3} Dy^{i_1} Dy^{i_2} Dy^{i_3} + R^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} Dy^{i_1} Dy^{i_2} Dy^{i_3} Dy^{i_4} + \\ &+ \ldots \end{aligned} \qquad (30)$$

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

В ряде случаев мы будем вводить переобозначение

$$\omega^i \equiv Dy^i\,.$$

Необходимость в таком переобозначении вызвана тем, что в дифференциальной геометрии дифференциальные формы, к которым относится Dy^i, принято обозначать буквой ω.

Для этого обозначения ряд Тейлора (8) запишется так:

$$y^i(x^k + dx^k) = y^i(x^k) + \omega^i + D\omega^i + D^2\omega^i + \ldots \qquad (31)$$

Обратимся теперь к ряду Тейлора в виде (6). Для удобства перепишем его еще раз:

$$\begin{aligned} y^i(x^k + dx^k) &= y^i(x^k) + l^i_k dx^k + (l^i_{k_1, k_2} + y^i_{k_1 k_2})\, dx^{k_1} dx^{k_2} \\ &+ (l^i_{k_1, k_2, k_3} + y^i_{k_1 k_2, k_3})\, dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \ldots \end{aligned}$$

Преобразуем третье слагаемое этого ряда Тейлора

$$\begin{aligned} \left(l^i_{k_1, k_2} + y^i_{k_1 k_2}\right) dx^{k_1} dx^{k_2} &= \left(dl^i_{k_1} + y^i_{k_1 k_2} dx^{k_2}\right) dx^{k_1} = \\ &= \left(dl^i_{k_1} \tilde{l}^{k_1}_{i_1} + y^i_{k_1 k_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, l^{i_2}_{k_3} dx^{k_3}\right) \cdot l^{i_1}_{k_4} dx^{k_4}\,. \end{aligned}$$

Далее введем следующие обозначения:

$$\omega^i_{i_1} = dl^i_{k_1} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,.$$

Кроме того, учтем, что

$$y^i_{k_1 k_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2} = \gamma^i_{i_1 i_2}\,,$$

и

$$l^{i_2}_{k_3} dx^{k_3} = \omega^{i_2}\,, \quad l^{i_1}_{k_4} dx^{k_4} = \omega^{i_1}\,.$$

В результате третье слагаемое ряда Тейлора приобретает вид

$$(\omega^i_{i_1} + \gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_2})\, \omega^{i_1}\,.$$

Вместе с тем, в выражении (31) это слагаемое имеет вид $D\omega^i$. Таким образом, получаем уравнение

$$D\omega^i = \omega^i_{i_1} \omega^{i_1} + \gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_1} \omega^{i_2}\,. \qquad (32)$$

Это уравнение представляет частный случай *первого уравнения структуры* искривленного пространства. Иногда вместо дифференциальных форм $\omega^i_{i_1}$ удобно ввести дифференциальные формы

$${}'\omega^i_{i_1} = \omega^i_{i_1} + \gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_2}\,. \qquad (33)$$

Из выражения (24) следует, что

$${}'\omega^i_{i_1} = \Gamma^i_{i_1 i_2} \omega^{i_2}\,.$$

Используя дифференциальные формы ${}'\omega^i_{i_1}$, получим уравнение структуры в следующем виде:

$$D\omega^i = {}'\omega^i_{i_1} \omega^{i_1}\,. \qquad (34)$$

Это уравнение перепишем в следующем виде:

$$D^2 y^i - \Gamma^i_{i_1 i_2} Dy^{i_1} Dy^{i_2} = 0\,. \qquad (35)$$

В частном случае это уравнение представляет собой уравнение прямой пространства X (геодезической системы отсчета), записанное по отношению к координатам искривленного пространства Y.

Аналогично предыдущему преобразуем теперь четвертое слагаемое ряда Тейлора

$$\begin{aligned} &(l^i_{k_1 k_2, k_3} + y^i_{k_1 k_2 k_3})\, dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} = \\ &= (dl^i_{k_1 k_2} + y^i_{k_1 k_2 k_3} dx^{k_3})\, dx^{k_1} dx^{k_2} = \\ &= (dl^i_{k_1 k_2} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2} + y^i_{k_1 k_2 k_3}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_3}_{i_3}\, l^{i_3}_{k_4} dx^{k_4}) \cdot l^{i_1}_{k_5} dx^{k_5}\, l^{i_2}_{k_6} dx^{k_6}\,. \end{aligned}$$

Далее введем следующие обозначения:

$$\omega^i_{i_1 i_2} = dl^i_{k_1 k_2} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,.$$

Кроме того, учтем что,

$$y^i_{k_1 k_2 k_3}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_3}_{i_3} = r^i_{i_1 i_2 i_3}$$

и

$$l^{i_3}_{k_4} dx^{k_4} = \omega^{i_3}\,, \quad l^{i_1}_{k_5} dx^{k_5} = \omega^{i_1}\,, \quad l^{i_2}_{k_6} dx^{k_6} = \omega^{i_2}\,.$$

В результате четвертое слагаемое ряда Тейлора приобретает вид

$$(\omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_3})\,\omega^{i_1}\omega^{i_2}\,.$$

Вместе с тем, в выражении (31) это слагаемое имело вид $D^2\omega^i$. Таким образом, получаем уравнение

$$D^2\omega^i = (\omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_3})\,\omega^{i_1}\omega^{i_2}\,. \tag{36}$$

Это уравнение представляет частный случай *второго уравнения структуры* искривленного пространства.

Используя первое уравнение структуры, его можно записать иначе:

$$\begin{aligned} D\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} &+ \omega^i_{i_1}D\omega^{i_1} + D\gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}\omega^{i_2} + \\ &+ \gamma^i_{i_1 i_2}D\omega^{i_1}\omega^{i_2} + \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}D\omega^{i_2} = \\ &\qquad = (\omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_3})\,\omega^{i_1}\omega^{i_2}\,. \end{aligned}$$

Используя первое уравнение структуры еще раз, получим

$$\begin{aligned} &D\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} + \omega^i_{i_3}(\omega^{i_3}_{i_1}\omega^{i_1} + \gamma^{i_3}_{i_1 i_2}\omega^{i_1}\omega^{i_2}) + \\ &\quad + D\gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}\omega^{i_2} + \gamma^i_{i_4 i_2}(\omega^{i_4}_{i_1}\omega^{i_1} + \gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_1}\omega^{i_3})\omega^{i_2} + \\ &\quad + \gamma^i_{i_1 i_4}\omega^{i_1}(\omega^{i_4}_{i_3}\omega^{i_3} + \gamma^{i_4}_{i_3 i_2}\omega^{i_3}\omega^{i_2}) = \\ &\qquad = (\omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_3})\omega^{i_1}\omega^{i_2}\,. \end{aligned}$$

И в результате

$$\begin{aligned} D\omega^i_{i_1} &+ \omega^i_{i_3}\omega^{i_3}_{i_1} + \omega^i_{i_3}\gamma^{i_3}_{i_1 i_2}\omega^{i_2} + \\ &+ D\gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2} + \gamma^i_{i_3 i_2}\omega^{i_3}_{i_1}\omega^{i_2} + \gamma^i_{i_3 i_2}\gamma^{i_3}_{i_1 i_4}\omega^{i_4}\omega^{i_2} + \\ &+ \gamma^i_{i_1 i_3}\omega^{i_3}_{i_2}\omega^{i_2} + \gamma^i_{i_1 i_3}\gamma^{i_3}_{i_4 i_2}\omega^{i_4}\omega^{i_2} = \\ &\qquad = \omega^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3}\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Иногда вместо дифференциальных форм $\omega^i_{i_1 i_2}$ удобно ввести дифференциальные формы

$${}'\omega^i_{i_1 i_2} = \omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_3}\,.$$

Используя их, получим уравнение структуры в следующем виде:

$$D^2\omega^i = {}'\omega^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}\omega^{i_2}\,. \tag{38}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя выражение (32),

$$D^2\omega^i = D'\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} + {}'\omega^i_{i_1}D\omega^{i_1} = D\,{}'\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} + {}'\omega^i_{i_4}\,{}'\omega^{i_4}_{i_1}\omega^{i_1}\,.$$

Используя это соотношение, запишем второе уравнение структуры в следующем виде:

$$D\,{}'\omega^i_{i_1} + {}'\omega^i_{i_2}\,{}'\omega^{i_2}_{i_1} = {}'\omega^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}\,. \tag{39}$$

Покажем, что формы ${}'\omega^i_{i_1 i_2}$ связаны с объектом кривизны $R^i_{i_1 i_2 i_3}$ следующим образом:

$${}'\omega^i_{i_1 i_2} = R^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_3}\,. \tag{40}$$

Для этого найдем выражение объекта кривизны через коэффициенты связности из уравнения структуры (39):

$$D(\Gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}) + \Gamma^i_{i_4 i_2}\omega^{i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_3} = R^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3}\,.$$

$$D\Gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2} + \Gamma^i_{i_1 i_2}D\omega^{i_2} + \Gamma^i_{i_4 i_2}\omega^{i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_3} = R^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3}\,.$$

Введем оператор частного дифференцирования

$$\frac{D}{Dy^i}$$

из условия

$$D = \frac{D}{Dy^i}\cdot Dy^i\,.$$

С учетом этого оператора и первого уравнения структуры

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma^i_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}}\omega^{i_2}\omega^{i_3} + \Gamma^i_{i_1 i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3} + \Gamma^i_{i_4 i_2}\omega^{i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_3} \\ = R^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3}\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует выражение (29) для объекта кривизны, полученное ранее,

$$R^i_{i_1 i_2 i_3} = \frac{D\Gamma^i_{i_1 i_2}}{Dy^{i_3}} + \Gamma^i_{i_4 i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1 i_3} + \Gamma^i_{i_1 i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\,.$$

Это обстоятельство доказывает введенное выражение (40) для форм ${}'\omega^i_{i_1 i_2}$.

Уравнение структуры (38) можно переписать в следующем виде:

$$D^3y^i - R^i_{i_1 i_2 i_3}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} = 0\,. \tag{41}$$

Другой частный вид уравнений структуры получим, рассматривая дифференцирование форм по независимым переменным. Сначала рассмотрим дифференциал[5] от $\omega^i = l^i_k dx^k$

$$d\omega^i = dl^i_k dx^k$$

или

$$d\omega^i = (dl^i_{k_1}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1})(l^{i_1}_k dx^k)\,.$$

Отсюда первое уравнение структуры в рассматриваемом случае принимает вид

$$d\omega^i = \omega^i_{i_1}\omega^{i_1}\,. \tag{42}$$

Дифференцируя это уравнение по независимой переменной, получим

$$d^2\omega^i = d\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} + \omega^i_{i_1}d\omega^{i_1}\,.$$

[5] Здесь учтено, что для независимой переменной x^k второй дифференциал $d^2x^k = 0$.

Используя уравнение (42), получим второе уравнение структуры для рассматриваемого случая:

$$d^2\omega^i = d\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} + \omega^i_{i_2}\omega^{i_2}_{i_1}\omega^{i_1} \,. \tag{43}$$

И еще один вид уравнений структуры. Из уравнения (33) выразим

$$\omega^i_{i_1} = {}'\omega^i_{i_1} - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2} \,.$$

Подставляя это выражение в (42), получим первое уравнение структуры

$$d\omega^i = {}'\omega^i_{i_1}\omega^{i_1} - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}\omega^{i_1} \,. \tag{44}$$

Подставляя выражение для $\omega^i_{i_1}$ в формулу (43), получим второе уравнение структуры

$$\begin{aligned} d^2\omega^i \;=\;& d({}'\omega^i_{i_1} - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2})\omega^{i_1} + \\ &+ ({}'\omega^i_{i_2} - \gamma^i_{i_2 i_3}\omega^{i_3})({}'\omega^{i_2}_{i_1} - \gamma^{i_2}_{i_1 i_3}\omega^{i_3})\omega^{i_1} \,. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d^2\omega^i \;=\;& \big(d'\omega^i_{i_1} +' \omega^i_{i_3}\,{}'\omega^{i_3}_{i_1} - \\ &-' \omega^i_{i_3}\gamma^{i_3}_{i_1 i_2}\omega^{i_2} - d\gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2} - \gamma^i_{i_3 i_2}\,{}'\omega^{i_3}_{i_1}\omega^{i_2} + \\ &+ \gamma^i_{i_4 i_2}\gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3} - \gamma^i_{i_1 i_3}\,{}'\omega^{i_3}_{i_2}\omega^{i_2} + \\ &+ \gamma^i_{i_1 i_4}\gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\omega^{i_2}\omega^{i_3}\big)\;\omega^{i_1} \,. \end{aligned} \tag{45}$$

В заключении этого раздела заметим, что аналогичным образом могут быть получены уравнения структуры для дифференциальных форм ${}'\omega^i_{i_1 i_2}$ и форм следующих порядков, что соответствует методу продолжений Г.Ф.Лаптева.

IV. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Так как координаты y^i и x^k пространств соответственно Y и X заданы на одном точечном многообразии, то, следовательно, определена функция

$$x^k(y^i) \,,$$

являющаяся обратной по отношению к функции $y^i(x^k)$.

Разложим эту функцию вблизи точки с координатами y^i в ряд Тейлора, который запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + (x^k_{,i} + x^k_i)Dy^i + \\ &+ (x^k_{,i_1,i_2} + x^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2})Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ &+ (x^k_{,i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3})Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \\ &+ \ldots \end{aligned} \tag{46}$$

Здесь производные

$$x^k_{,i} = \frac{Dx^k}{Dy^i} \,, \quad x^k_{,i_1,i_2} = \frac{D^2x^k}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}} \,,$$
$$x^k_{,i_1,i_2,i_3} = \frac{D^3x^k}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}} \,, \quad \ldots$$

определяются различием систем координат пространств Y и X. Коэффициенты

$$x^k_i \,, \quad x^k_{i_1 i_2} \,, \quad x^k_{i_1 i_2 i_3} \,, \quad \ldots$$

определяют искривление пространства X по отношению к пространству Y. Как и прежде, через D обозначен дифференциал в пространстве Y. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{l}^k_i \;&=\; x^k_{,i} + x^k_i \,, \\ \tilde{l}^k_{i_1 i_2} \;&=\; x^k_{,i_1,i_2} + x^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2} \,, \\ \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} \;&=\; x^k_{,i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3} \,, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{47}$$

с учетом которых ряд Тейлора запишется

$$\begin{aligned} & x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + \tilde{l}^k_i Dy^i + \tilde{l}^k_{i_1 i_2}Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ &\quad + \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \\ &\quad + \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}Dy^{i_4} + \ldots \end{aligned} \tag{48}$$

Если учесть, что

$$\tilde{l}^k_{i_1 i_2} \;=\; \tilde{l}^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2} \,, \tag{49}$$
$$\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} \;=\; \tilde{l}^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3} \,, \tag{50}$$

то имеем

$$\begin{aligned} & x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + \tilde{l}^k_i Dy^i + \\ &\quad + (\tilde{l}^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2})\,Dy^{i_1}Dy^{i_2} + \\ &\quad + (\tilde{l}^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3})\,Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \ldots \end{aligned} \tag{51}$$

1. Дифференциал d и оператор частного дифференцирования Y

Из соотношения (7) следует

$$dx^k = \tilde{l}^k_i Dy^i \,.$$

Здесь символ D означает дифференциал в пространстве Y.

$$dx^k = \tilde{l}^k_i Dy^i = x^k_{,i}Dy^i + x^k_i Dy^i = Dx^k + x^k_i Dy^i \,.$$

Таким образом, дифференциал в пространстве X складывается из дифференциала в пространстве Y и добавки, представляющей собой неполный дифференциал, которую удобно обозначить

$$\delta x^k = x^k_i Dy^i \,.$$

Таким образом,

$$dx^k = Dx^k + \delta x^k \,.$$

Используя дифференциал d в пространстве X, запишем ряд Тейлора в следующем виде[6]:

$$x^k(y^i+Dy^i)=x^k(y^i)+dx^k+d^2x^k+d^3x^k+\dots \tag{52}$$

Введем оператор частного дифференцирования

$$Y_i\equiv\frac{\partial}{Dy^i}\,.$$

Используя его, получим

$$\tilde{l}^k_i=\frac{\partial x^k}{Dy^i}=Y_i(x^k)\,,\quad \tilde{l}^k_{i_1i_2}=\frac{\partial^2 x^k}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}=Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)\,,$$
$$\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}=\frac{\partial^3 x^k}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}}=Y_{i_3}Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)\,,\quad \dots$$

Ряд Тейлора запишем так:

$$x^k(y^i+Dy^i)=x^k(y^i)+\frac{\partial x^k}{Dy^i}Dy^i+$$
$$+\frac{\partial^2 x^k}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}Dy^{i_1}Dy^{i_2}+$$
$$+\frac{\partial^3 x^k}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}+\dots$$

или

$$x^k(y^i+Dy^i)=x^k(y^i)+Y_i(x^k)Dy^i+$$
$$Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)Dy^{i_1}Dy^{i_2}+Y_{i_3}Y_{i_2}Y_{i_1}(x^k)Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}+\dots$$

Введем дифференциал в пространстве X от коэффициентов $\tilde{l}^k_i$ в соответствии с определением

$$d\tilde{l}^k_{i_1}=\tilde{l}^k_{i_1,i_2}Dy^{i_2}+x^k_{i_1i_2}Dy^{i_2}=D\tilde{l}^k_{i_1}+x^k_{i_1i_2}Dy^{i_2}\,.$$

Таким образом, дифференциал в пространстве X складывается из дифференциала в пространстве Y и добавки, представляющей собой неполный дифференциал, которую удобно обозначить

$$\delta\tilde{l}^k_{i_1}=x^k_{i_1i_2}Dy^{i_2}\,.$$

Таким образом,

$$d\tilde{l}^k_{i_1}=D\tilde{l}^k_{i_1}+\delta\tilde{l}^k_{i_1}\,.$$

Аналогично можно записать для коэффициентов $\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}$

$$d\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}=D\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}+\delta\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}\,,$$

где

$$\delta\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}=x^k_{i_1\dots i_pi_{p+1}}Dy^{i_{p+1}}\,.$$

Используя введенные дифференциалы, запишем ряд Тейлора в следующем виде:

$$x^k(y^i+Dy^i)=x^k(y^i)+dx^k+d\tilde{l}^k_{i_1}Dy^{i_1}+$$
$$+d\tilde{l}^k_{i_1i_2}Dy^{i_1}Dy^{i_2}+d\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}+\dots \tag{53}$$

Частную производную в пространстве Y будем обозначать помощью индекса, отделенного запятой:

$$\frac{D\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}}{Dy^{i_{p+1}}}=\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p,i_{p+1}}\,,$$

а дифференцирование Y будем обозначать с помощью индекса, отделенного чертой

$$\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p}}{Dy^{i_{p+1}}}=\tilde{l}^k_{i_1\dots i_p|i_{p+1}}\,.$$

2. Касательное разложение

Умножим ряд Тейлора (48) на матрицу l^i_k. Получим

$$l^i_k(x^k(y^i+Dy^i)-x^k(y^i))=Dy^i+l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2}Dy^{i_1}Dy^{i_2}+$$
$$+l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}+l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3i_4}Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}Dy^{i_4}$$
$$+\dots \tag{54}$$

Назовем это разложение *касательным*, исходя из того, что в первом приближении оно представлено дифференциалом Dy^i.

2.1. Объект связности

Введем обозначение

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}=l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2}\,. \tag{55}$$

Эти коэффициенты назовем *объектом связности или потенциалом калибровочного поля в касательном пространстве* Y. Объект связности можно записать также в следующем виде:

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}=l^i_k\tilde{l}^k_{i_1|i_2}=l^i_k\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\,.$$

Используя выражение (49) запишем

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}=l^i_k\tilde{l}^k_{i_1,i_2}+\tilde{\gamma}^i_{i_1i_2}=l^i_k\frac{D\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}+\tilde{\gamma}^i_{i_1i_2}\,, \tag{56}$$

где введено обозначение

$$\tilde{\gamma}^i_{i_1i_2}=l^i_kx^k_{i_1i_2}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* потенциала или объекта связности в касательном пространстве Y.

---

[6] Так как в рассматриваемом случае координаты y^i являются независимыми, то
$$D^2y^i=0\,.$$
Вместе с тем
$$d^2x^k\neq 0\,.$$

2.2. Объект кривизны

Введем обозначение

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} \,. \qquad (57)$$

Эти коэффициенты назовем *объектом кривизны или объектом калибровочного поля в касательном пространстве* Y. Объект кривизны можно записать также в следующем виде:

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 | i_3} = l^i_k \frac{\partial \tilde{l}^k_{i_1 i_2}}{D y^{i_3}} \,.$$

Используя выражение (50) запишем

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2, i_3} + \tilde{r}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k \frac{D \tilde{l}^k_{i_1 i_2}}{D y^{i_3}} + \tilde{r}^i_{i_1 i_2 i_3} \,, \qquad (58)$$

где введено обозначение

$$\tilde{r}^i_{i_1 i_2 i_3} = l^i_k x^k_{i_1 i_2 i_3} \,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* объекта кривизны в касательном пространстве.

Далее выразим объект кривизны через объекты связности в касательном пространстве. Для этого предварительно выведем необходимое нам соотношение, которое получим, действуя оператором дифференцирования Y_{i_3} на соотношение (27). Получим

$$l^{i_1}_{k|i_3} \cdot \tilde{l}^k_{i_2} + l^{i_1}_k \cdot \tilde{l}^k_{i_2 | i_3} = 0 \,.$$

Отсюда

$$l^{i_1}_{k|i_3} \cdot \tilde{l}^k_{i_2} = -\tilde{\Gamma}^{i_1}_{i_2 i_3} \,. \qquad (59)$$

Теперь учтем, что

$$\begin{aligned} \tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} &= l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 | i_3} = (l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2})_{, i_3} - l^i_{k|i_3} \tilde{l}^k_{i_1 i_2} = \\ &= (l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2})_{|i_3} - (l^i_{k|i_3} \, \tilde{l}^{k_1}_{i_4}) \cdot (l^{i_4}_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2}) \,. \end{aligned}$$

Далее, используя соотношения (55) и (59), получим искомое выражение объекта кривизны через объекты связности

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2, i_3} + \tilde{\Gamma}^i_{i_4 i_3} \tilde{\Gamma}^{i_4}_{i_1 i_2} \,. \qquad (60)$$

Здесь

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2, i_3} = \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2 | i_3} - \tilde{\gamma}^i_{i_1 i_2 i_3}$$

или в другой записи

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} = \frac{D \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2}}{D y^{i_3}} + \tilde{\Gamma}^i_{i_4 i_3} \tilde{\Gamma}^{i_4}_{i_1 i_2} \,.$$

Аналогично определяется *второй объект кривизны* в касательном пространстве Y

$$\tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

и в общем случае n-ый объект кривизны в касательном пространстве Y

$$R^i_{i_1 i_2 \ldots i_{n+2}} = l^i_k \tilde{l}^k_{i_1 i_2 \ldots i_{n+2}} \,.$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в касательном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned} & l^i_k \left(x^k(y^i + Dy^i) - x^k(y^i) \right) = Dy^i + \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2} Dy^{i_1} Dy^{i_2} + \\ & + \tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3} Dy^{i_1} Dy^{i_2} Dy^{i_3} + \tilde{R}^i_{i_1 i_2 i_3 i_4} Dy^{i_1} Dy^{i_2} Dy^{i_3} Dy^{i_4} + \\ & + \ldots \end{aligned} \qquad (61)$$

3. Собственное разложение

В разложении (48) перейдем от дифференциалов Dy к дифференциалам dx, учитывая, что

$$Dy^i = l^i_k dx^k \,;$$

получим

$$\begin{aligned} & x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + dx^k + (\tilde{l}^k_{i_1 i_2} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2}) \, dx^{k_1} dx^{k_2} + \\ & + (\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2} \, l^{i_3}_{k_3}) \, dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \\ & + (\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2} \, l^{i_3}_{k_3} \, l^{i_4}_{k_4}) \, dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} dx^{k_4} + \ldots \end{aligned} \qquad (62)$$

Назовем это разложение *собственным*, исходя из того, что в первом приближении оно представлено дифференциалом dx^k.

3.1. Объект связности

Введем обозначение

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_{i_1 i_2} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2} \,. \qquad (63)$$

Эти коэффициенты назовем *объектом связности или потенциалом калибровочного поля в собственном пространстве* X. Объект связности можно записать также в следующем виде:

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_{i_1 | i_2} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2} = \frac{\partial \tilde{l}^k_{i_1}}{D y^{i_2}} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2} \,.$$

Используя соотношение (49), запишем

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_{i_1, i_2} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{\gamma}^k_{k_1 k_2} = \frac{D \tilde{l}^k_{i_1}}{D y^{i_2}} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{\gamma}^k_{k_1 k_2} \,, \qquad (64)$$

где введено обозначение

$$\tilde{\gamma}^k_{k_1 k_2} = x^k_{i_1 i_2} \, l^{i_1}_{k_1} \, l^{i_2}_{k_2} \,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* потенциала или объекта связности в собственном пространстве X.

3.2. Объект кривизны

Введем обозначение

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\,. \tag{65}$$

Эти коэффициенты назовем *объектом кривизны или объектом калибровочного поля в собственном пространстве* X. Объект кривизны можно записать также в следующем виде:

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_{i_1i_2|i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} = \frac{\partial \tilde{l}^k_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\,.$$

Используя выражение (50), запишем

$$\begin{aligned}\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} &= \tilde{l}^k_{i_1i_2|i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} = \\ &= \frac{D\tilde{l}^k_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3}\,, \end{aligned} \tag{66}$$

где введено обозначение

$$\tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} = x^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\,.$$

Это уравнение назовем *калибровочным преобразованием* объекта кривизны в собственном пространстве X.

Далее выразим объект кривизны через объекты связности в собственном пространстве. Для этого предварительно выведем необходимое нам соотношение. Подействуем оператором дифференцирования Y_{i_2} на соотношение (13). Получим

$$\tilde{l}^k_{i_1|i_2}\cdot l^{i_1}_{k_1} + \tilde{l}^k_{i_1}\cdot l^{i_1}_{k_1|i_2} = 0\,.$$

Умножим это соотношение на $l^{i_2}_{k_2}$. Получим

$$\tilde{l}^k_{i_1|i_2}\cdot l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{l}^k_{i_1}\cdot l^{i_1}_{k_1|i_2}\, l^{i_2}_{k_2} = 0\,.$$

Отсюда

$$\tilde{l}^k_{i_1}\cdot l^{i_1}_{k_1|i_2}\, l^{i_2}_{k_2} = -\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}\,. \tag{67}$$

Теперь учтем, что

$$\begin{aligned}\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} &= \tilde{l}^k_{i_1i_2|i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} = (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2})_{|i_3}\, l^{i_3}_{k_3} - \\ &\qquad - \tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1|i_3}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} - \tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2|i_3}\, l^{i_3}_{k_3} = \\ &= (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2})_{|i_3}\, l^{i_3}_{k_3} - (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_4}\, l^{i_2}_{k_2})(\tilde{l}^{k_4}_{i_4}\, l^{i_4}_{k_1|i_3}\, l^{i_3}_{k_3}) - \\ &\qquad - (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_4})(l^{k_4}_{i_4}\, l^{i_4}_{k_2|i_3}\, l^{i_3}_{k_3})\,. \end{aligned}$$

Далее, используя соотношения (63) и (67), получим искомое выражение объекта кривизны через объекты связности

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2,k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3}\,.$$

Здесь

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2,k_3} = \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2|i_3}\, l^{i_3}_{k_3} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{Dy^{i_3}}\, \frac{Dy^{i_3}}{\partial x^{k_3}}$$

или в другой записи

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3}\,. \tag{68}$$

Далее будет показано, что с этим объектом кривизны связан общеизвестных тензор кривизны.

Аналогично определяется *второй объект кривизны* в собственном пространстве X

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3k_4} = \tilde{l}^k_{i_1i_2i_3i_4} l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\, l^{i_4}_{k_4}\,,$$

и в общем случае n-ый объект кривизны в касательном пространстве Y

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2\dots k_{n+2}} = \tilde{l}^k_{i_1i_2\dots i_{n+2}} l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\dots l^{i_{n+2}}_{k_{n+2}}\,.$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в собственном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) &= x^k(y^i) + dx^k + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_1} dx^{k_2} + \qquad (69)\\ &+ \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} + \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3k_4} dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3} dx^{k_4} + \\ &+ \dots \qquad (70)\end{aligned}$$

4. Дифференциальные формы

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора в виде (51). Для удобства приведем его еще раз:

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) &= x^k(y^i) + \tilde{l}^k_i Dy^i + (\tilde{l}^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1i_2})Dy^{i_1}Dy^{i_2} \\ &+ (\tilde{l}^k_{i_1i_2,i_3} + x^k_{i_1i_2i_3})Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} + \dots \end{aligned}$$

Преобразуем третье слагаемое этого ряда

$$\begin{aligned} (\tilde{l}^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1i_2})Dy^{i_1}Dy^{i_2} &= (D\tilde{l}^k_{i_1} + x^k_{i_1i_2}Dy^{i_2})Dy^{i_1} = \\ &= (D\tilde{l}^k_{i_1}\, l^{i_1}_{k_1} + x^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{k_2}_{i_3} dy^{i_3})\cdot \tilde{l}^{k_1}_{i_4} dy^{i_4}\,. \end{aligned}$$

Далее введем следующие обозначения:

$$\tilde{\omega}^k_{k_1} = D\tilde{l}^k_{i_1}\, l^{i_1}_{k_1}\,.$$

Кроме того, учтем, что

$$x^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} = \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2}$$

и

$$\tilde{l}^{k_2}_{i_3} Dy^{i_3} = dx^{k_2}\,, \quad \tilde{l}^{k_1}_{i_4} Dy^{i_4} = dx^{k_1}\,.$$

В результате третье слагаемое ряда Тейлора приобретает вид

$$(\tilde{\omega}^k_{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2})\, dx^{k_1}\,.$$

Вместе с тем, в выражении (52) это слагаемое имело вид d^2x^k. Таким образом, получаем уравнение

$$d^2x^k = \tilde{\omega}^k_{k_1} dx^{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2} dx^{k_1}\,. \tag{71}$$

Это уравнение представляет частный случай *первого уравнения структуры.*

Иногда вместо дифференциальных форм $\tilde{\omega}^k_{k_1}$ удобно ввести дифференциальные формы

$$'\tilde{\omega}^k_{k_1} = \tilde{\omega}^k_{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2}dx^{k_2} .$$

Из выражения (64) следует

$$'\tilde{\omega}^k_{k_1} = \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}dx^{k_2} .$$

Используя дифференциальные формы $'\tilde{\omega}^k_{k_1}$, получим первое уравнение структуры в следующем виде:

$$d^2x^k = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1}dx^{k_1} . \tag{72}$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$d^2x^k - \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} = 0 . \tag{73}$$

В частном случае это уравнение представляет собой уравнение геодезической пространства Y, записанное по отношению к координатам системы отсчета X.

Аналогично предыдущему рассмотрим теперь четвертое слагаемое ряда Тейлора

$$\begin{aligned}(\tilde{l}^k_{i_1i_2,i_3} + x^k_{i_1i_2i_3})Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3} &= \\ = (D\tilde{l}^k_{i_1i_2} + x^k_{i_1i_2i_3}Dy^{i_3})Dy^{i_1}Dy^{i_2} &= (D\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} + \\ + x^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}\tilde{l}^{k_3}_{i_4}Dy^{i_4}) &\cdot \tilde{l}^{k_1}_{i_5}Dy^{i_5}\tilde{l}^{k_2}_{i_6}Dy^{i_6} .\end{aligned}$$

Далее введем следующие обозначения:

$$\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} = D\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} .$$

Кроме того, учтем, что

$$\tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} = x^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}$$

и

$$\tilde{l}^{k_3}_{i_4}Dy^{i_4} = dx^{k_3} , \quad \tilde{l}^{k_1}_{i_5}Dy^{i_5} = dx^{k_1} , \quad \tilde{l}^{k_2}_{i_6}Dy^{i_6} = dx^{k_2} .$$

В результате четвертое слагаемое ряда Тейлора приобретает вид

$$(\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_3})\, dx^{k_1}dx^{k_2} .$$

Вместе с тем, в выражении (52) это слагаемое имело вид d^3x^k. Таким образом, получаем уравнение

$$d^3x = (\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_3})\, dx^{k_1}dx^{k_2} . \tag{74}$$

Это уравнение представляет частный случай *второго уравнения структуры.*

Иногда вместо дифференциальных форм $\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}$ удобно ввести дифференциальные формы

$$'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} = \tilde{\omega}^k_{k_1k_2} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_3} .$$

Используя их, получим уравнение структуры в следующем виде:

$$d^3x^k = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} . \tag{75}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя первое уравнение структуры (72):

$$d^3x^k = d'\tilde{\omega}^k_{k_1}dx^{k_1} + {}'\tilde{\omega}^k_{k_1}d^2x^{k_1} = d\,'\tilde{\omega}^k_{k_1}dx^{k_1} + {}'\tilde{\omega}^k_{k_4}\,'\tilde{\omega}^{k_4}_{k_1}dx^{k_1} .$$

Используя это соотношение, запишем второе уравнение структуры в следующем виде:

$$d\,'\tilde{\omega}^k_{k_1} + {}'\tilde{\omega}^k_{k_2}\,'\tilde{\omega}^{k_2}_{k_1} = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}dx^{k_2} . \tag{76}$$

Покажем, что дифференциальные формы $'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}$ связаны с объектом кривизны $\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}$ следующим образом:

$$'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} = \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_3} . \tag{77}$$

Для этого покажем, что из уравнения структуры (76) следует выражение объекта кривизны через коэффициенты связности:

$$d(\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}dx^{k_2}) + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}dx^{k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3}dx^{k_3} = \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_2}dx^{k_3}$$

или

$$\begin{aligned}d\,\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}dx^{k_2} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}d^2x^{k_2} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}dx^{k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3}dx^{k_3} &= \\ = \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_2}dx^{k_3} .&\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}}dx^{k_2}dx^{k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3}dx^{k_2}dx^{k_3} &+ \\ + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}dx^{k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3}dx^{k_3} &= \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_2}dx^{k_3} .\end{aligned}$$

Отсюда следует выражение для объекта кривизны, полученное ранее

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3} . \tag{78}$$

Это обстоятельство доказывает введенное ранее выражение (77) для дифференциальных форм $'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}$.

Уравнение структуры (75) можно переписать в следующем виде

$$d^3x^k - \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3} = 0 . \tag{79}$$

5. Связь между коэффициентами прямого и обратного разложений

Коэффициенты разложения функции $x^k(y^i)$ в ряд Тейлора зависят от коэффициентов разложения функции $y^i(x^k)$ в ряд Тейлора, если учесть условие, что функция $x^k(y^i)$ является обратной по отношению к функции $y^i(x^k)$.

5.1. Связь между коэффициентами $\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}$, $\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}$ и коэффициентами $\Gamma^k_{k_1k_2}$, $R^k_{k_1k_2k_3}$

Рассмотрим связь между коэффициентами собственного разложения обратного преобразования $x^k(y^i)$ и коэффициентами касательного разложения прямого преобразования $y^i(x^k)$. Эту связь найдем из следующих соотношений:

$$\frac{\partial x^k(y(x))}{\partial x^{k_1}} = \frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i_1}}\cdot\frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}} = \delta^k_{k_1}, \tag{80}$$

$$\frac{\partial^2 x^k(y(x))}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = 0, \tag{81}$$

$$\frac{\partial^3 x^k(y(x))}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = 0, \quad \dots, \tag{82}$$

вытекающих из условия, что функция $x^k(y^i)$ является обратной по отношению к функции $y^i(x^k)$.

Найдем сначала связь между коэффициентами второго слагаемого ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами второго слагаемого ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из соотношения (80) следует

$$\frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i_1}}\cdot l^{i_1}_{k_1} = \delta^k_{k_1}.$$

Отсюда следует соотношение, которое уже было получено ранее

$$\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}} = \tilde{l}^{k_1}_{i_1}.$$

Найдем теперь связь между коэффициентами $\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}$ третьего слагаемого ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами $\Gamma^k_{k_1k_2}$ ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из соотношения (81) имеем[7]

$$\frac{\partial^2 x^k(y(x))}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = \frac{\partial}{\partial x^{k_2}}\left(\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\cdot\frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}\cdot\frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\frac{Dy^{i_2}(x)}{\partial x^{k_2}} + \frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i_1}}\cdot\frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = 0.$$

Отсюда

$$\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2} + \tilde{l}^k_{i_1}\, l^{i_1}_{k_1k_2} = 0$$

или

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = -\Gamma^k_{k_1k_2}. \tag{83}$$

[7] Для выполнения указанного соотношения необходимо полагать

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_2}}\frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}} = \frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}.$$

Ср. с примечанием на стр. 3.

С учетом полученного результата первое уравнение структуры (73) приобретает вид

$$d^2x^k + \Gamma^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2} = 0. \tag{84}$$

В частном случае это уравнение представляет собой уравнение геодезической искривленного пространства Y, записанное по отношению к координатам системы отсчета X.

Найдем теперь связь между коэффициентами $\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}$ ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами $R^k_{k_1k_2k_3}$ ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из соотношения (82) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_3}}\left(\frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_1}Dy^{i_2}}\cdot\frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\frac{Dy^{i_2}(x)}{\partial x^{k_2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i_1}}\cdot\frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^3 x^k(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}}\cdot\frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\frac{Dy^{i_2}(x)}{\partial x^{k_2}}\frac{Dy^{i_3}(x)}{\partial x^{k_3}} +$$
$$+ \frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}\cdot\frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_1}}\frac{Dy^{i_2}(x)}{\partial x^{k_2}} +$$
$$+ \frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}\cdot\frac{Dy^{i_1}(x)}{\partial x^{k_1}}\frac{D^2y^{i_2}(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}} +$$
$$+ \frac{\partial^2 x^k(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_1}}\cdot\frac{Dy^{i_3}(x)}{\partial x^{k_3}}\frac{D^2y^{i_1}(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} +$$
$$+ \frac{\partial x^k(y)}{Dy^{i}}\cdot\frac{D^3y^{i}(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}} = 0.$$

Отсюда следует

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} + (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_1}_{k_4})(\tilde{l}^{k_4}_{i_4}\, l^{i_4}_{k_1k_3}) + (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_4})(\tilde{l}^{k_4}_{i_4}\, l^{i_4}_{k_2k_3}) +$$
$$+ (\tilde{l}^k_{i_1i_3}\, l^{i_3}_{k_3}\, l^{i_1}_{k_4})(\tilde{l}^{k_4}_{i_4}\, l^{i_4}_{k_1k_2}) + R^k_{k_1k_2k_3} = 0.$$

Используя выражения (15) и (63), получим

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3} + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} +$$
$$+ R^k_{k_1k_2k_3} = 0.$$

Подставим сюда соотношения (20) и (83), получим

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} - \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} - \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3} - \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} +$$
$$+ \Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} = 0.$$

Отсюда следует

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = -\Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} + \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3}. \tag{85}$$

Это же соотношение можно получить, подставляя выражение (83) в формулу (78) для объекта кривизны $\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3}$. Из этого соотношения следует общепринятое выражение для тензора кривизны.

С учетом полученного результата второе уравнение структуры (79) приобретает вид

$$d^3x^k = \left(-\Gamma^k_{k_1k_2,k_3} + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} + \right.$$
$$\left. + \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3}\right)dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}. \tag{86}$$

5.2. Связь между коэффициентами $\tilde\Gamma^i_{i_1i_2}$, $\tilde R^i_{i_1i_2i_3}$ и коэффициентами $\Gamma^i_{i_1i_2}$, $R^i_{i_1i_2i_3}$

Рассмотрим связь между коэффициентами касательного разложения обратного преобразования $x^k(y^i)$ и коэффициентами собственного разложения прямого преобразования $y^i(x^k)$. Как и прежде, эту связь найдем из условия, что функция $x^k(y^i)$ является обратной по отношению к функции $y^i(x^k)$. Указанное условие записывается в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
\frac{Dy^i(x(y))}{Dy^{i_1}} &= \frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}=\delta^i_{i_1}\,, && (87)\\
\frac{D^2y^i(x(y))}{Dy^{i_1}Dy^{i_2}} &= 0\,, && (88)\\
\frac{D^3y^i(x(y))}{Dy^{i_1}Dy^{i_2}Dy^{i_3}} &= 0\,, && (89)\\
&\dots,
\end{aligned}$$

Найдем сначала связь между коэффициентами второго слагаемого ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами разложения функции $y^i(x^k)$ в ряд Тейлора. Из соотношения (87) следует

$$l^i_{k_1}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}=\delta^i_{i_1}\,.$$

Отсюда следует соотношение, которое уже было получено ранее:

$$\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}=\tilde l^{k_1}_{i_1}\,.$$

Найдем теперь связь между коэффициентами $\tilde\Gamma^i_{i_1i_2}$ ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами $\Gamma^i_{i_1i_2}$ ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из соотношения (88) имеем

$$\frac{D^2y^i(x(y))}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}=\frac{D}{Dy^{i_2}}\left(\frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\right)=$$
$$=\frac{D}{Dy^{i_2}}\frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}+\frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}}\cdot\frac{D}{Dy^{i_2}}\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}=0$$

или

$$\frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2}(y)}{Dy^{i_2}}+\frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial^2x^{k_1}(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}=0\,.$$

Отсюда

$$l^i_{k_1k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_2}+l^i_k\,\tilde l^k_{i_1i_2}=0 \tag{90}$$

и

$$\tilde\Gamma^i_{i_1i_2}=-\Gamma^i_{i_1i_2}\,. \tag{91}$$

Найдем теперь связь между коэффициентами $\tilde R^i_{i_1i_2i_3}$ ряда Тейлора $x^k(y^i)$ и коэффициентами $R^i_{i_1i_2i_3}$ ряда Тейлора $y^i(x^k)$. Из соотношения (89) имеем

$$\frac{D}{Dy^{i_3}}\left(\frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2}(y)}{Dy^{i_2}}+\right.$$
$$\left.\frac{Dy^i(x)}{\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial^2x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}Dy^{i_2}}\right)=0\,.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\frac{D^3y^i(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2}(y)}{Dy^{i_2}}\frac{\partial x^{k_3}(y)}{Dy^{i_3}}+\\
&+\frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial^2x^{k_1}(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2}(y)}{Dy^{i_2}}+\\
&+\frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\cdot\frac{\partial x^{k_1}(y)}{Dy^{i_1}}\frac{\partial^2x^{k_2}(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}}+\\
&+\frac{D^2y^i(x)}{\partial x^{k_3}\partial x^{k}}\cdot\frac{\partial x^{k_3}(y)}{Dy^{i_3}}\frac{\partial^2x^{k}(y)}{Dy^{i_2}Dy^{i_1}}+\\
&+\frac{Dy^i(x)}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial^3x^k(y)}{Dy^{i_3}Dy^{i_2}Dy^{i_1}}=0\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$R^i_{i_1i_2i_3}+(l^i_{k_1k_2}\,\tilde l^{k_2}_{i_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_4})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde l^{k_4}_{i_1i_3})+(l^i_{k_1k_2}\,\tilde l^{k_1}_{i_1}\,\tilde l^{k_2}_{i_4})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde l^{k_4}_{i_2i_3})+$$
$$+(l^i_{k_1k_3}\,\tilde l^{k_3}_{i_3}\,\tilde l^{k_1}_{i_4})(l^{i_4}_{k_4}\,\tilde l^{k_4}_{i_1i_2})+\tilde R^i_{i_1i_2i_3}=0\,.$$

Используя выражения (23), (55) и (91), получим

$$R^i_{i_1i_2i_3}-\Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3}-\Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3}-\Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2}+$$
$$+\tilde R^i_{i_1i_2i_3}=0\,.$$

Подставим сюда соотношение (29), получим

$$\Gamma^i_{i_1i_2,i_3}+\Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3}+\Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3}-\Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3}-$$
$$-\Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3}-\Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2}+\tilde R^i_{i_1i_2i_3}=0\,.$$

Отсюда получим

$$\tilde R^i_{i_1i_2i_3}=-\Gamma^i_{i_1i_2,i_3}+\Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2}\,. \tag{92}$$

V. СЛОЖНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Пусть на точечном многообразии заданы координаты y^i, x^k, t^l и определены функции

$$y^i(x^k)\,,\quad x^i(t^l)\,.$$

Разложим эти функции вблизи точки с координатами t^l в ряды Тейлора, которые запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k)+Dy^i+D^2y^i+D^3y^i+\dots,\\
x^k(t^l+\Delta t^l) &= x^k(t^l)+dx^k+d^2x^k+d^3x^k+\dots
\end{aligned}$$

В этом случае координаты x^k не являются независимыми и поэтому

$$d^2x^k\neq0\,,\quad d^3x^k\neq0\,,\quad \dots$$

и разложение функции $y^i(x^k)$ следует записать так:

$$
\begin{aligned}
&y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+l^i_k dx^k+(l^i_k d^2x^k+l^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2})\\
&+\big(l^i_k d^3x^k+l^i_{k_4k_3}d^2x^{k_4}dx^{k_3}+l^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\\
&\qquad+l^i_{k_4k_2}d^2x^{k_4}dx^{k_2}+l^i_{k_1k_4}dx^{k_1}d^2x^{k_4}\big)+\ldots
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
Dy^i &= l^i_k dx^k\,, && (93)\\
D^2y^i &= l^i_k d^2x^k+l^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2}\,, && (94)\\
D^3y^i &= l^i_k d^3x^k+l^i_{k_4k_3}d^2x^{k_4}dx^{k_3}+l^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}\\
&\quad+l^i_{k_4k_2}d^2x^{k_4}dx^{k_2}+l^i_{k_1k_4}dx^{k_1}d^2x^{k_4}\,, && (95)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

В частном случае, когда в функциональной зависимости $y^i(x^k)$ координаты x^k являются независимыми и

$$d^2x^k=0\,,\quad d^3x^k=0\,,\quad \ldots\,,$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&Dy^i=l^i_k dx^k\,,\quad D^2y^i=l^i_{kk_1}dx^k dx^{k_1}\,,\\
&\qquad D^3y^i=l^i_{kk_1k_2}dx^k dx^{k_1}dx^{k_2}\,,\quad\ldots
\end{aligned}
$$

Это соответствует ранее установленным соотношениям (9), (10), (11).

В другом частном случае обратной функциональной зависимости $x^k(y^i)$, когда координаты y^i являются независимыми и

$$D^2y^i=0\,,\quad D^3y^i=0\,,\quad \ldots\,,$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&dx^k=\tilde l^k_i Dy^i\,,\\
&d^2x^k+\tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2}=0\,,\\
&d^3x^k+\tilde l^k_i\, l^i_{k_4k_3}d^2x^{k_4}dx^{k_3}+\tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\\
&\qquad+\tilde l^k_i\, l^i_{k_4k_2}d^2x^{k_4}dx^{k_2}+\tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_4}dx^{k_1}d^2x^{k_4}=0\,,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Из второго уравнения следует

$$d^2x^k+\Gamma^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2}=0\,.$$

Это уравнение совпадает с ранее установленным уравнением (84). Из третьего уравнения с учетом равенств (15) и (17) следует

$$
\begin{aligned}
d^3x^k-\Big(\Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} &- R^k_{k_1k_2k_3}+\Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3}+\\
&+\Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3}\Big)\,dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}=0\,.
\end{aligned}
$$

Подставляя сюда выражение (20) для объекта кривизны, получим

$$
\begin{aligned}
d^3x^k=\big(-\Gamma^k_{k_1k_2,k_3} &+ \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3}+\\
&+\Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3}\big)\,dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}\,.
\end{aligned}
$$

Это соотношение также соответствует ранее установленному соотношению (86).

1. Абсолютный дифференциал

Умножим уравнения (93), (94) и (96) на $\tilde l^k_i$ и будем рассматривать левые части

$$\tilde l^k_i Dy^i\,,\quad \tilde l^k_i D^2y^i\,,\quad \tilde l^k_i D^3y^i\,,\quad\ldots$$

как дифференциалы соответствующих порядков другого вида дифференцирования координат x^k. Это дифференцирование называется *абсолютным.* Абсолютный дифференциал обозначим $\mathcal D$. Отсюда

$$\tilde l^k_i Dy^i=\mathcal D x^k\,,\quad \tilde l^k_i D^2y^i=\mathcal D^2x^k\,,\quad \tilde l^k_i D^3y^i=\mathcal D^3x^k\,,\quad\ldots$$

и выражения для абсолютных дифференциалов таковы:

$$
\begin{aligned}
\mathcal D x^k &= dx^k\,, && (96)\\
\mathcal D^2x^k &= d^2x^k+\Gamma^k_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2}\,, && (97)\\
\mathcal D^3x^k &= d^3x^k+\Gamma^k_{k_4k_3}d^2x^{k_4}dx^{k_3}+R^k_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+\\
&\quad+\Gamma^k_{k_4k_2}d^2x^{k_4}dx^{k_2}+\Gamma^k_{k_1k_4}dx^{k_1}d^2x^{k_4}\,, && (98)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

VI. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ

Когда рассматривается вектор x^k, то полагается, что его направление произвольно и не определено. Если есть необходимость рассматривать векторы определенных *различных* направлений, то такие векторы обозначаются числом в качестве нижнего индекса

$$x^i_1\,,\quad x^i_2\,,\quad x^i_3\,,\quad\ldots$$

Точно так же дифференциал dx^k представляет собой вектор произвольного неопределенного направления, а в том случае, если необходимо рассматривать дифференциалы как векторы определенных различных направлений, они также обозначаются числом в качестве нижнего индекса

$$d_1x^i\,,\quad d_2x^i\,,\quad d_3x^i\,,\quad\ldots$$

В предыдущих разделах рассматривались разложения в ряд Тейлора при дифференцировании по одному направлению. Отсюда в разложении участвуют дифференциалы одного типа:

$$
\begin{aligned}
&y^i(x^k+dx^k)=y^i(x^k)+l^i_k dx^k+l^i_{k_1k_2}dx^{k_1}dx^{k_2}+\\
&+l^i_{k_1k_2k_3}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}+l^i_{k_1k_2k_3k_4}dx^{k_1}dx^{k_2}dx^{k_3}dx^{k_4}+\ldots
\end{aligned}
$$

При этом коэффициенты разложения $l^i_{k_1k_2\ldots k_p}$ симметричны по нижним индексам. Например,

$$l^i_{k_1k_2}=l^i_{\langle k_1k_2\rangle}=\frac{1}{2}(l^i_{k_1k_2}+l^i_{k_2k_1})\,.$$

При использовании дифференцирования по разным направлениям результаты предыдущих разделов должны быть обобщены[8]. Далее рассмотрим такое обобщение.

1. Ряд Тейлора для функции $y^i(x^k)$

Обратимся к разложению (1). Теперь дифференциалы dx, входящие в каждое из слагаемых, имеют свое направление. Поэтому

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + \left(y^i_{,k} + y^i_k\right) dx^k + \\ &+ \left(y^i_{,k_1,k_2} + y^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2}\right) d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} + \\ &+ \left(y^i_{,k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2,k_3} + \right. \\ &\qquad \left. + y^i_{k_1k_2k_3}\right) d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} + \ldots \end{aligned}$$

Здесь производные

$$y^i_{,k} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}, \quad y^i_{,k_1,k_2} = \frac{\partial_2\partial_1 y^i}{\partial_2 x^{k_2}\partial_1 x^{k_1}},$$
$$y^i_{,k_1,k_2,k_3} = \frac{\partial_3\partial_2\partial_1 y^i}{\partial_3 x^{k_3}\partial_2 x^{k_2}\partial_1 x^{k_1}}, \quad \ldots$$

С учетом введенных нами коэффициентов

$$\begin{aligned} l^i_k &= y^i_{,k} + y^i_k, \\ l^i_{k_1k_2} &= y^i_{,k_1,k_2} + y^i_{k_1,k_2} + y^i_{k_1k_2}, \\ l^i_{k_1k_2k_3} &= y^i_{,k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1,k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2,k_3} + y^i_{k_1k_2k_3}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

ряд Тейлора примет вид

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + l^i_k dx^k + l^i_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} + \\ &+ l^i_{k_1k_2k_3} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} + \\ &+ l^i_{k_1k_2k_3k_4} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} d_4x^{k_4} + \ldots \end{aligned}$$

С использованием дифференциала D имеем

$$y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + D_2D_1y^i + D_3D_2D_1y^i + \ldots$$

Используя оператор частного дифференцирования

$$X_k \equiv \frac{D}{\partial x^k},$$

получим

$$l^i_k = \frac{Dy^i}{\partial x^k} = X_k(y^i), \tag{99}$$
$$l^i_{k_1k_2} = \frac{D_2D_1y^i}{\partial_2 x^{k_2}\partial_1 x^{k_1}} = X_{k_2}X_{k_1}(y^i), \tag{100}$$
$$l^i_{k_1k_2k_3} = \frac{D_3D_2D_1y^i}{\partial_3 x^{k_3}\partial_2 x^{k_2}\partial_1 x^{k_1}} = X_{k_3}X_{k_2}X_{k_1}(y^i), \tag{101}$$
$$\ldots,$$

а ряд Тейлора запишется так:

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + \frac{Dy^i}{\partial x^k} dx^k + \\ &+ \frac{D_2D_1y^i}{\partial_2 x^{k_2}\partial_1 x^{k_1}} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} + \\ &+ \frac{D_3D_2D_1y^i}{\partial_3 x^{k_3}\partial_2 x^{k_2}\partial_1 x^{k_1}} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} + \ldots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + X_k(y^i)dx^k + \\ &+ X_{k_2}X_{k_1}(y^i) d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} + \\ &+ X_{k_3}X_{k_2}X_{k_1}(y^i) d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} + \ldots \end{aligned}$$

Ряд Тейлора (12) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + Dy^i + D_2 l^i_{k_1} d_1x^{k_1} + \\ &+ D_3 l^i_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} + D_4 l^i_{k_1k_2k_3} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} + \ldots \end{aligned}$$

1.1. *Разложение на симметрии*

Коэффициенты разложения $l^i_{k_1k_2\ldots k_p}$ в общем случае несимметричны по нижним индексам. Они могут быть разложены на *симметрии*[9].

Коэффициенты $l^i_{k_1k_2}$ разлагаются на две симметрии

$$l^i_{k_1k_2} = l^i_{(k_1k_2)_1} + l^i_{(k_1k_2)_2},$$

где

$$l^i_{(k_1k_2)_1} = l^i_{[k_1k_2]} = \frac{1}{2}(l^i_{k_1k_2} - l^i_{k_2k_1})$$

– слагаемое, антисимметричное по нижним индексам, а

$$l^i_{(k_1k_2)_2} = l^i_{\langle k_1k_2\rangle} = \frac{1}{2}(l^i_{k_1k_2} + l^i_{k_2k_1})$$

– слагаемое, симметричное по нижним индексам.

Коэффициенты $l^i_{k_1k_2k_3}$ разлагаются на четыре симметрии

$$l^i_{k_1k_2k_3} = l^i_{(k_1k_2k_3)_1} + l^i_{(k_1k_2k_3)_2} + l^i_{(k_1k_2k_3)_3} + l^i_{(k_1k_2k_3)_4},$$

где

$$l^i_{(k_1k_2k_3)_1} = l^i_{[k_1k_2k_3]} =$$
$$\frac{1}{4}(l^i_{k_1k_2k_3} + l^i_{k_2k_3k_1} + l^i_{k_3k_1k_2} - l^i_{k_2k_1k_3} - l^i_{k_1k_3k_2} - l^i_{k_3k_2k_1})$$

– слагаемое, антисимметричное по нижним индексам,

$$l^i_{(k_1k_2k_3)_2} =$$
$$\frac{1}{4}(l^i_{k_1k_2k_3} - l^i_{k_2k_3k_1} - l^i_{k_3k_1k_2} - l^i_{k_2k_1k_3} - l^i_{k_1k_3k_2} + l^i_{k_3k_2k_1}),$$

---

[8] Полезно иметь в виду, что вариационное исчисление фактически вводит дифференцирование по двум направлениям.

[9] См. Глава 1.2. Раздел II.5.

$$l^i_{(k_1k_2k_3)_3} =$$
$$\frac{1}{4}(l^i_{k_1k_2k_3} - l^i_{k_2k_3k_1} - l^i_{k_3k_1k_2} + l^i_{k_2k_1k_3} + l^i_{k_1k_3k_2} - l^i_{k_3k_2k_1}),$$

а

$$l^i_{(k_1k_2k_3)_4} = l^i_{\langle k_1k_2k_3\rangle} =$$
$$\frac{1}{4}(l^i_{k_1k_2k_3} + l^i_{k_2k_3k_1} + l^i_{k_3k_1k_2} + l^i_{k_2k_1k_3} + l^i_{k_1k_3k_2} + l^i_{k_3k_2k_1})$$

– слагаемое, симметричное по нижним индексам.

В Разделе I.2. Главы 3.4. показано, что коэффициенты $l^i_{k_1k_2k_3k_4}$ разлагаются на десять симметрий.

В соответствии с разложением коэффициентов $l^i_{k_1k_2\dots k_p}$ на симметрии произведения дифференциалов $d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\dots d_px^{k_p}$ также разлагаются на симметрии. Например,

$$d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} = (d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_1 + (d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_2\,,$$

где

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_1 = d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} - d_2x^{k_1}d_1x^{k_2}$$

– антисимметричное слагаемое, а

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_2 = d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} + d_2x^{k_1}d_1x^{k_2}$$

– симметричное слагаемое.

Вышеуказанную антисимметричную комбинацию принято рассматривать как специальное умножение, обозначаемое символом $\wedge$ и называемое *внешним* умножением. Таким образом,

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_1 = d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\,.$$

Так же рассматривается антисимметричная комбинация произвольного числа сомножителей

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\dots d_px^{k_p})_1 = d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\wedge\dots\wedge d_px^{k_p}\,.$$

Вышеуказанную симметричную комбинацию принято рассматривать как специальное умножение, обозначаемое символом $\odot$. Таким образом,

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2})_2 = d_1x^{k_1}\odot d_2x^{k_2}\,.$$

Так же рассматривается симметричная комбинация произвольного числа сомножителей

$$(d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\dots d_px^{k_p})_p = d_1x^{k_1}\odot d_2x^{k_2}\odot\dots\odot d_px^{k_p}\,.$$

Число сомножителей в антисимметричном произведении равно числу независимых направлений в пространстве, то есть размерности пространства. Отсюда следует, что число слагаемых в разложении Тейлора на антисимметричные слагаемые конечно и равно размерности пространства. Например, если размерность пространства равна четырем, такое разложение имеет вид

$$\begin{aligned}y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) &+ l^i_k dx^k + l^i_{[k_1k_2]}d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2} +\\ &+ l^i_{[k_1k_2k_3]}d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3} +\\ &+ l^i_{[k_1k_2k_3k_4]}d_1x^{k_1}\wedge d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3}\wedge d_4x^{k_4}\,.\end{aligned}$$

Из выражения (2) видно, что антисимметризация коэффициентов разложения $l^i_{k_1k_2\dots k_p}$ по двум последним индексам оставляет только два последних слагаемых

$$\begin{aligned} l^i_{[k_1k_2]} &= y^i_{k_1,k_2]} + y^i_{k_1k_2]}\,, &(102)\\ l^i_{k_1[k_2k_3]} &= y^i_{k_1[k_2,k_3]} + y^i_{k_1[k_2k_3]}\,,\\ &\dots\\ l^i_{k_1k_2\dots[k_{p-1},k_p]} &= y^i_{k_1k_2\dots[k_{p-1},k_p]} + y^i_{k_1k_2\dots[k_{p-1},k_p]}\,, &(103)\\ &\dots, \end{aligned}$$

то есть такого рода комбинации не зависят от преобразования системы координат и являются тензорами. Далее такого рода антисимметризация используется при формировании тензоров кручения и кривизны. В соответствии с разложением коэффициентов $l^i_{k_1k_2\dots k_p}$ и произведений дифференциалов $d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\dots d_px^{k_p}$ по симметриям дифференциалы p-порядка также разлагаются по симметриям. Например,

$$D_2D_1 = (D_2D_1)_1 + (D_2D_1)_2\,,$$

где

$$(D_2D_1)_1 = D_2D_1 - D_1D_2 = D_2\wedge D_1\,,$$

– дифференцирование, сопровождаемое антисимметризацией, а

$$(D_2D_1)_2 = D_2D_1 + D_1D_2 = D_2\odot D_1\,,$$

– дифференцирование, сопровождаемое симметризацией.

1.2. *Касательное разложение*

Ряд Тейлора (14), соответствующий касательному разложению, приобретает вид

$$\begin{aligned}\tilde l^k_i(y^i(x^k+dx^k) - y^i(x^k)) = dx^k &+ \tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} +\\ &+ \tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3} +\\ &+ \tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3k_4}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}d_4x^{k_4} + \dots\end{aligned}$$

Объект связности (15) в касательном пространстве X

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \tilde l^k_i\, l^i_{k_1k_2}$$

несимметричен по нижним индексам и может быть представлен в виде суммы

$$\Gamma^k_{k_1k_2} = \Gamma^k_{[k_1k_2]} + \Gamma^k_{\langle k_1k_2\rangle}\,.$$

Слагаемое $\Gamma^k_{[k_1k_2]}$ обозначается $T^k_{k_1k_2}$ и называется и называется *тензором кручения в касательном пространстве* X. Калибровочное преобразование (16) тензора кручения не зависит от производной $y^i_{,k}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$T^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_i y^i_{[k_1,k_2]} + t^k_{k_1k_2} ,$$

где введено обозначение

$$t^k_{k_1k_2} = \gamma^k_{[k_1k_2]} = \tilde{l}^k_i y^i_{[k_1k_2]} .$$

Объект кривизны (17) в касательном пространстве X

$$R^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_i\, l^i_{k_1k_2k_3}$$

также несимметричен по нижним индексам. Особое значение имеет объект кривизны, антисимметричный по последним двум индексам

$$R^k_{k_1[k_2k_3]} .$$

Он называется *тензором кривизны или тензором калибровочного поля в касательном пространстве* X.[10] Калибровочное преобразование (18) тензора кривизны не зависит от производной $y^i_{,k}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$R^k_{k_1[k_2k_3]} = \tilde{l}^k_i y^i_{k_1[k_2,k_3]} + r^k_{k_1[k_2k_3]} .$$

Используя соотношение (20), получим выражение тензора кривизны через объекты связности в касательном пространстве

$$R^k_{k_1[k_2k_3]} = \frac{\partial \Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} - \frac{\partial \Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} - \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} . \tag{104}$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора (21) в касательном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned}\tilde{l}^k_i(y^i(x^k+dx^k) - y^i(x^k)) &= dx^k + \Gamma^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} + \\ &+ R^k_{k_1k_2k_3} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} + \\ &+ R^k_{k_1k_2k_3k_4} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} d_4x^{k_4} + \dots\end{aligned}$$

1.3. *Собственное разложение*

Ряд Тейлора (22), соответствующий собственному разложению, приобретает вид

$$\begin{aligned}y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + Dy^i + (l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2})\, D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} \\ &+ (l^i_{k_1k_2k_3}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3})\, D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} D_3y^{i_3} + \\ &+ (l^i_{k_1k_2k_3k_4}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}\,\tilde{l}^{k_4}_{i_4})\, D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} D_3y^{i_3} D_4y^{i_4} + \dots\end{aligned}$$

[10] Иногда для простоты скобки, указывающие на антисимметризацию, опускаются и тензор кривизны обозначается так же как объект кривизны.

Объект связности (23) в собственном пространстве Y

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = l^i_{k_1k_2}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} .$$

несимметричен по нижним индексам и может быть представлен в виде суммы

$$\Gamma^i_{i_1i_2} = \Gamma^i_{[i_1i_2]} + \Gamma^i_{\langle i_1i_2\rangle} .$$

Слагаемое $\Gamma^i_{[i_1i_2]}$ обозначается $T^i_{i_1i_2}$ и называется *тензором кручения в собственном пространстве* Y. Калибровочное преобразование (24) тензора кручения не зависит от производной $y^i_{,k}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$T^i_{i_1i_2} = y^i_{[k_1,k_2]}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} + t^i_{i_1i_2} ,$$

где введено обозначение

$$t^i_{i_1i_2} = y^i_{[k_1k_2]}\,\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2} .$$

Объект кривизны (25) в собственном пространстве Y

$$R^i_{i_1i_2i_3} = l^i_{k_1k_2k_3}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3}$$

также несимметричен по нижним индексам. Особое значение имеет объект кривизны, антисимметричный по последним двум индексам

$$R^i_{i_1[i_2i_3]} .$$

Он называется *тензором кривизны или тензором калибровочного поля в собственном пространстве* Y. Калибровочное преобразование (26) тензора кривизны не зависит от производной $y^i_{,k}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$R^i_{i_1[i_2i_3]} = y^i_{k_1[k_2,k_3]}\tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,\tilde{l}^{k_2}_{i_2}\,\tilde{l}^{k_3}_{i_3} + r^i_{i_1[i_2i_3]} ,$$

Используя соотношение (29), получим выражение тензора кривизны через объекты связности в собственном пространстве

$$\begin{aligned}R^i_{i_1[i_2i_3]} &= \frac{D\Gamma^i_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}} - \frac{D\Gamma^i_{i_1i_3}}{Dy^{i_2}} + \Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3} - \Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2} + \\ &+ \Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_2i_3} - \Gamma^i_{i_1i_4}\Gamma^{i_4}_{i_3i_2} .\end{aligned} \tag{105}$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в собственном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned}y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + Dy^i + \Gamma^i_{i_1i_2} D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} + \\ &+ R^i_{i_1i_2i_3} D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} D_3y^{i_3} + \\ &+ R^i_{i_1i_2i_3i_4} D_1y^{i_1} D_2y^{i_2} D_3y^{i_3} D_4y^{i_4} + \dots\end{aligned}$$

2. Уравнения структуры в искривленном пространстве Y

Для того, чтобы рассматривать дифференцирование по направлению, дифференциальную форму будем снабжать дифференциалом, которым она определяется. Например,

$$\omega^i(d_1) \equiv D_1 y^i\,, \quad \text{также} \quad \omega^i_{i_1}(d_2) = d_2 l^i_{k_1} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,.$$

С учетом указанных обозначений первое уравнение структуры искривленного пространства (32) обобщается и приобретает вид

$$D_2\omega^i(d_1) = \omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) + \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}(d_1)\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (106)$$

Первое *антисимметричное* уравнение структуры получается из этого уравнения путем антисимметризации по индексам дифференцирования:

$$D_2\omega^i(d_1) - D_1\omega^i(d_2) = \omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) - \omega^i_{i_1}(d_1)\omega^{i_1}(d_2) + \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}(d_1)\omega^{i_2}(d_2) - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}(d_2)\omega^{i_2}(d_1)$$

или в другой записи

$$D_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega^i_{i_1}(d_2) \wedge \omega^{i_1}(d_1) + \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_1}(d_1) \wedge \omega^{i_2}(d_2)\,.$$

Для дифференциальных форм

$${}'\omega^i_{i_1} = \omega^i_{i_1} + \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}$$

первое уравнение структуры приобретает вид

$$D_2\omega^i(d_1) = {}'\omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1)\,. \quad (107)$$

После антисимметризации по индексам дифференцирования получим первое антисимметричное уравнение структуры

$$D_2 \wedge \omega^i(d_1) = {}'\omega^i_{i_1}(d_2) \wedge \omega^{i_1}(d_1)\,.$$

Первое уравнение структуры можно записать иначе:

$$D_2 D_1 y^i - \Gamma^i_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} = 0\,.$$

После антисимметризвции имеем

$$D_2 \wedge D_1 y^i = \Gamma^i_{[i_1 i_2]} D_1 y^{i_1} \wedge D_2 y^{i_2}\,.$$

Для направленного дифференцирования второе уравнение структуры (36) приобретает вид

$$D_3 D_2\omega^i(d_1) = (\omega^i_{i_1 i_2}(d_3) + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_3}(d_3))\omega^{i_1}(d_1)\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (108)$$

Это уравнение можно антисимметризовать либо по трем дифференциалам, либо по каждой паре. Второе антисимметричное уравнение получается при антисимметризации дифференциалов D_2 и D_3. После использования в выражении (108) первого уравнения структуры (106) и приравнивания нулю множителя при $\omega^{i_1}(d_1)$ получим второе уравнение структуры, обобщающее выражение (37):

$$\begin{aligned} D_3\omega^i_{i_1}(d_2) &+ \omega^i_{i_3}(d_3)\omega^{i_3}_{i_1}(d_2) + \omega^i_{i_3}(d_3)\gamma^{i_3}_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_2) + \\ &+ D_3\gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_2) + \gamma^i_{i_3 i_2}\omega^{i_3}_{i_1}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) + \\ &+ \gamma^i_{i_3 i_2}\gamma^{i_3}_{i_1 i_4}\omega^{i_4}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) + \\ &+ \gamma^i_{i_1 i_3}\omega^{i_3}_{i_2}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) + \gamma^i_{i_1 i_3}\gamma^{i_3}_{i_4 i_2}\omega^{i_4}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) = \\ &= \omega^i_{i_1 i_2}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_2}(d_2)\omega^{i_3}(d_3)\,. \end{aligned}$$

Для дифференциальных форм

$${}'\omega^i_{i_1 i_2} = \omega^i_{i_1 i_2} + r^i_{i_1 i_2 i_3}\omega^{i_3}$$

второе уравнение структуры приобретает вид:

$$D_3 D_2\omega^i(d_1) = {}'\omega^i_{i_1 i_2}(d_3)\omega^{i_1}(d_1)\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (109)$$

После использования первого уравнения структуры (107) и выделения множителя при $\omega^{i_1}(d_1)$ второе уравнение приобретает следующий вид:

$$D_3\,{}'\omega^i_{i_1}(d_2) + {}'\omega^i_{i_2}(d_2)\,{}'\omega^{i_2}_{i_1}(d_3) = {}'\omega^i_{i_1 i_2}(d_3)\omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (110)$$

Антисимметризация этого уравнения по дифференциалам дает второе антисимметричное уравнение структуры

$$D_3 \wedge {}'\omega^i_{i_1}(d_2) + {}'\omega^i_{i_2}(d_2) \wedge {}'\omega^{i_2}_{i_1}(d_3) = {}'\omega^i_{i_1 i_2}(d_3) \wedge \omega^{i_2}(d_2)\,. \quad (111)$$

Для направленного дифференцирования второе уравнение структуры (41) можно переписать так

$$D_3 D_2 D_1 y^i - R^i_{i_1 i_2 i_3} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} = 0\,.$$

Антисимметризация по дифференциалам D_2 и D_3 приводит к второму уравнению структуры с участием тензора кривизны

$$D_3 \wedge D_2 D_1 y^i - R^i_{i_1[i_2 i_3]} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} \wedge D_3 y^{i_3} = 0\,.$$

2.1. Уравнения структуры Картана

Обратимся к уравнениям структуры (42) и (43). Запишем эти уравнения с учетом направленного дифференцирования. Получим

$$d_2\omega^i(d_1) = \omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) \quad (112)$$

и

$$d_3 d_2\omega^i(d_1) = d_3\omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) + \omega^i_{i_2}(d_2)\omega^{i_2}_{i_1}(d_3)\omega^{i_1}(d_1)\,. \quad (113)$$

Выполним антисимметризацию уравнения (112) по индексам дифференцирования. Получим уравнение, которое известно как первое уравнение структуры Картана

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega^i_{i_1}(d_2) \wedge \omega^{i_1}(d_1)\,. \quad (114)$$

Выполним антисимметризацию уравнения (113) по индексам дифференцирования d_3 и d_2. При этом учтем, что $d_3 \wedge d_2 = 0$ и формы $\omega^{i_1}(d_1)$ являются линейно независимыми. Получим уравнение, которое известно как второе уравнение структуры Картана

$$d_3 \wedge \omega^i_{i_1}(d_2) + \omega^i_{i_2}(d_2) \wedge \omega^{i_2}_{i_1}(d_3) = 0\,. \tag{115}$$

2.2. Уравнения структуры Картана-Лаптева

Обратимся к уравнениям структуры (44) и (45). Запишем эти уравнения с учетом направленного дифференцирования. Получим

$$d_2\omega^i(d_1) ='\omega^i_{i_1}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_2)\omega^{i_1}(d_1) \tag{116}$$

и

$$\begin{aligned} d_3 d_2\omega^i(d_1) = \big(&d_3'\omega^i_{i_1}(d_2) +'\omega^i_{i_3}(d_2)'\omega^{i_3}_{i_1}(d_3) - \\ &-'\omega^i_{i_3}(d_2)\gamma^{i_3}_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_3) - d_3\gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_2) - \\ &-\gamma^i_{i_3 i_2}{}'\omega^{i_3}_{i_1}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) + \gamma^i_{i_4 i_2}\gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_2}(d_2)\omega^{i_3}(d_3) - \\ &-\gamma^i_{i_1 i_3}{}'\omega^{i_3}_{i_2}(d_3)\omega^{i_2}(d_2) + \\ &+\gamma^i_{i_1 i_4}\gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\omega^{i_2}(d_2)\omega^{i_3}(d_3)\big)\,\omega^{i_1}(d_1)\,. \end{aligned} \tag{117}$$

Выполним антисимметризацию уравнения (116) по индексам дифференцирования. Получим уравнение, которое известно как первое уравнение структуры, полученное Лаптевым из уравнения структуры Картана,

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) ='\omega^i_{i_1}(d_2) \wedge \omega^{i_1}(d_1) - \gamma^i_{i_1 i_2}\omega^{i_2}(d_2) \wedge \omega^{i_1}(d_1)\,. \tag{118}$$

Выполним антисимметризацию уравнения (117) по индексам дифференцирования d_3 и d_2. При этом учтем, что $d_3 \wedge d_2 = 0$ и формы $\omega^{i_1}(d_1)$ являются линейно независимыми. Получим уравнение, которое известно как второе уравнение структуры Картана-Лаптева

$$\begin{aligned} &d_3 \wedge'\omega^i_{i_1}(d_2) +'\omega^i_{i_3}(d_2) \wedge'\omega^{i_3}_{i_1}(d_3) - \\ &-\gamma^{i_3}_{i_1 i_2}{}'\omega^i_{i_3}(d_2) \wedge \omega^{i_2}(d_3) - d_3\gamma^i_{i_1 i_2} \wedge \omega^{i_2}(d_2) - \\ &-\gamma^i_{i_3 i_2}{}'\omega^{i_3}_{i_1}(d_3) \wedge \omega^{i_2}(d_2) + \gamma^i_{i_4 i_2}\gamma^{i_4}_{i_1 i_3}\omega^{i_2}(d_2) \wedge \omega^{i_3}(d_3) - \\ &-\gamma^i_{i_1 i_3}{}'\omega^{i_3}_{i_2}(d_3) \wedge \omega^{i_2}(d_2) + \\ &+\gamma^i_{i_1 i_4}\gamma^{i_4}_{i_2 i_3}\omega^{i_2}(d_2) \wedge \omega^{i_3}(d_3) = 0\,. \end{aligned} \tag{119}$$

3. Обратная функциональная зависимость $x^k(y^i)$

Обратимся к разложению (46). Теперь дифференциалы Dy, входящие в каждое из слагаемых, имеют свое направление. Поэтому ряд Тейлора записывается следующим образом

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) &+ \left(x^k_{,i} + x^k_i\right) Dy^i + \\ &+ \left(x^k_{,i_1,i_2} + x^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2}\right) D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + \\ &+ \left(x^k_{,i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2,i_3} + \right. \\ &\left. + x^k_{i_1 i_2 i_3}\right) D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \dots \end{aligned}$$

Здесь производные

$$x^k_{,i} = \frac{Dx^k}{Dy^i}\,, \quad x^k_{,i_1,i_2} = \frac{D_2 D_1 x^k}{D_2 y^{i_2} D_1 y^{i_1}}\,,$$

$$x^k_{,i_1,i_2,i_3} = \frac{D_3 D_2 D_1 x^k}{D_3 y^{i_3} D_2 y^{i_2} D_1 y^{i_1}}\,, \quad \dots$$

С учетом введенных нами коэффициентов

$$\begin{aligned} \tilde{l}^k_i &= x^k_{,i} + x^k_i\,, \\ \tilde{l}^k_{i_1 i_2} &= x^k_{,i_1,i_2} + x^k_{i_1,i_2} + x^k_{i_1 i_2}\,, \\ \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} &= x^k_{,i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1,i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2,i_3} + x^k_{i_1 i_2 i_3}\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

ряд Тейлора запишется в виде

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) &+ \tilde{l}^k_i Dy^i + \tilde{l}^k_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + \\ &+ \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \\ &+ \tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3 i_4} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} D_4 y^{i_4} + \dots \end{aligned}$$

С использованием дифференциала d имеем

$$x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) + dx^k + d_2 d_1 x^k + d_3 d_2 d_1 x^k + \dots \tag{120}$$

Используя оператор частного дифференцирования

$$Y_i \equiv \frac{\partial}{Dy^i}\,,$$

получим

$$\tilde{l}^k_i = \frac{\partial x^k}{Dy^i} = Y_i(x^k)\,, \quad \tilde{l}^k_{i_1 i_2} = \frac{\partial_2 \partial_1 x^k}{D_2 y^{i_1} D_1 y^{i_2}} = Y_{i_2} Y_{i_1}(x^k)\,,$$

$$\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} = \frac{\partial_3 \partial_2 \partial_1 x^k}{D_3 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_1 y^{i_3}} = Y_{i_3} Y_{i_2} Y_{i_1}(x^k)\,, \quad \dots$$

а ряд Тейлора запишем так:

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) &+ \frac{\partial x^k}{Dy^i}\,Dy^i + \\ &+ \frac{\partial_2 \partial_1 x^k}{D_2 y^{i_1} D_1 y^{i_2}}\,D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + \\ &+ \frac{\partial_3 \partial_2 \partial_1 x^k}{D_3 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_1 y^{i_3}}\,D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \dots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) &+ Y_i(x^k) Dy^i + \\ &+ Y_{i_2} Y_{i_1}(x^k) D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + \\ &+ Y_{i_3} Y_{i_2} Y_{i_1}(x^k) D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \dots \end{aligned}$$

Ряд Тейлора (53) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} x^k(y^i + Dy^i) = x^k(y^i) &+ dx^k + d_2\tilde{l}^k_{i_1} D_1 y^{i_1} + \\ &+ d_3\tilde{l}^k_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + d_4\tilde{l}^k_{i_1 i_2 i_3} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} D_3 y^{i_3} + \dots \end{aligned}$$

3.1. Касательное разложение

Ряд Тейлора (54), соответствующий касательному разложению, приобретает вид

$$l^i_k(x^k(y^i+Dy^i)-x^k(y^i)) = Dy^i + l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2} + \\ + l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3} + \\ + l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3i_4}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}D_4y^{i_4} + \dots$$

Объект связности (55) в касательном пространстве Y

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2} = l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2}$$

несимметричен по нижним индексам и может быть представлен в виде суммы

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2} = \tilde{\Gamma}^i_{[i_1i_2]} + \tilde{\Gamma}^i_{\langle i_1i_2\rangle}\,.$$

Слагаемое $\tilde{\Gamma}^i_{[i_1i_2]}$ обозначается $\tilde{T}^i_{i_1i_2}$ и называется *тензором кручения в касательном пространстве* Y. Калибровочное преобразование (56) тензора кручения не зависит от производной $x^k{}_{,i}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$\tilde{T}^i_{i_1i_2} = l^i_k\tilde{x}^k_{[i_1,i_2]} + \tilde{t}^i_{i_1i_2}\,,$$

где введено обозначение

$$\tilde{t}^i_{i_1i_2} = \tilde{\gamma}^i_{[i_1i_2]} = l^i_k x^k_{[i_1i_2]}\,.$$

В Разделе IV.5 было показано, что

$$\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2} = -\Gamma^i_{i_1i_2}\,.$$

Объект кривизны (57) в касательном пространстве Y

$$\tilde{R}^i_{i_1i_2i_3} = l^i_k\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}$$

также несимметричен по нижним индексам. Особое значение имеет объект кривизны, антисимметричный по последним двум индексам

$$\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]}\,.$$

Он называется *тензором кривизны или тензором калибровочного поля в касательном пространстве* Y.

Калибровочное преобразование (58) тензора кривизны не зависит от производной $x^k_{,i}$, то есть не зависит от преобразований системы координат и приобретает вид

$$\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]} = l^i_k\tilde{x}^k_{i_1[i_2,i_3]} + \tilde{r}^i_{i_1[i_2i_3]} = l^i_k\frac{D\tilde{l}^k_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}} + \tilde{r}^i_{i_1i_2i_3}\,,$$

где введено обозначение

$$\tilde{r}^i_{i_1i_2i_3} = l^i_k x^k_{i_1i_2i_3}\,.$$

Используя соотношения (60), получим выражение тензора кривизны через объекты связности

$$\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]} = \frac{D\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}} - \frac{D\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_3}}{Dy^{i_2}} + \tilde{\Gamma}^i_{i_4i_3}\tilde{\Gamma}^{i_4}_{i_1i_2} - \tilde{\Gamma}^i_{i_4i_2}\tilde{\Gamma}^{i_4}_{i_1i_3}\,. \tag{121}$$

Из выражения (92) следует, что тензор кривизны $\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]}$ выражается через коэффициенты связности $\Gamma^i_{i_1i_2}$ следующим образом:

$$\tilde{R}^i_{i_1[i_2i_3]} = \frac{D\Gamma^i_{i_1i_3}}{Dy^{i_2}} - \frac{D\Gamma^i_{i_1i_2}}{Dy^{i_3}} + \Gamma^i_{i_4i_3}\Gamma^{i_4}_{i_1i_2} - \Gamma^i_{i_4i_2}\Gamma^{i_4}_{i_1i_3}\,. \tag{122}$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в касательном пространстве приобретает вид

$$l^i_k(x^k(y^i+Dy^i)-x^k(y^i)) = Dy^i + \tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}Dy^{i_1}_1D_2y^{i_2} + \\ + \tilde{R}^i_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3} + \\ + \tilde{R}^i_{i_1i_2i_3i_4}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}D_4y^{i_4} + \dots$$

3.2. Собственное разложение

Ряд Тейлора (62), соответствующий собственному разложению, приобретает вид

$$x^k(y^i+Dy^i) = x^k(y^i) + dx^k + (\tilde{l}^k_{i_1i_2}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2})\,d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} + \\ + (\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2}\,l^{i_3}_{k_3})\,d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3} + \\ + (\tilde{l}^k_{i_1i_2i_3i_4}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2}\,l^{i_3}_{k_3}\,l^{i_4}_{k_4})\,d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}d_4x^{k_4} + \dots$$

Объект связности (63) в собственном пространстве X

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = \tilde{l}^k_{i_1i_2}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2}\,.$$

несимметричен по нижним индексам и может быть представлен в виде суммы

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = \tilde{\Gamma}^k_{[k_1k_2]} + \tilde{\Gamma}^k_{\langle k_1k_2\rangle}\,.$$

Слагаемое $\tilde{\Gamma}^k_{[k_1k_2]}$ обозначается $\tilde{T}^k_{k_1k_2}$ и называется *тензором кручения в собственном пространстве* X. Калибровочное преобразование (64) тензора кручения не зависит от производной $x^k_{,i}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$\tilde{T}^k_{k_1k_2} = \tilde{x}^k_{[i_1,i_2]}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2} + \tilde{t}^k_{k_1k_2} = \frac{D\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2}\,,$$

где введено обозначение

$$\tilde{t}^k_{k_1k_2} = x^k_{[i_1i_2]}\,l^{i_1}_{k_1}\,l^{i_2}_{k_2}\,.$$

В Разделе IV.5 было показано, что

$$\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = -\Gamma^k_{k_1k_2}\,.$$

Объект кривизны (65) в собственном пространстве X

$$\tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} = \tilde{l}^k_{i_1i_2i_3}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3}$$

также несимметричен по нижним индексам. Особое значение имеет объект кривизны, антисимметричный по последним двум индексам

$$\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} .$$

Он называется *тензором кривизны или тензором калибровочного поля в собственном пространстве* X.

Калибровочное преобразование (66) тензора кривизны не зависит от производной $x^k_{,i}$, то есть не зависит от преобразования системы координат и приобретает вид

$$\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} = \tilde{x}^k_{i_1[i_2,i_3]}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} + \tilde{r}^k_{k_1[k_2k_3]} ,$$

где введено обозначение

$$\tilde{r}^k_{k_1[k_2k_3]} = x^k_{i_1[i_2i_3]}\, l^{i_1}_{k_1}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_3}_{k_3} .$$

Используя соотношение (68), получим выражение тензора кривизны через объекты связности

$$\begin{aligned}\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} = {}& \frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} + \\ & + \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_2}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_3} - \tilde{\Gamma}^k_{k_4k_3}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_1k_2} + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_2k_3} - \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_4}\tilde{\Gamma}^{k_4}_{k_3k_2} .\end{aligned} \tag{123}$$

Из соотношения (85) следует, что тензор кривизны $\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]}$ выражается через коэффициенты связности $\Gamma^k_{k_1k_2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} = {}& \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \\ & + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} - \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3} - \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_3k_2} .\end{aligned} \tag{124}$$

Для коэффициентов связности, симметричных по нижним индексам, отсюда следует классическое выражение для тензора кривизны

$$\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} = \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} - \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} .$$

С использованием коэффициентов связности и объектов кривизны ряд Тейлора в собственном пространстве приобретает вид

$$\begin{aligned}x^k(y^i + Dy^i) = {}& x^k(y^i) + dx^k + \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} + \\ & + \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} + \\ & + \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3k_4} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} d_4x^{k_4} + \dots\end{aligned}$$

3.3. *Уравнения структуры в системе отсчета* X

Для направленного дифференцирования первое уравнение структуры (71) приобретает вид

$$d_2d_1x^k = \tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_1x^{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} . \tag{125}$$

После антисимметризации получим первое уравнение структуры Картана

$$d_2 \wedge d_1x^k = \tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2) \wedge d_1x^{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} \wedge d_2x^{k_2} .$$

Если вместо дифференциальных форм $\tilde{\omega}^k_{k_1}$ использовать дифференциальные формы

$${}'\tilde{\omega}^k_{k_1} = \tilde{\omega}^k_{k_1} + \tilde{\gamma}^k_{k_1k_2} dx^{k_2} ,$$

получим первое уравнение структуры в следующем виде:

$$d_2d_1x^k = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_1x^{k_1} . \tag{126}$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде

$$d_2d_1x^k - \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} = 0 . \tag{127}$$

После антисимметризации дифференциалов имеем

$$d_2 \wedge d_1x^k - \tilde{\Gamma}^k_{[k_1k_2]} d_1x^{k_1} \wedge d_2x^{k_2} = 0 . \tag{128}$$

Для направленного дифференцирования второе уравнение структуры (74) приобретает вид

$$d_3d_2d_1x = (\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}(D_3) + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} d_3x^{k_3}) d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} . \tag{129}$$

Если вместо дифференциальных форм $\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}$ использовать дифференциальные формы

$${}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2} = \tilde{\omega}^k_{k_1k_2} + \tilde{r}^k_{k_1k_2k_3} dx^{k_3} .$$

получим второе уравнение структуры в следующем виде:

$$d_3d_2d_1x^k = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}(D_3) d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} . \tag{130}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя первое уравнение структуры (126),

$$\begin{aligned} d_3d_2d_1x^k &= d_3\,{}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_1x^{k_1} + {}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_3d_1x^{k_1} = \\ &= d_3\,{}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2)d_1x^{k_1} + {}'\tilde{\omega}^k_{k_4}(D_2)\,{}'\tilde{\omega}^{k_4}_{k_1}(D_3)d_1x^{k_1} .\end{aligned}$$

Используя это соотношение, запишем второе уравнение структуры в следующем виде:

$$d_3\,{}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2) + {}'\tilde{\omega}^k_{k_2}(D_2)\,{}'\tilde{\omega}^{k_2}_{k_1}(D_3) = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}(D_3) d_2x^{k_2} . \tag{131}$$

Антисимметризация этого уравнения по дифференциалам дает второе уравнение структуры Картана

$$d_3 \wedge {}'\tilde{\omega}^k_{k_1}(D_2) + {}'\tilde{\omega}^k_{k_2}(D_2) \wedge {}'\tilde{\omega}^{k_2}_{k_1}(D_3) = {}'\tilde{\omega}^k_{k_1k_2}(D_3) \wedge d_2x^{k_2} .$$

Второе уравнение структуры (130) можно переписать в следующем виде:

$$d_3d_2d_1x^k - \tilde{R}^k_{k_1k_2k_3} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} d_3x^{k_3} = 0 . \tag{132}$$

Антисимметризация этого уравнения по дифференциалам d_2 и d_3 приводит к второму уравнению структуры с участием тензора кривизны

$$d_3 \wedge d_2d_1x^k - \tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} d_1x^{k_1} d_2x^{k_2} \wedge d_3x^{k_3} = 0 . \tag{133}$$

4. Абсолютное дифференцирование

Для направленного дифференцирования абсолютные дифференциалы (96), (97), (98) записываются следующим образом:

$$\mathcal{D}x^k = dx^k\,, \tag{134}$$

$$\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1x^k = d_2d_1x^k + \Gamma^k_{k_1k_2}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}\,, \tag{135}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1x^k &= d_3d_2d_1x^k + \Gamma^k_{k_4k_3}d_2d_1x^{k_4}d_3x^{k_3} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}d_3d_1x^{k_4}d_2x^{k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}d_1x^{k_1}d_3d_2x^{k_4} + \\ &+ R^k_{k_1k_2k_3}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}\,.\end{aligned} \tag{136}$$

Запишем уравнение (135) с учетом равенства (134) в виде

$$\mathcal{D}_2(d_1x^k) = d_2(d_1x^k) + \Gamma^k_{k_1k_2}(d_1x^{k_1})d_2x^{k_2}$$

и предположим, что существует такой вектор A^k, который преобразуется подобно вектору d_1x^k. Тогда для этого вектора выполняется соотношение, подобное вышеуказанному:

$$\mathcal{D}A^k = dA^k + \Gamma^k_{k_1k_2}A^{k_1}dx^{k_2}\,.$$

Если теперь положить, что координаты x^k являются независимыми, то можно записать

$$\frac{\mathcal{D}A^k}{\partial x^{k_2}} = \frac{\partial A^k}{\partial x^{k_2}} + \Gamma^k_{k_1k_2}A^{k_1}\,.$$

Полученное выражение представляет собой *абсолютную* производную вектора A^k, обозначаемую $A^k_{;k_2}$.

Запишем теперь уравнение (136) с учетом равенства (134) в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2(d_1x^k) &= d_3d_2(d_1x^k) + \Gamma^k_{k_4k_3}d_2(d_1x^{k_4})d_3x^{k_3} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}d_3(d_1x^{k_4})d_2x^{k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}(d_1x^{k_1})d_3d_2x^{k_4} + \\ &+ R^k_{k_1k_2k_3}(d_1x^{k_1})d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}\,.\end{aligned}$$

Для вектора A^k, подобного вектору d_1x^k, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2A^k &= d_3d_2A^k + \Gamma^k_{k_4k_3}d_2A^{k_4}d_3x^{k_3} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}d_3A^{k_4}d_2x^{k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}A^{k_1}d_3d_2x^{k_4} + \\ &+ R^k_{k_1k_2k_3}A^{k_1}d_2x^{k_2}d_3x^{k_3}\,.\end{aligned} \tag{137}$$

Рассмотрим частный случай этого соотношения, когда $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$, а координаты x^k являются независимыми; тогда

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{D}^2A^k}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}} = \frac{\partial^2A^k}{\partial x^{k_3}\partial x^{k_2}} &+ \Gamma^k_{k_4k_3}\frac{\partial A^{k_4}}{\partial x^{k_2}} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}\frac{\partial A^{k_4}}{\partial x^{k_3}} + R^k_{k_1\langle k_2k_3\rangle}A^{k_1}\,.\end{aligned}$$

Рассмотрим другой частный случай, когда в соотношении (137) выполнена антисимметризация по дифференциалам $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_2$, а координаты x^k являются независимыми; тогда

$$\mathcal{D}_3\wedge\mathcal{D}_2A^k = R^k_{k_1[k_2k_3]}A^{k_1}d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3}\,.$$

Здесь тензор кривизны $R^k_{k_1[k_2k_3]}$ определяется соотношением (104)

$$R^k_{k_1[k_2k_3]} = \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} - \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} + \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} - \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3}\,.$$

Это соотношение имеет тот смысл, что при обходе вектора, преобразующегося по правилам искривленного пространства, вдоль замкнутого контура в системе отсчета этот вектор меняет свое значение. Для сравнения рассмотрим аналогичное соотношение для случая, когда независимыми являются координаты y^i. Тогда из выражения (133) для вектора A^k, подобного вектору d_1x^k, имеем

$$d_3\wedge d_2A^k = \tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]}A^{k_1}d_2x^{k_2}\wedge d_3x^{k_3}\,.$$

Здесь тензор кривизны $\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]}$ определяется соотношением (124)

$$\begin{aligned}\tilde{R}^k_{k_1[k_2k_3]} &= \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial\Gamma^k_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \\ &+ \Gamma^k_{k_4k_2}\Gamma^{k_4}_{k_1k_3} - \Gamma^k_{k_4k_3}\Gamma^{k_4}_{k_1k_2} + \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_2k_3} - \Gamma^k_{k_1k_4}\Gamma^{k_4}_{k_3k_2}\,.\end{aligned}$$

VII. ТОЖДЕСТВА НА КОЭФФИЦИЕНТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ

Выкладки этого раздела мы выполним для собственного прямого разложения[11]

$$y^i(x^k+dx^k) = y^i(x^k) + Dy^i + D_2D_1y^i + D_3D_2D_1y^i + \ldots$$

с использованием коэффициентов связности и объектов кривизны

$$\begin{aligned}y^i(x^k+dx^k) &= y^i(x^k) + Dy^i + \Gamma^i_{i_1i_2}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2} + \\ &+ R^i_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3} + \\ &+ R^i_{i_1i_2i_3i_4}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}D_4y^{i_4} + \ldots\end{aligned} \tag{138}$$

В дальнейшем мы будем использовать вытекающие из этих разложений соотношения

$$D_3D_2D_1y^i = R^i_{i_1i_2i_3}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}\,, \tag{139}$$

$$D_4D_3D_2D_1y^i = R^i_{i_1i_2i_3i_4}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_3y^{i_3}D_4y^{i_4}\,, \tag{140}$$

$$\ldots$$

$$\begin{aligned}D_nD_{n-1}\ldots D_2D_1y^i &= \\ &= R^i_{i_1i_2\ldots i_{n-1}i_n}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2}D_{n-1}y^{i_{n-1}}D_ny^{i_n}\end{aligned} \tag{141}$$

Рассмотрим перестановочные соотношения между дифференциалами и соответствующие им перестановочные соотношения между компонентами объектов

---

[11] Аналогичные выкладки можно проделать и для касательного прямого разложения, и для обратного разложения, как собственного, так и касательного.

кривизны. Если при *симметризации* рассматриваются перестановки двух соседних дифференциалов между собой и соответственно двух соседних индексов объекта кривизны между собой, то перестановочные соотношения относятся к перестановке групп дифференциалов и соответственно к перестановке групп индексов между собой. Например[12],

$$\langle D_3, D_2 D_1\rangle = D_3 D_2 D_1 + D_2 D_1 D_3$$

и соответственно

$$R^i{}_{\langle i_1 i_2, i_3\rangle} = R^i{}_{i_1 i_2 i_3} + R^i{}_{i_3 i_1 i_2}\,.$$

В дальнейшем мы будем опускать обозначение объекта кривизны и верхний индекс, а оперировать только с нижними индексами. В таком обозначении предыдущее выражение приобретает вид

$$\langle i_1 i_2, i_3\rangle = i_1 i_2 i_3 + i_3 i_1 i_2\,.$$

В этом Разделе рассмотрим такие комбинации перестановочных соотношений, которые составляют тождества. Начнем с перестановочного соотношения

$$\begin{aligned}[][D_3 D_2]D_1] &= [D_3 D_2]D_1 - D_1[D_3 D_2] = \\ &= D_3 D_2 D_1 - D_2 D_3 D_1 - D_1 D_3 D_2 + D_1 D_2 D_3\,.\end{aligned}$$

Наряду с ним введем перестановочные соотношения, полученные из него циклической перестановкой индексов:

$$\begin{aligned}[][D_1 D_3]D_2] &= [D_1 D_3]D_2 - D_2[D_1 D_3] = \\ &= D_1 D_3 D_2 - D_3 D_1 D_2 - D_2 D_1 D_3 + D_2 D_3 D_1\,,\\ [[D_2 D_1]D_3] &= [D_2 D_1]D_3 - D_3[D_2 D_1] = \\ &= D_2 D_1 D_3 - D_1 D_2 D_3 - D_3 D_2 D_1 + D_3 D_1 D_2\,.\end{aligned}$$

Сравнивая эти перестановочные соотношения, замечаем, что имеет место тождество

$$[[D_3 D_2]D_1] + [[D_1 D_3]D_2] + [[D_2 D_1]D_3] \equiv 0\,. \qquad (142)$$

Это так называемое тождество Якоби.

Будем обозначать сумму перестановочных соотношений, полученных из исходного циклической перестановкой индексов, стрелкой над исходным соотношением. Например,

$$[[D_3 D_2]D_1] + [[D_1 D_3]D_2] + [[D_2 D_1]D_3] = \overrightarrow{[[D_3 D_2]D_1]}\,.$$

Стрелка указывает направление циклической перестановки индексов. В этом обозначении тождество Якоби приобретает вид

$$\overrightarrow{[[D_3 D_2]D_1]} \equiv 0\,. \qquad (143)$$

Этому соотношению соответствует тождество Якоби для объектов кривизны

$$\overleftarrow{[i_1, [i_2 i_3]]} \equiv 0\,. \qquad (144)$$

Применяя вышеприведенные тождества к уравнению (139), получим в развернутом виде

$$\begin{aligned} R^i{}_{i_1[i_2 i_3]} &+ R^i{}_{i_2[i_3 i_1]} + R^i{}_{i_3[i_1 i_2]} - \\ &- R^i{}_{[i_2 i_3]i_1} - R^i{}_{[i_3 i_1]i_2} - R^i{}_{[i_1 i_2]i_3} \equiv 0\,.\end{aligned}$$

Если в некотором частном случае объект кривизны обладает свойством

$$R^i{}_{[i_1 i_2]i_3} = 0\,,$$

то это тождество приобретает вид

$$R^i{}_{i_1[i_2 i_3]} + R^i{}_{i_2[i_3 i_1]} + R^i{}_{i_3[i_1 i_2]} \equiv 0\,.$$

Полученное тождество представляет собой первое тождество Бианки для тензора кривизны.

Тождества (143) и (144) могут быть применены к любому слагаемому разложения (138), начиная с четвертого. Так, применяя к уравнению (140) тождества (143) и (144), записанные в виде

$$\overrightarrow{[[D_4 D_3]D_2]} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \overleftarrow{[i_2, [i_3 i_4]]} \equiv 0\,,$$

получим тождество

$$\begin{aligned} R^i{}_{i_1 i_2[i_3 i_4]} &+ R^i{}_{i_1 i_3[i_4 i_2]} + R^i{}_{i_1 i_4[i_2 i_3]} - \\ &- R^i{}_{i_1[i_3 i_4]i_2} - R^i{}_{i_1[i_4 i_2]i_3} - R^i{}_{i_1[i_2 i_3]i_4} \equiv 0\,.\end{aligned}$$

Если в некотором частном случае второй объект кривизны обладает свойством

$$R^i{}_{i_1 i_2[i_3 i_4]} = 0\,,$$

то это тождество приобретает вид

$$R^i{}_{i_1[i_3 i_4]i_2} + R^i{}_{i_1[i_4 i_2]i_3} + R^i{}_{i_1[i_2 i_3]i_4} \equiv 0\,.$$

Полученное тождество сводится в частном случае к второму тождеству Бианки для тензора кривизны.

В общем случае на коэффициентах разложения (138) n-го порядка (содержащих n нижних индексов) имеют место тождества вида (143) (и соответственно (144)), число которых равно числу сочетаний из n элементов по три.

Рассмотрим теперь совместно следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned}[][i_1, [i_2 i_3]] &= i_1[i_2 i_3] - [i_2 i_3]i_1 = \\ &= i_1 i_2 i_3 - i_1 i_3 i_2 - i_2 i_3 i_1 + i_3 i_2 i_1\,,\\ \langle\langle i_1 i_2\rangle, i_3\rangle &= \langle i_1 i_2\rangle i_3 + i_3\langle i_1 i_2\rangle = \\ &= i_1 i_2 i_3 + i_2 i_1 i_3 + i_3 i i_2 + i_3 i_2 i_1\,,\\ \langle\langle i_1 i_3\rangle, i_2\rangle &= \langle i_1 i_3\rangle i_2 + i_2\langle i_1 i_3\rangle = \\ &= i_1 i_3 i_2 + i_3 i_1 i_2 + i_2 i_1 i_3 + i_2 i_3 i_1\,.\end{aligned} \qquad (145)$$

---

[12] Как обычно, треугольные скобки означают перестановку без изменения знака, а квадратные скобки означают перестановку с изменением знака.

Сравнивая выражения (145) между собой, получим тождество

$$[i_1,[i_2 i_3]] \equiv \langle\langle i_1 i_2\rangle, i_3\rangle - \langle\langle i_1 i_3\rangle, i_2\rangle\,. \tag{146}$$

Из полученного тождества и соотношения (144) следует тождество

$$\overleftarrow{\langle\langle i_1 i_2\rangle, i_3\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle\langle i_1 i_3\rangle, i_2\rangle}\,. \tag{147}$$

Таким образом, мы получили следующую совокупность тождеств:

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{[i_1,[i_2 i_3]]} &\equiv 0\,,\\
[i_1,[i_2 i_3]] &\equiv \langle\langle i_1 i_2\rangle, i_3\rangle - \langle\langle i_1 i_3\rangle, i_2\rangle\,,\\
\overleftarrow{\langle\langle i_1 i_2\rangle, i_3\rangle} &\equiv \overleftarrow{\langle\langle i_1 i_3\rangle, i_2\rangle}\,.
\end{aligned} \tag{148}$$

Эта совокупность может быть записана иначе:

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{[[i_1 i_2], i_3]} &\equiv 0\,,\\
[[i_1 i_2], i_3] &\equiv \langle i_1,\langle i_2 i_3\rangle\rangle - \langle i_2,\langle i_1 i_3\rangle\rangle\,,\\
\overleftarrow{\langle i_1,\langle i_2 i_3\rangle\rangle} &\equiv \overleftarrow{\langle i_2,\langle i_1 i_3\rangle\rangle}\,.
\end{aligned} \tag{149}$$

Такая запись получается из предыдущей совокупности перестановкой и переобозначением индексов.

Рассмотрим теперь другую совокупность тождеств. Начнем с перестановочного соотношения

$$\begin{aligned}
[i_1,\langle i_2 i_3\rangle] &= i_1\langle i_2 i_3\rangle - \langle i_2 i_3\rangle i_1 =\\
&= i_1 i_2 i_3 + i_1 i_3 i_2 - i_2 i_3 i_1 - i_3 i_2 i_1\,.
\end{aligned}$$

Наряду с ним введем перестановочные соотношения, полученные из него циклической перестановкой индексов

$$\begin{aligned}
[i_2,\langle i_3 i_1\rangle] &= i_2\langle i_3 i_1\rangle - \langle i_3 i_1\rangle i_2 =\\
&= i_2 i_3 i_1 + i_2 i_1 i_3 - i_3 i_1 i_2 - i_1 i_3 i_2\,,\\
[i_3,\langle i_1 i_2\rangle] &= i_3\langle i_1 i_2\rangle - \langle i_1 i_2\rangle i_3 =\\
&= i_3 i_1 i_2 + i_3 i_2 i_1 - i_1 i_2 i_3 - i_2 i_1 i_3\,.
\end{aligned}$$

Сравнивая эти перестановочные соотношения, замечаем, что имеет место тождество

$$\overleftarrow{[i_1,\langle i_2 i_3\rangle]} = 0\,. \tag{150}$$

Рассмотрим теперь совместно следующие три перестановки:

$$\begin{aligned}
[i_1,\langle i_2 i_3\rangle] &= i_1\langle i_2 i_3\rangle - \langle i_2 i_3\rangle i_1 =\\
&= i_1 i_2 i_3 + i_1 i_3 i_2 - i_2 i_3 i_1 - i_3 i_2 i_1\,,\\
\langle [i_1 i_2], i_3\rangle &= [i_1 i_2] i_3 + i_3 [i_1 i_2] =\\
&= i_1 i_2 i_3 - i_2 i_1 i_3 + i_3 i_1 i_2 - i_3 i_2 i_1\,,\\
\langle [i_1 i_3], i_2\rangle &= [i_1 i_3] i_2 + i_2 [i_1 i_3] =\\
&= i_1 i_3 i_2 - i_3 i_1 i_2 + i_2 i_1 i_3 - i_2 i_3 i_1\,.
\end{aligned} \tag{151}$$

Сравнение выражений (151) показывает, что выполняется тождество

$$[i_1,\langle i_2 i_3\rangle] \equiv \langle [i_1 i_2], i_3\rangle + \langle [i_1 i_3], i_2\rangle\,. \tag{152}$$

Из полученного тождества и равенства (150) следует тождество

$$\overleftarrow{\langle [i_1 i_2], i_3\rangle} = -\overleftarrow{\langle [i_1 i_3], i_2\rangle}\,.$$

Таким образом, мы получили другую совокупность тождеств:

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{[i_1,\langle i_2 i_3\rangle]} &\equiv 0\,,\\
[i_1,\langle i_2 i_3\rangle] &\equiv \langle [i_1 i_2], i_3\rangle - \langle [i_3 i_1], i_2\rangle\,,\\
\overleftarrow{\langle [i_1 i_2], i_3\rangle} &\equiv \overleftarrow{\langle [i_3 i_1], i_2\rangle}\,.
\end{aligned} \tag{153}$$

Эта совокупность может быть записана иначе:

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{[\langle i_1 i_2\rangle, i_3]} &\equiv 0\,,\\
[\langle i_1 i_2\rangle, i_3] &\equiv \langle i_1,[i_2 i_3]\rangle + \langle i_2,[i_1 i_3]\rangle\,,\\
\overleftarrow{\langle i_1,[i_2 i_3]\rangle} &\equiv \overleftarrow{\langle i_2,[i_3 i_1]\rangle}\,.
\end{aligned} \tag{154}$$

Эта запись получается из предыдущей совокупности перестановкой и переобозначением индексов.

Из соотношений (148) и (153) следуют тождества

$$\overleftarrow{[i_1, i_2 i_3]} \equiv 0 \qquad \text{и} \qquad \overleftarrow{\langle i_1 i_2, i_3\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_3 i_1, i_2\rangle}\,.$$

Из соотношений (149) и (154) следуют тождества

$$\overleftarrow{[i_1 i_2, i_3]} \equiv 0 \qquad \text{и} \qquad \overleftarrow{\langle i_1, i_2 i_3\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_3, i_1 i_2\rangle}\,.$$

Легко проверить, что также выполняются тождества:

$$\begin{aligned}
&\overleftarrow{[i_1, i_2 i_3 i_4]} \equiv 0\,, \qquad &&\overleftarrow{\langle i_1 i_2 i_3, i_4\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_4 i_1 i_2, i_3\rangle}\,,\\
&\overleftarrow{[i_1 i_2, i_3 i_4]} \equiv 0\,, \qquad &&\overleftarrow{\langle i_1 i_2, i_3 i_4\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_3 i_4, i_1 i_2\rangle}\,,\\
&\overleftarrow{[i_1 i_2 i_3, i_4]} \equiv 0\,, \qquad &&\overleftarrow{\langle i_1, i_2 i_3 i_4\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_2, i_3 i_4 i_1\rangle}\,.
\end{aligned}$$

В общем случае

$$\overleftarrow{[i_1 i_2 \ldots i_k, i_{k+1} \ldots i_p]} \equiv 0 \quad \text{и}$$

$$\overleftarrow{\langle i_1 i_2 \ldots i_k, i_{k+1} \ldots i_p\rangle} \equiv \overleftarrow{\langle i_m i_{m+1} \ldots i_{m+k}, i_{m+k+1} \ldots i_{m+p}\rangle}\,.$$

где k, m и p произвольны.

VIII. ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛЕВОГО И ПРАВОГО УМНОЖЕНИЙ

В Разделе IV Главы 1.2 и Разделе I Главы 1.6, рассматривая умножение векторов и матриц, мы отмечали необходимость различать *левое* и *правое* умножения. Например, пусть даны две матрицы a^i_k и b^l_m. Матрица a^i_k может быть умножена на матрицу b^l_m *слева*

$$b^l_i \cdot a^i_k$$

и *справа*

$$a^i_k \cdot b^k_m \,.$$

В этом Разделе выясним смысловое различие между левым и правым умножениями матрицы l^i_k, входящей в дифференциал *прямого* преобразования (7)

$$Dy^i = l^i_k dx^k \,,$$

и обратной матрицы $\tilde{l}^k_i$, входящей в дифференциал *обратного* преобразования

$$dx^k = \tilde{l}^k_i Dy^i \,.$$

Левое умножение.

Умножение матрицы l^i_k на матрицу $\tilde{l}^{k_1}_{i_1}$ слева по определению дает

$$\tilde{l}^k_i \cdot l^i_{k_1} = \delta^k_{k_1} \,. \tag{155}$$

Здесь единичная матрица (символ Кронекера) $\delta^k_{k_1}$ принадлежит системе отсчета[13], то есть $\delta^k_{k_1} \in \mathbb{R}_x$. Иначе говоря, символ Кронекера $\delta^k_{k_1}$ является постоянной величиной в системе отсчета. Отсюда

$$d\delta^k_{k_1} = 0 \,.$$

Поэтому из соотношения (155) имеем

$$d\tilde{l}^k_i \cdot l^i_{k_1} + \tilde{l}^k_i \cdot dl^i_{k_1} = 0 \,.$$

Отсюда[14]

$$\tilde{l}^k_i \cdot dl^i_{k_1} = -d\tilde{l}^k_i \cdot l^i_{k_1} \,. \tag{156}$$

Правое умножение.

Умножение матрицы l^i_k на матрицу $\tilde{l}^{k_1}_{i_1}$ справа по определению дает

$$l^i_k \cdot \tilde{l}^k_{i_1} = \delta^i_{i_1} \,. \tag{157}$$

Здесь единичная матрица $\delta^i_{i_1}$ принадлежит искривленному пространству[15], то есть $\delta^i_{i_1} \in \mathbb{R}_y$. Иначе говоря, символ Кронекера $\delta^i_{i_1}$ является постоянной величиной в искривленном пространстве. Отсюда

$$D\delta^i_{i_1} = 0 \,.$$

Поэтому из соотношения (157) имеем

$$Dl^i_k \cdot \tilde{l}^k_{i_1} + l^i_k \cdot D\tilde{l}^k_{i_1} = 0 \,.$$

Отсюда[16]

$$Dl^i_k \cdot \tilde{l}^k_{i_1} = -l^i_k \cdot D\tilde{l}^k_{i_1} \,. \tag{158}$$

На основании изложенного можно сделать следующее заключение: левое умножение на матрицу $\tilde{l}^k_i$ соответствует обращению к системе отсчета, а правое умножение на эту матрицу соответствует обращению к искривленному пространству. И напротив, левое умножение на матрицу l^i_k соответствует обращению к искривленному пространству, а правое умножение на эту матрицу соответствует обращению к системе отсчета.

Далее разовьем этот тезис, обратившись к конструированию объектов связности.

1. Прямое преобразование

Имеется в виду преобразование

$$y^i = y^i(x^k) \,.$$

Для него второй дифференциал имеет вид[17]:

$$D_2 D_1 y^i = D_2 l^i_k \cdot d_1 x^k + l^i_k \cdot D_2 d_1 x^k = D_2 l^i_k \cdot d_1 x^k + l^i_k \cdot d_2 d_1 x^k . \tag{159}$$

Здесь

$$D_2 l^i_k = d_2 l^i_k + \delta_2 l^i_k = d_2 l^i_k + y^i_{kk_2} \cdot d_2 x^{k_2} \,. \tag{160}$$

Далее обратимся к коэффициентам связности для двух случаев: коэффициентам связности в искривленном пространстве и коэффициентам связности в системе отсчета.

---

[13] См. Глава 2.1 Раздел IV.

[14] Отметим, что в левой части этого соотношения дифференциал $dl^i_{k_1}$ умножается на матрицу $\tilde{l}^k_i$ слева, а в правой части этого соотношения дифференциал $d\tilde{l}^k_i$ умножается на матрицу $l^i_{k_1}$ справа.

[15] См. Глава 2.1 Раздел IV.

[16] Отметим, что в левой части этого соотношения дифференциал Dl^i_k умножается на матрицу $\tilde{l}^k_{i_1}$ справа, а в правой части этого соотношения дифференциал $D\tilde{l}^k_{i_1}$ умножается на матрицу l^i_k слева.

[17] Если координаты x^k независимы, то

$$d_2 d_1 x^k = 0$$

и

$$D_2 D_1 y^i = D_2 l^i_k \cdot d_1 x^k \,.$$

1.1. Коэффициенты связности в искривленном пространстве

Преобразуем слагаемое $D_2 l^i_k d_1 x^k$, входящее в выражение (159), следующим образом:

$$D_2 l^i_{k_1} d_1 x^{k_1} = \frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}} d_1 x^{k_1} d_2 x^{k_2} =$$
$$= \left(\frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2} \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\right)(l^{i_1}_{k_3} d_1 x^{k_3})(l^{i_2}_{k_4} d_2 x^{k_4}) = \Gamma^i_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2}.$$

Коэффициенты связности в собственном (искривленном) пространстве Y

$$\Gamma^i_{i_1 i_2} = \frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}$$

можно записать иначе, если сначала учесть соотношение (160):

$$\Gamma^i_{i_1 i_2} = \frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1} = \frac{\partial l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1} + y^i_{k_1 k_2}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,,$$

и затем учесть соотношение (158),

$$\Gamma^i_{i_1 i_2} = \frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1} = -l^i_k \frac{\partial \tilde{l}^k_{i_1}}{\partial x^{k_2}}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2} + y^i_{k_1 k_2}\, \tilde{l}^{k_2}_{i_2}\, \tilde{l}^{k_1}_{i_1}\,. \tag{161}$$

Отсюда следует, что коэффициенты связности в искривленном пространстве $\Gamma^i_{i_1 i_2}$ соотносятся с умножением на матрицу l^i_k *слева* и с умножением на обратную матрицу $\tilde{l}^{k_1}_{i_1}$ *справа*.

Используя коэффициенты связности, выражение (159) запишем следующим образом:

$$D_2 D_1 y^i = \Gamma^i_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} + l^i_k \cdot d_2 d_1 x^k\,. \tag{162}$$

1.2. Коэффициенты связности в системе отсчета

Умножим соотношение (159) на обратную матрицу $\tilde{l}^k_i$. Получим

$$\tilde{l}^k_i D_2 D_1 y^i = \tilde{l}^k_i D_2 l^i_{k_1} d_1 x^{k_1} + d_2 d_1 x^k\,. \tag{163}$$

Преобразуем слагаемое $\tilde{l}^k_i D_2 l^i_{k_1} d_1 x^{k_1}$, входящее в это выражение, следующим образом:

$$\tilde{l}^k_i D_2 l^i_{k_1} d_1 x^{k_1} = \tilde{l}^k_i \frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}} d_1 x^{k_1} d_2 x^{k_2} = \Gamma^k_{k_1 k_2} d_1 x^{k_1} d_2 x^{k_2}\,.$$

Коэффициенты

$$\Gamma^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_i \frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}}$$

представляют собой коэффициенты связности в системе отсчета (касательном пространстве) X. Их можно записать иначе, если сначала учесть соотношение (160):

$$\Gamma^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_i \frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}} = \tilde{l}^k_i \frac{\partial l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}} + \tilde{l}^k_i y^i_{k_1 k_2}\,,$$

а затем учесть соотношение (156)

$$\Gamma^k_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k_i \frac{D l^i_{k_1}}{\partial x^{k_2}} = -\frac{\partial \tilde{l}^k_i}{\partial x^{k_2}} l^i_{k_1} + \tilde{l}^k_i y^i_{k_1 k_2}\,. \tag{164}$$

Отсюда следует, что коэффициенты связности в системе отсчета $\Gamma^k_{k_1 k_2}$ соотносятся с умножением на матрицу $l^i_{k_1}$ *справа* и с умножением на обратную матрицу $\tilde{l}^k_i$ *слева*.

Используя коэффициенты связности, выражение (163) запишем следующим образом:

$$\tilde{l}^k_i D_2 D_1 y^i = \Gamma^k_{k_1 k_2} d_1 x^{k_1} d_2 x^{k_2} + d_2 d_1 x^k\,. \tag{165}$$

1.3. Абсолютная производная в системе отсчета

Здесь в своем изложении мы отталкиваемся от соотношения (165). Введем абсолютный дифференциал в системе отсчета, который обозначим ${}_x\mathcal{D}$, и определим его по отношению к дифференциалу dx^k следующим образом:

$${}_x\mathcal{D}_2 d_1 x^k = \tilde{l}^k_i D_2 D_1 y^i\,.$$

Подставляя это выражение в соотношение (165), получим выражение для абсолютного дифференциала в системе отсчета по отношению к вектору dx^k

$${}_x\mathcal{D}_2 d_1 x^k = d_2 d_1 x^k + \Gamma^k_{k_1 k_2} d_1 x^{k_1} d_2 x^{k_2}\,. \tag{166}$$

Если вектор A^k преобразуется подобно вектору dx^k, то абсолютный дифференциал от этого вектора записывается аналогичным образом:

$${}_x\mathcal{D} A^k = dA^k + \Gamma^k_{k_1 k_2} A^{k_1} dx^{k_2}\,.$$

Отсюда следует выражение для абсолютной производной в системе отсчета от вектора A^k

$$\frac{{}_x\mathcal{D} A^k}{\partial x^{k_2}} = \frac{\partial A^k}{\partial x^{k_2}} + \Gamma^k_{k_1 k_2} A^{k_1}\,. \tag{167}$$

1.4. Абсолютная производная в искривленном пространстве

Здесь в своем изложении мы отталкиваемся от соотношения (162). Введем абсолютный дифференциал в искривленном пространстве, который обозначим ${}_y\mathcal{D}$, и определим его по отношению к дифференциалу Dy^i следующим образом

$${}_y\mathcal{D}_2 D_1 y^i = l^i_k \cdot d_2 d_1 x^k\,.$$

Подставляя это выражение в соотношение (162), получим выражение для абсолютного дифференциала в искривленном пространстве по отношению к вектору Dy^i

$${}_y\mathcal{D}_2 D_1 y^i = D_2 D_1 y^i - \Gamma^i_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2}\,. \tag{168}$$

Если вектор B^i преобразуется подобно вектору D_1y^i, то абсолютный дифференциал от этого вектора записывается аналогичным образом

$$ {}_y\mathcal{D}B^i = DB^i - \Gamma^i_{i_1i_2}B^{i_1}Dy^{i_2} . $$

Отсюда следует выражение для абсолютной производной в искривленном пространстве от вектора B^i

$$ \frac{{}_y\mathcal{D}B^i}{Dy^{i_2}} = \frac{DB^i}{Dy^{i_2}} - \Gamma^i_{i_1i_2}B^{i_1} . \tag{169} $$

2. Обратное преобразование

Имеется в виду преобразование

$$ x^k = x^k(y^i) . $$

Для него второй дифференциал имеет вид[18]:

$$ d_2d_1x^k = d_2\tilde{l}^k_i \cdot D_1y^i + \tilde{l}^k_i \cdot d_2D_1y^i = d_2\tilde{l}^k_i \cdot D_1y^i + \tilde{l}^k_i \cdot D_2D_1y^i. \tag{170} $$

Здесь

$$ d_2\tilde{l}^k_i = D_2\tilde{l}^k_i + \delta_2\tilde{l}^k_i = D_2\tilde{l}^k_i + x^k_{ii_2} \cdot D_2y^{i_2} . \tag{171} $$

Далее обратимся к коэффициентам связности для двух случаев: коэффициентам связности в системе отсчета и коэффициентам связности в искривленном пространстве.

2.1. Коэффициенты связности в системе отсчета

Преобразуем слагаемое $d_2\tilde{l}^k_iD_1y^i$, входящее в выражение (170), следующим образом:

$$ d_2\tilde{l}^k_{i_1}D_1y^{i_1} = \frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2} = $$
$$ = \left(\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_2}_{k_2}l^{i_1}_{k_1}\right)(\tilde{l}^{k_1}_{i_3}D_1y^{i_3})(\tilde{l}^{k_2}_{i_4}D_2y^{i_4}) = \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2}. $$

Коэффициенты связности в собственном пространстве X

$$ \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = \frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_1}_{k_1} $$

можно записать иначе, если сначала учесть соотношение (171):

$$ \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = \frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_1}_{k_1} = \frac{D\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_1}_{k_1} + x^i_{k_1k_2}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_1}_{k_1} , $$

и затем учесть соотношение (156),

$$ \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2} = \frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_1}_{k_1} = -\tilde{l}^k_i\frac{Dl^i_{k_1}}{Dy^{i_2}}\, l^{i_2}_{k_2} + x^i_{k_1k_2}\, l^{i_2}_{k_2}\, l^{i_1}_{k_1} , \tag{172} $$

Отсюда следует, что коэффициенты связности в системе отсчета $\tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}$ соотносятся с умножением на матрицу $l^{i_1}_{k_1}$ *справа* и с умножением на обратную матрицу $\tilde{l}^k_i$ *слева.*

Используя коэффициенты связности, выражение (170) запишем следующим образом:

$$ d_2d_1x^k = \tilde{\Gamma}^k_{k_1k_2}d_1x^{k_1}d_2x^{k_2} + \tilde{l}^k_i \cdot D_2D_1y^i . \tag{173} $$

2.2. Коэффициенты связности в искривленном пространстве

Умножим соотношение (170) на матрицу l^i_k. Получим

$$ l^i_kd_2d_1x^k = l^i_kd_2\tilde{l}^k_{i_1}D_1y^{i_1} + D_2D_1y^i . \tag{174} $$

Преобразуем слагаемое $l^i_kd_2\tilde{l}^k_{i_1}D_1y^{i_1}$, входящее в это выражение, следующим образом:

$$ l^i_kd_2\tilde{l}^k_{i_1}D_1y^{i_1} = l^i_k\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2} = \tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2} . $$

Коэффициенты

$$ \tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2} = l^i_k\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}} $$

представляют собой коэффициенты связности в искривленном пространстве Y. Их можно записать иначе, если сначала учесть соотношение (171):

$$ \tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2} = l^i_k\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}} = l^i_k\frac{D\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}} + l^i_kx^k_{i_1i_2} , $$

а затем учесть соотношение (158),

$$ \tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2} = l^i_k\frac{\partial\tilde{l}^k_{i_1}}{Dy^{i_2}} = -\frac{Dl^i_k}{Dy^{i_2}}\tilde{l}^k_{i_1} + l^i_kx^k_{i_1i_2} . \tag{175} $$

Отсюда следует, что коэффициенты связности в искривленном пространстве $\tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}$ соотносятся с умножением на матрицу l^i_k *слева* и с умножением на обратную матрицу $\tilde{l}^k_{i_1}$ *справа.*

Используя коэффициенты связности, выражение (174) запишем следующим образом:

$$ l^i_kd_2d_1x^k = \tilde{\Gamma}^i_{i_1i_2}D_1y^{i_1}D_2y^{i_2} + D_2D_1y^i . \tag{176} $$

---

[18] Если координаты y^i независимы, то

$$ D_2D_1y^i = 0 $$

и

$$ d_2d_1x^k = d_2\tilde{l}^k_i \cdot D_1y^i . $$

2.3. Абсолютная производная в искривленном пространстве

Здесь в своем изложении мы отталкиваемся от соотношения (176). Введем абсолютный дифференциал в системе отсчета, который обозначим ${}_y\mathcal{D}$, и определим его по отношению к дифференциалу Dy^i следующим образом:

$$ {}_y\mathcal{D}_2 D_1 y^i = l^i_k d_2 d_1 x^k \, . $$

Подставляя это выражение в соотношение (176), получим выражение для абсолютного дифференциала в искривленном пространстве по отношению к вектору Dy^i

$$ {}_y\mathcal{D}_2 D_1 y^i = D_2 D_1 y^i + \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2} D_1 y^{i_1} D_2 y^{i_2} \, . \tag{177} $$

Если вектор B^i преобразуется подобно вектору Dy^i, то абсолютный дифференциал от этого вектора записывается аналогичным образом:

$$ {}_y\mathcal{D} B^i = DB^i + \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2} B^{i_1} Dy^{i_2} \, . $$

Отсюда следует выражение для абсолютной производной в искривленном пространстве от вектора B^i

$$ \frac{{}_y\mathcal{D} B^i}{Dy^{i_2}} = \frac{DB^i}{Dy^{i_2}} + \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2} B^{i_1} \, . \tag{178} $$

Если учесть, что[19]

$$ \tilde{\Gamma}^i_{i_1 i_2} = -\Gamma^i_{i_1 i_2} \, , $$

то получим совпадение абсолютных производных в искривленном пространстве (169) и (178).

2.4. Абсолютная производная в системе отсчета

Здесь в своем изложении мы отталкиваемся от соотношения (173). Введем абсолютный дифференциал в системе отсчета, который обозначим ${}_x\mathcal{D}$, и определим его по отношению к дифференциалу dx^k следующим образом

$$ {}_x\mathcal{D}_2 d_1 x^k = \tilde{l}^k_i \cdot D_2 D_1 y^i \, . $$

Подставляя это выражение в соотношение (173), получим выражение для абсолютного дифференциала в системе отсчета по отношению к вектору dx^k

$$ {}_x\mathcal{D}_2 d_1 x^k = d_2 d_1 x^k - \tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} d_1 x^{k_1} d_2 x^{k_2} \, . \tag{179} $$

Если вектор A^k преобразуется подобно вектору $d_1 x^k$, то абсолютный дифференциал от этого вектора записывается аналогичным образом

$$ {}_x\mathcal{D} A^k = dA^k - \tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} A^{k_1} dx^{k_2} \, . $$

Отсюда следует выражение для абсолютной производной в системе отсчета от вектора A^k

$$ \frac{{}_x\mathcal{D} A^k}{\partial x^{k_2}} = \frac{\partial A^k}{\partial x^{k_2}} - \tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} A^{k_1} \, . \tag{180} $$

Если учесть, что[20]

$$ \tilde{\Gamma}^k_{k_1 k_2} = -\Gamma^k_{k_1 k_2} \, , $$

то получим совпадение абсолютных производных в системе отсчета (167) и (180).

IX. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕРМИНОЛОГИИ

В дальнейшем будем придерживаться следующей терминологии.

Назовем

- дифференциал в искривленном пространстве D – *искривленным*;
- дифференциал в системе отсчета d – *обыкновенным*;
- приращение δ – *вариацией.*

Соответственно назовем производные

- $$ \frac{D}{\partial x} \quad \text{– \textit{искривленной},} $$
  или оператором искривленного дифференцирования;
- $$ \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{– \textit{обыкновенной};} $$
- $$ \frac{\delta}{\partial x} \quad \text{– \textit{вариационной}.} $$

Кроме того, производную

$$ \frac{D}{Dy} \quad \text{назовем \textit{собственной}.} $$

Подчеркнем еще раз связь между указанными дифференциалами

$$ D = d + \delta $$

и между производными

$$ \frac{D}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\delta}{\partial x} \, . $$

---

[19] См. равенство (91). Указанное равенство можно получить также, сравнивая выражения (162) и (176).

[20] См. равенство (83). Указанное равенство можно получить также, сравнивая выражения (165) и (173).

X. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Переход от координат системы отсчета к координатам искривленного пространства осуществляется с помощью искривленного дифференцирования.

- Искривленное дифференцирование функции $y(x)$ определяется последовательностью коэффициентов
$$y^i_k\,,\quad y^i_{k_1k_2}\,,\quad y^i_{k_1k_2k_3}\,,\quad y^i_{k_1k_2k_3k_4}\,,\quad \dots\,.$$
В общем случае они несимметричны по нижним индексам.

- Искривленное дифференцирование требует введения дифференциалов двух типов: один из них относится к искривленному пространству (он обозначен D), а второй относится к пространству системы отсчета (он обозначен d).

- Объекты связности и кривизны в собственном пространстве Y
$$\Gamma^i_{i_1i_2}\,,\quad R^i_{i_1i_2i_3}\,,\quad R^i_{i_1i_2i_3i_4}\,,\quad \dots$$
и объекты связности и кривизны в касательном пространстве X
$$\Gamma^k_{k_1k_2}\,,\quad R^k_{k_1k_2k_3}\,,\quad R^k_{k_1k_2k_3k_4}\,,\quad \dots$$
определяются через коэффициенты указанной последовательности.

- Искривленное дифференцирование обратной функции $x(y)$ определяется последовательностью коэффициентов
$$x^k_i\,,\quad x^k_{i_1i_2}\,,\quad x^k_{i_1i_2i_3}\,,\quad x^k_{i_1i_2i_3i_4}\,,\quad \dots\,.$$
В общем случае они также несимметричны по нижним индексам. Эта последовательность связана с предыдущей условием
$$y(x(y)) = y\,.$$

- Объекты связности и кривизны в собственном пространстве X
$$\tilde\Gamma^k_{k_1k_2}\,,\quad \tilde R^k_{k_1k_2k_3}\,,\quad \tilde R^k_{k_1k_2k_3k_4}\,,\quad \dots\,.$$
и объекты связности и кривизны в касательном пространстве Y
$$\tilde\Gamma^i_{i_1i_2}\,,\quad \tilde R^i_{i_1i_2i_3}\,,\quad \tilde R^i_{i_1i_2i_3i_4}\,,\quad \dots\,.$$
определяются через коэффициенты указанной последовательности.

- Уравнения структуры и внешнее дифференциальное исчисление дифференциальных форм Картана-Лаптева есть частный вид искривленного дифференцирования.

- Абсолютный дифференциал n-го порядка связан линейным преобразованием с дифференциалом n-го порядка в искривленном пространстве.

- Объекты кривизны удовлетворяют тождествам, обобщающим тождество Якоби.

Глава 2.3 Четырехмерное искривленное пространство

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В Главе 2.1. показано, что для исследования поведения тел в силовом поле необходимо положить, что на одном и том же множестве точек-событий установлены два векторных пространства: искривленное пространство Y и система отсчета X. Поставим задачу представления искривленного пространства Y в системе отсчета X. Будем считать, что такое представление установлено, если определено *преобразование* $f\colon X \to Y$ или $Y = f(X)$. Иначе говоря, ставится задача поиска функции

$$\mathcal{Y} = f(\mathbf{x})\,,$$

где $\mathcal{Y} \in Y$, а $\mathbf{x} \in X$.

Эта задача решается в два этапа.

На первом этапе устанавливается *соответствие* между искривленным пространством Y и движущимся пространством $X' : Y \sim X'$.

На втором этапе рассматривается преобразование установленного движущегося пространства X' в систему отсчета X – $f\colon X \to X'$ ($X' = f(X)$).

Иначе говоря, на первом этапе устанавливается соответствие между вектором искривленного пространства и вектором движущегося пространства

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{Y}\,,$$

где $\mathcal{Y} \in Y$, а $\mathbf{y} \in X'$.

На втором этапе рассматривается функциональная зависимость вектора установленного движущегося пространства от вектора системы отсчета

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})\,,$$

где $\mathbf{y} \in X'$, а $\mathbf{x} \in X$.

II. СООТВЕТСТВИЕ ВЕКТОРОВ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА И ВЕКТОРОВ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРОСТРАНСТВА

Решая задачу представления искривленного пространства-времени в системе отсчета, на первом этапе необходимо установить соответствие между искривленным пространством и движущимся пространством. Процедура *соответствия* использует то обстоятельство, что оба векторных пространства расположены на одном и том же множестве точек-событий. Введем следующее определение. Назовем вектор $\mathbf{y}$ и вектор $\mathcal{Y}$ *соответствующими*, если их начала и концы совпадают (см. Рис. 1).Обозначать соответствие векторов будем следующим образом:

$$\mathbf{y} \ \sim \ \mathcal{Y}\,.$$

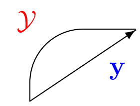


Рис. 1

III. ДВИЖУЩЕЕСЯ ПРОСТРАНСТВО

Преобразование установленного движущегося пространства X' в систему отсчета X – $f\colon X \to X'$ ($X' = f(X)$) исследуется путем разложения функции f в ряд Тейлора.

Для анализа первого дифференциала разложения Df необходимо обратиться к движущемуся пространству, представленному *первым линейным* преобразованием $\mathbf{l}\colon X \to X'$ ($X' = \mathbf{l}(X)$). Множество линейных преобразований $\mathbf{l}$ обозначим L.

Для анализа второго дифференциала разложения $D^2 f$ необходимо обратиться к движущемуся пространству, представленному *вторым линейным* преобразованием $\mathbf{a}\colon X \to L$ ($L = \mathbf{a}(X)$). Множество вторых линейных преобразований обозначим A.

Для анализа третьего дифференциала разложения $D^3 f$ необходимо обратиться к движущемуся пространству, представленному *третьим линейным* преобразованием $\mathbf{b}\colon X \to A$ ($A = \mathbf{b}(X)$). Множество третьих линейных преобразований $\mathbf{b}$ обозначим B.

Векторное пространство X совместно с линейными преобразованиями L образуют алгебру, которая была обозначена

$$T_1 = X + L$$

и названа *первой кинематической алгеброй*[1].

Векторное пространство X совместно с линейными преобразованиями L и A образуют алгебру, которая была обозначена

$$T_2 = X + L + A$$

и названа *второй кинематической алгеброй.*

В общем случае включение линейных преобразований n-го порядка, то есть отображений векторного пространства X на пространство линейных преобразований $(n-1)$-го порядка приводит к кинематической алгебре n-го порядка. Для цели представления искривленных векторов ограничимся третьей кинематической алгеброй, то есть

$$T_3 = X + L + A + B\,,$$

[1] Замечание: термин *первая* здесь имеет тот же смысл , что и *первая* в отношении к производной.

где B – множество линейных преобразований, осуществляющих преобразование пространства X в пространство вторых линейных преобразований A

$$B \circ X \to A\,.$$

1. Первая кинематическая алгебра $T_1 = X + L$

Пространство-время X есть векторное пространство. Базисные векторы в X мы обозначили $\mathbf{e}_i$.

Линейные преобразования L также составляют векторное пространство. Базисные векторы в L обозначим $\mathbf{I}^k{}_i$. Разложение вектора линейного преобразования $\mathbf{l}$ по базисным векторам имеет вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{I}^k{}_i \cdot l^i{}_k\,.$$

Введем векторное пространство $T_1 = X+L$, которое назовем *первым кинематическим*. Для того, чтобы T_1 было алгеброй, необходимо наряду с умножениями

$$X \circ X \to \mathbb{R} \quad \text{и} \quad L \circ L \to L$$

рассматривать умножения

$$X \circ L \to \emptyset \quad \text{и} \quad L \circ X \to X\,.$$

Указанные умножения определяются следующей таблицей умножений базисных векторов:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = g_{ik}\,,\\
&\mathbf{I}^l_k \circ \mathbf{e}_m = \delta^l{}_m \cdot \mathbf{e}_k\,,\\
&\mathbf{e}_k \circ \mathbf{I}^i_m = 0\,,\\
&\mathbf{I}^l_k \circ \mathbf{I}^i_m = \delta^l{}_m \cdot \mathbf{I}^i_k + \delta^i{}_k \cdot \delta^l{}_m\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

В результате множество векторов T_1 становится алгеброй, которую мы назвали *первой кинематической*. Умножение векторов в первой кинематической алгебре запишем следующим образом:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_2 \circ \mathbf{t}_1\,.$$

Здесь $\mathbf{t}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_1$.

Заметим, что алгебра T_1 неассоциативна из-за наличия скалярного произведения. Например, не выполняется условие ассоциативности произведения:

$$\mathbf{I}^m{}_l \circ (\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_k) \neq (\mathbf{I}^m{}_l \circ \mathbf{e}_i) \circ \mathbf{e}_k\,.$$

Действительно, справа имеем $\mathbf{I}^m{}_l \cdot g_{ik}$, а слева $\delta^m{}_i \cdot g_{lk}$. Поэтому при преобразованиях необходимо соблюдать порядок умножения векторов.

Квадрат длины вектора в этой алгебре

$$t^2 = g_{ik} \cdot x^i \cdot x^k + l^i_k \cdot l^k_i$$

Отметим, что алгебра пространства-времени X и алгебра линейных преобразований L являются подалгебрами первой кинематической алгебры T_1.

2. Вторая кинематическая алгебра $T_2 = X + L + A$

Для рассмотрения представления искривленных векторов понадобится обобщение первой кинематической алгебры, включающее в себя векторное пространство A линейных преобразований X в L. Базисные векторы в A обозначим $\mathbf{J}^{lk}{}_i$. Разложение вектора $\mathbf{a} \in A$ по базисным векторам имеет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{J}^{lk}{}_i \cdot l^i{}_{kl}\,.$$

Указанное обобщение мы назвали второй кинематической алгеброй

$$T_2 = X + L + A\,.$$

Для того, чтобы определить эту алгебру, необходимо к ранее определенной таблице умножения базисных векторов первой кинематической алгебры T_1 добавить произведения, в которых участвуют базисные векторы $\mathbf{J}^{ik}{}_l$. Эти произведения вычислим на основании правил тензорной алгебры. При этом исходим из следующей конструкции базисных векторов:

$$\mathbf{I}^l_k = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l\,, \quad \mathbf{J}^{pi}{}_m = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p\,.$$

Получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_k \circ \mathbf{J}^{pi}{}_m = \mathbf{e}_k \circ \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p =\\
&\quad = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p + (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p = 0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J}^{nl}{}_k \circ \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{E}^n \circ \mathbf{e}_m =\\
&\quad = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{E}^n \otimes \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \cdot (\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{e}_m) = \mathbf{I}^l_k \cdot \delta^n_m\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{I}^l_k \circ \mathbf{J}^{pi}{}_m = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \circ \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p =\\
&\quad = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p + \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p \cdot (\mathbf{E}^l \cdot \mathbf{e}_m) =\\
&\quad = \mathbf{J}^{pi}{}_k \cdot \delta^l_m\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J}^{nl}{}_k \circ \mathbf{I}^i_m = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{E}^n \circ \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i =\\
&\quad = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{E}^n \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i + \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{E}^i \cdot (\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{e}_m) =\\
&\quad = \mathbf{J}^{il}{}_k \cdot \delta^n{}_m\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J}^{nl}{}_k \circ \mathbf{J}^{pi}{}_m = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{E}^n \circ \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p =\\
&\qquad = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{E}^n \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^p +\\
&\qquad + \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^n \otimes \mathbf{E}^l \otimes \mathbf{E}^i \cdot (\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{e}_m) = 0\,.
\end{aligned}$$

Здесь из конечных выражений исключены базисные векторы, выходящие за рамки рассматриваемой алгебры.

В результате вторая кинематическая алгебра определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) = g_{ik}\,,\\
&\mathbf{e}_i \circ \mathbf{I}^k{}_l = 0\,,\\
&\mathbf{I}^i{}_m \circ \mathbf{e}_k = \delta^i{}_k \cdot \mathbf{e}_m\,,\\
&\mathbf{I}^l{}_k \circ \mathbf{I}^i{}_m = \delta^l{}_m \cdot I^i{}_k + \delta^i{}_k \cdot \delta^l{}_m\,,\\
&\mathbf{J}^{pi}{}_m \circ \mathbf{e}_k = \delta^p{}_k \cdot \mathbf{I}^i{}_m\,,\\
&\mathbf{e}_m \circ \mathbf{J}^{nl}{}_k = 0\,,\\
&\mathbf{J}^{pi}{}_m \circ \mathbf{I}^l{}_k = \mathbf{J}^{li}{}_m \cdot \delta^p{}_k\,,\\
&\mathbf{I}^i{}_m \circ \mathbf{J}^{nl}{}_k = \mathbf{J}^{nl}{}_m \cdot \delta^i{}_k\,,\\
&\mathbf{J}^{nl}{}_k \circ \mathbf{J}^{pi}{}_m = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Квадрат длины вектора в этой алгебре

$$t^2 = g_{ik} \cdot x^i \cdot x^k + l^i{}_k \cdot l^k{}_i\,.$$

В дальнейшем будем пользоваться введенным в Главе 1.7. вектором, который был обозначен $\mathbf{\Gamma}$ и назован *связность*. Связность определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{a} = \mathbf{l} \circ \mathbf{\Gamma}\,.$$

Воспользуемся координатной записью векторов в этом выражении

$$\mathbf{a} = \mathbf{J}^{k_2 k_1}{}_i \cdot l^i{}_{k_1 k_2}\,, \quad \mathbf{l} = \mathbf{I}^m{}_i \cdot l^i{}_m\,,$$
$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}^{k_2 k_1}{}_k \cdot \Gamma^k{}_{k_1 k_2}\,.$$

Координаты $\Gamma^k{}_{k_1 k_2}$ называются *коэффициентами связности*. Далее воспользуемся законом умножения

$$\mathbf{I}^m{}_i \circ \mathbf{J}^{k_2 k_1}{}_k = \mathbf{J}^{k_2 k_1}{}_i \cdot \delta^m{}_k$$

из таблицы умножения (2) и получим выражение координат линейного преобразования $\mathbf{a}$ через коэффициенты связности

$$l^i{}_{k_1 k_2} = l^i{}_k \cdot \Gamma^k{}_{k_1 k_2}\,.$$

Отсюда для коэффициентов связности имеем

$$\Gamma^k{}_{k_1 k_2} = \tilde{l}^k{}_i \cdot l^i{}_{k_1 k_2}\,.$$

3. Третья кинематическая алгебра $T_3 = X + L + A + B$

Полную таблицу произведений базисных векторов в T_3 здесь приводить не будем. Она составляется аналогично тому, как это было сделано по отношению к второй кинематической алгебре T_2. Приведем только два соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

Базисные векторы в множестве линейных преобразований B обозначим $\mathbf{n}^{nlk}{}_i$. Тогда преобразования

$$B \circ X \to A\,, \quad L \circ B \to B$$

по отношению к базисным векторам запишутся так:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{n}^{mlk}{}_i \circ \mathbf{e}_n = \delta^m{}_n \cdot \mathbf{J}^{lk}{}_i\,,\\
&\mathbf{I}^m{}_i \circ \mathbf{n}^{k_3 k_2 k_1}{}_k = \mathbf{n}^{k_3 k_2 k_1}{}_i \cdot \delta^m{}_k\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Разложение вектора $\mathbf{b} \in B$ по базисным векторам имеет вид

$$\mathbf{b} = \mathbf{n}^{k_3 k_2 k_1}{}_i \cdot l^i{}_{k_1 k_2 k_3}\,.$$

Квадрат длины вектора в этой алгебре

$$t^2 = g_{ik} \cdot x^i \cdot x^k + l^i{}_k \cdot l^k{}_i\,.$$

В дальнейшем будем пользоваться новым вектором, который обозначим $\mathbf{R}$ и назовем *объектом кривизны*. Объект кривизны определим следующим соотношением:

$$\mathbf{b} = \mathbf{l} \circ \mathbf{R}\,.$$

Воспользуемся координатной записью векторов в этом выражении

$$\mathbf{b} = \mathbf{n}^{k_3 k_2 k_1}{}_i \cdot l^i{}_{k_1 k_2 k_3}\,, \quad \mathbf{l} = \mathbf{I}^m{}_i \cdot l^i{}_m\,,$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{n}^{k_3 k_2 k_1}{}_k \cdot R^k{}_{k_1 k_2 k_3}\,.$$

Далее воспользуемся законом умножения

$$\mathbf{I}^m{}_i \circ \mathbf{n}^{k_3 k_2 k_1}{}_k = \mathbf{n}^{k_3 k_2 k_1}{}_i \cdot \delta^m{}_k$$

из таблицы умножения (3). Получим выражение координат линейного преобразования $\mathbf{b}$ через координаты объекта кривизны

$$l^i{}_{k_1 k_2 k_3} = l^i{}_k \cdot R^k{}_{k_1 k_2 k_3}\,.$$

Отсюда для координат объекта кривизны имеем

$$R^k{}_{k_1 k_2 k_3} = \tilde{l}^k{}_i \cdot l^i{}_{k_1 k_2 k_3}\,.$$

IV. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

1. Первый дифференциал

Определим вектор движущегося пространства, соответствующий дифференциалу $D\mathcal{Y}$ в искривленном пространстве.

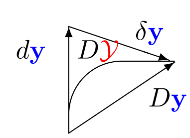


Рис. 2

Из Рис. 2 следует, что этому вектору ставится в соответствие вектор

$$D\mathbf{y} = d\mathbf{y} + \delta\mathbf{y}\,. \tag{4}$$

Итак, мы должны записать

$$D\mathbf{y} \ \sim \ D\mathcal{Y}\,. \tag{5}$$

Вектор $D\mathbf{y}$ – это вектор движущегося пространства, связанного с системой отсчета линейным преобразованием. Поэтому

$$D\mathbf{y} = \mathbf{l} \circ d\mathbf{x}\,. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{l}$ – линейное преобразование на X, $\mathbf{l} \in L$. Воспользуемся координатной записью векторов $d\mathbf{x}$ и $\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot dx^k\,, \quad \mathbf{l} = \mathbf{I}^m{}_i \cdot l^i{}_m$$

и правилами произведения базисных векторов (1); получим координатную запись вектора $D\mathbf{y}$

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i \cdot l^i{}_k \cdot dx^k\,. \tag{7}$$

Дифференциал D назовем *искривленным дифференциалом.* Воспользуемся формулой (7) Главы 2.2.

$$Dy^i = l^i{}_k \cdot dx^k\,,$$

получим

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i \cdot Dy^i\,.$$

Отсюда перейдем к записи вектора $D\mathbf{y}$ через нормальную координату Dy на геодезической. Для этого учтем, что

$$Dy^i = n^i \cdot Dy\,.$$

Получим

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i \cdot n^i \cdot Dy\,.$$

Введем базисный вектор $\mathbf{e}_i \cdot n^i = \mathbf{e}$. Используя его, получим

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e} \cdot Dy\,.$$

Сравним это выражение с

$$D\mathcal{Y} = \mathfrak{e} \cdot Dy$$

и учтем выражение (5). Получим соответствие базисных векторов $\mathbf{e} \sim \mathfrak{e}$, которое позволяет рассматривать $\mathbf{e}$ как базисный вектор системы отсчета *на геодезической.*

1.1. *Квадрат линейного элемента*

Здесь рассмотрим запись квадрата линейного элемента, принадлежащего искривленному пространству, в системе отсчета.

Сначала перейдем в выражении (7) к записи вектора $D\mathbf{y}$ через базисный вектор $\mathbf{e}$ на геодезической и нормальную координату dx на прямой. Для этого учтем, что

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e} \cdot n_i \quad \text{и} \quad dx^k = k^k \cdot dx\,.$$

В результате получим

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e} \cdot (n_i \cdot l^i{}_k \cdot k^k) \cdot dx\,.$$

Далее перейдем к обозначению

$$n_i \cdot l^i{}_k \cdot k^k = l(x)\,.$$

Для него получим

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e} \cdot l(x) \cdot dx\,.$$

Обозначим через $s(x)$ первообразную функции $l(x)$. Тогда дифференциал $D\mathbf{y}$ запишется в виде

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e} \cdot ds(x)\,.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим результатом, получим

$$ds(x) = Dy\,.$$

Таким образом, параметр $s(x)$, относящийся к системе отсчета и ассоциированный с геодезической, эквивалентен нормальной координате на геодезической в искривленном пространстве.

Соответствие векторов $D\mathcal{Y}$ и $D\mathbf{y}$ необходимо дополнить соответствием скалярных произведений

$$(D\mathcal{Y} \cdot D\mathcal{Y}) \quad \text{и} \quad (D\mathbf{y} \cdot D\mathbf{y}).$$

Если учесть, что

$$D\mathcal{Y} \cdot D\mathcal{Y} = (\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e}) \cdot Dy^2 = Dy^2\,,$$

где y – нормальная координата на геодезической, и

$$D\mathbf{y} \cdot D\mathbf{y} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \cdot Dy^2 = Dy^2\,,$$

то необходимо записать

$$D\mathcal{Y} \cdot D\mathcal{Y} = D\mathbf{y} \cdot D\mathbf{y} = Dy^2 = ds^2\,. \tag{8}$$

Используя выражения (7) и (8), получим

$$ds^2 = D\mathbf{y} \cdot D\mathbf{y} = (\mathbf{e}_{i_1} \cdot \mathbf{e}_{i_2}) \cdot l^{i_1}{}_{k_1} \cdot l^{i_2}{}_{k_2} \cdot dx^{k_1} \cdot dx^{k_2}$$

или

$$ds^2 = g_{i_1 i_2} \cdot l^{i_1}{}_{k_1} \cdot l^{i_2}{}_{k_2} \cdot dx^{k_1} \cdot dx^{k_2}\,. \tag{9}$$

Введем *метрический тензор*[2]

$$g_{k_1 k_2} = g_{i_1 i_2} \cdot l^{i_1}{}_{k_1} \cdot l^{i_2}{}_{k_2}\,, \tag{10}$$

тогда

$$ds^2 = g_{k_1 k_2} \cdot dx^{k_1} \cdot dx^{k_2}\,.$$

Таким образом, мы получили квадрат линейного элемента и метрический тензор, используемые в *тетрадной* формулировке теории гравитации.

[2] Для того, чтобы отличать этот тензор от метрического тензора системы отсчета, будем называть его *метрический тензор представления.*

2. Второй дифференциал. Уравнение геодезической

Дифференцируя соотношение (5), получим следующее соответствие между вторыми дифференциалами:

$$D^2\mathbf{y} \ \sim \ D^2\mathcal{Y}\,. \tag{11}$$

Запишем дифференциал $D^2\mathbf{y}$ с учетом выражения (6). Получим

$$D(D\mathbf{y}) = D(\mathbf{l}\circ d\mathbf{x}) = \mathbf{l}\circ D(d\mathbf{x}) + D(\mathbf{l})\circ d\mathbf{x}\,. \tag{12}$$

Это выражение преобразуем, имея в виду, во-первых, что

$$D(d\mathbf{x}) = d(d\mathbf{x}) \tag{13}$$

и, во-вторых, подчиним $D(\mathbf{l})$ – искривленный дифференциал от $\mathbf{l}$ – соотношениям, аналогичным (4) и (6):

$$D\mathbf{l} = d\mathbf{l} + \delta\mathbf{l}\,, \tag{14}$$

далее вектор $D\mathbf{l}$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть

$$D\mathbf{l} = \mathbf{a}\circ d\mathbf{x}$$

или[3]

$$D\mathbf{l} = (\mathbf{l}\circ\boldsymbol{\Gamma})\circ d\mathbf{x}\,. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{a} = \mathbf{l}\circ\boldsymbol{\Gamma}\in A$, а $\boldsymbol{\Gamma}$ – вектор, названный *связностью.*

Полагая

$$\delta\mathbf{l} = (\mathbf{l}\circ\gamma)\circ d\mathbf{x}\,,$$

где также $\mathbf{l}\circ\gamma\in A$, соотношение (14) можно записать так:

$$D\mathbf{l} = d\mathbf{l} + \mathbf{l}\circ\gamma\circ d\mathbf{x}\,.$$

Сравнивая это выражение и соотношение (15), получим

$$\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{l}}\circ d\mathbf{l} + \gamma\circ d\mathbf{x}\,. \tag{16}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{l}}$ – линейное преобразование, обратное линейному преобразованию $\mathbf{l}$, для которого

$$\tilde{\mathbf{l}}\circ\mathbf{l} = \mathbf{I}^k{}_i\cdot\delta^i{}_k\,.$$

[3] Порядок умножения сомножителей в правой части может быть любым. Далее мы воспользуемся следующим порядком умножения:

$$\mathbf{l}\circ(\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\,.$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$, $\mathbf{l}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ и γ

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_k\cdot dx^k\,,\quad \mathbf{l} = \mathbf{I}^k{}_i\cdot l^i{}_k\,,$$
$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{J}^{k_2k_1}{}_k\cdot\Gamma^k{}_{k_1k_2}\,,\quad \gamma = \mathbf{J}^{k_2k_1}{}_k\cdot\gamma^k{}_{k_1k_2}$$

и правила произведения базисных векторов (2), получим уравнение (16) в координатной записи

$$\Gamma^k{}_{k_1k_2}\cdot dx^{k_2} = \tilde{l}^k{}_i\cdot dl^i{}_{k_1} + \gamma^k{}_{k_1k_2}\cdot dx^{k_2}\,.$$

Отсюда

$$\Gamma^k{}_{k_1k_2} = \tilde{l}^k{}_i\cdot l^i{}_{k_1,k_2} + \gamma^k{}_{k_1k_2}\,. \tag{17}$$

Здесь и далее индекс, отделенный запятой, означает частное дифференцирование по координате с этим индексом. Например, в нашем случае

$$l^i{}_{k_1,k_2} = \frac{\partial l^i{}_{k_1}}{\partial x^{k_2}}\,.$$

Подставляя равенства (13) и (15) в выражение (12), имеем

$$D(D\mathbf{y}) = \mathbf{l}\circ d(d\mathbf{x}) + (\mathbf{l}\circ(\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x}))\circ d\mathbf{x}\,.$$

Далее учтем, что скобки в последнем слагаемом могут быть записаны иначе

$$(\mathbf{l}\circ(\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x}))\circ d\mathbf{x} = \mathbf{l}\circ((\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\,.$$

Поэтому

$$D(D\mathbf{y}) = \mathbf{l}\circ(d^2\mathbf{x} + (\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\,. \tag{18}$$

В Главе 2.1. отмечено, что уравнение геодезической в нормальной системе координат искривленного пространства имеет вид

$$\frac{D^2\mathcal{Y}}{Dy^2} = 0\,.$$

Опираясь на рассмотренное соответствие, имеем

$$\frac{D^2\mathbf{y}}{Dy^2} \ \sim \ \frac{D^2\mathcal{Y}}{Dy^2}\,.$$

Поэтому уравнение геодезической в движущемся пространстве следует записать так:

$$\frac{D^2\mathbf{y}}{Dy^2} = 0\,.$$

Учитывая соотношение (18) и то обстоятельство, что

$$\det||l^i{}_k|| \neq 0\,,$$

приходим к инвариантному уравнению геодезической в системе отсчета

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} + \left(\boldsymbol{\Gamma}\circ\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right)\circ\frac{d\mathbf{x}}{ds} = 0\,. \tag{19}$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$ и $\mathbf{\Gamma}$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot dx^k \,, \quad \mathbf{\Gamma} = J^{k_2 k_1}{}_k \cdot \Gamma^k{}_{k_1 k_2}$$

и правила произведения базисных векторов (2), получим уравнение геодезической относительно координат системы отсчета

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma^k{}_{k_1 k_2} \cdot \frac{dx^{k_1}}{ds} \cdot \frac{dx^{k_2}}{ds} = 0 \,.$$

3. Третий дифференциал. Объект кривизны

Дифференцируя соотношение (11), получим следующее соответствие между третьими дифференциалами:

$$D^3\mathbf{y} \;\sim\; D^3\mathcal{Y} \,. \tag{20}$$

Запишем дифференциал $D^3\mathbf{x}$ с учетом равкнства (18). Получим

$$\begin{aligned} D(D^2\mathbf{x}) = \mathbf{l} \circ D(d^2\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) + \\ D\mathbf{l} \circ (d^2\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) \,. \end{aligned} \tag{21}$$

Это выражение преобразуем, учитывая, во-первых, что

$$D(d^2\mathbf{x}) = d(d^2\mathbf{x})$$

и, во-вторых, подчиним $D(\mathbf{\Gamma})$ – искривленный дифференциал от $\mathbf{\Gamma}$ – соотношениям, аналогичным выражениям (14) и (15):

$$D\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma} \,. \tag{22}$$

Далее вектор $D\mathbf{\Gamma}$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть

$$D\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \circ d\mathbf{x} \,. \tag{23}$$

Здесь $\mathbf{r}$ – линейное преобразование, для которого

$$\mathbf{l} \circ \mathbf{r} \in B.$$

Полагая также

$$\delta\mathbf{\Gamma} = \rho \circ d\mathbf{x} \,,$$

соотношение (22) можно записать так:

$$D\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{\Gamma} + \rho \circ d\mathbf{x} \,.$$

Сравнивая это выражение и соотношение (23), получим

$$\mathbf{r} \circ d\mathbf{x} = d\mathbf{\Gamma} + \rho \circ d\mathbf{x} \,. \tag{24}$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{r}$ и ρ

$$\begin{gathered} d\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \cdot dx^i \,, \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}^{lk}{}_i \cdot \Gamma^i{}_{kl} \,, \\ \mathbf{r} = \mathbf{n}^{mlk}{}_i \cdot r^i{}_{klm} \,, \quad \rho = \mathbf{n}^{mlk}{}_i \cdot \gamma^i{}_{klm} \end{gathered}$$

и правила произведения базисных векторов (2) и (3), получим уравнение (24) в координатной записи

$$r^i{}_{klm} \cdot dx^m = d\Gamma^i{}_{kl} + \gamma^i{}_{klm} \cdot dx^m \,. \tag{25}$$

Отсюда

$$r^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m} + \gamma^i{}_{klm} \,.$$

Подставляя равенства (15) и (23) в соотношение (21), имеем

$$\begin{aligned} D(D^2\mathbf{y}) = \mathbf{l} \circ \big(d^3\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d^2\mathbf{x} + \\ (\mathbf{\Gamma} \circ d^2\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} + ((\mathbf{r} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} + \\ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d^2\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}\big) \,. \end{aligned} \tag{26}$$

Из этого выражения выделим два слагаемых

$$((\mathbf{r} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} \quad \text{и} \quad (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}$$

и введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{R} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} \equiv \\ ((\mathbf{r} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} \,. \end{aligned} \tag{27}$$

Величина $\mathbf{R}$ называется *объектом кривизны.*

Воспользовавшись координатной записью векторов $d\mathbf{x}$ и $\mathbf{R}$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \cdot dx^i \,, \quad \mathbf{R} = \mathbf{n}^{mlk}{}_i \cdot R^i{}_{klm}$$

и правилами произведения базисных векторов (2) и (3), получим координатную запись правой части соотношения (27)

$$\begin{aligned} &((\mathbf{R} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} = \\ &\quad = (((\mathbf{n}^{mlk}{}_i \cdot R^i{}_{klm}) \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} = \\ &\quad = \mathbf{e}_i \cdot R^i{}_{klm} \cdot dx^k \cdot dx^l \cdot dx^m \,. \end{aligned}$$

Вычислим координатную запись слагаемых в левой части соотношения (27)

$$\begin{aligned} &((\mathbf{r} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} = \\ &\quad \mathbf{e}_i \cdot (\gamma^i{}_{klm} + \Gamma^i{}_{kl,m}) \cdot dx^k \cdot dx^l \cdot dx^m \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} = \\ &\quad \mathbf{e}_i \cdot \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} \cdot dx^k \cdot dx^l \cdot dx^m \,. \end{aligned}$$

В результате для координат объекта кривизны получим

$$R^i{}_{klm} = \gamma^i{}_{klm} + \Gamma^i{}_{kl,m} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} \,.$$

4. Искривленное пространство и геометрия Римана

Подводя некоторый итог сказанному, отметим, что в общем случае искривленное пространство строится на векторах и линейных преобразованиях системы отсчета всех порядков и их искривленных дифференциалах. Мы рассмотрели векторы $\mathbf{x}$ и линейные преобразования трех порядков

$$\mathbf{l}, \quad \mathbf{l}\circ\mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{l}\circ\mathbf{R}.$$

Их искривленные дифференциалы строятся идентичным образом. Мы записали

$$D\mathbf{y} = d\mathbf{y} + \delta\mathbf{y} = \mathbf{l}\circ d\mathbf{x} = (\delta + h)\circ d\mathbf{x}\,,$$
$$D\mathbf{l} = d\mathbf{l} + \delta\mathbf{l} = \mathbf{l}\circ\mathbf{\Gamma}\circ d\mathbf{x} = d\mathbf{l} + \mathbf{l}\circ\gamma\circ d\mathbf{x}\,,$$
$$D\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r}\circ d\mathbf{x} = d\mathbf{\Gamma} + \rho\circ d\mathbf{x}\,.$$

По тому же принципу мы должны ввести искривленный дифференциал от линейного преобразования $\mathbf{R}$

$$D\mathbf{R} = d\mathbf{R} + \delta\mathbf{R} = \mathbf{T}\circ d\mathbf{x} = d\mathbf{R} + \tau\circ d\mathbf{x}$$

и дифференциалы от линейных преобразований последующих порядков.

Геометрии Римана соответствует частный случай рассмотренных соотношений

$$D\mathbf{l} = d\mathbf{l} + \mathbf{l}\circ\gamma\circ d\mathbf{x}\,.$$
$$D\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{\Gamma}\,.$$
$$D\mathbf{R} = d\mathbf{R}\,.$$

Таким образом, в геометрии Римана $\gamma^i{}_{klm} = 0$ и объект кривизны приобретает вид

$$R^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m} + \Gamma^i{}_{nm}\cdot\Gamma^n{}_{kl}\,.$$

После антисимметризации этого выражения по индексам l и m получим общеизвестный тензор кривизны

$$R^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{k[l,m]} + \Gamma^i{}_{n[m}\cdot\Gamma^n{}_{|k|l]}\,.$$

5. Базисное и координатное представления

Дифференциал представления вектора

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i\cdot l^i{}_k\cdot dx^k \tag{28}$$

можно рассматривать двояким образом.

1. Можно считать, что вычисление дифференциала сопровождается линейным преобразованием базисных векторов $\mathbf{e}_i$

$$D\mathbf{y} = (\mathbf{e}_i\cdot l^i{}_k)\cdot dx^k\,.$$

Обозначим векторы, получаемые в результате преобразования

$$\mathbf{n}_k = \mathbf{e}_i\cdot l^i{}_k = \mathbf{l}\circ\mathbf{e}_k\,.$$

Тогда дифференциал представления вектора приобретает вид

$$D\mathbf{y} = \mathbf{n}_k\cdot dx^k\,. \tag{29}$$

Представление искривленного пространства в системе отсчета, сопровождаемое указанной записью дифференциала вектора, будем называть *базисным представлением.*

2. Можно считать, что вычисление дифференциала сопровождается линейным преобразованием дифференциалов координат

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i\cdot(l^i{}_k\cdot dx^k)\,.$$

Введем дифференциалы, получаемые в результате преобразования

$$Dy^i = l^i{}_k\cdot dx^k\,. \tag{30}$$

Такие дифференциалы будем называть дифференциалами представления координат. Тогда дифференциал представления вектора приобретает вид

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i\cdot Dy^i\,.$$

Представление искривленного пространства в системе отсчета, сопровождаемое указанной записью дифференциала представления вектора, будем называть *координатным представлением.*

В координатном представлении имеем

$$D(dx^k) = ddx^k\,. \tag{31}$$

Кроме того,

$$Dl^i{}_k = l^i{}_n\cdot\Gamma^n{}_{kl}\cdot dx^l\,, \tag{32}$$

а также

$$Dl^i{}_k = dl^i{}_k + l^i{}_n\cdot\gamma^n{}_{kl}\cdot dx^l\,. \tag{33}$$

Отсюда следует ранее выведенное соотношение

$$\Gamma^n{}_{kl} = \tilde{l}^n{}_i\cdot l^i{}_{k,l} + \gamma^n{}_{kl}\,.$$

Кроме того, в координатном представлении имеем

$$D\Gamma^i{}_{kl} = r^i{}_{klm}\cdot dx^m\,, \tag{34}$$

а также

$$D\Gamma^i{}_{kl} = d\Gamma^i{}_{kl} + \gamma^i{}_{klm}\cdot dx^m\,.$$

Отсюда следует ранее выведенное соотношение

$$r^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m} + \gamma^i{}_{klm}\,.$$

В случае геометрии Римана $\gamma^n{}_{klm} = 0$ и

$$D\Gamma^i{}_{kl} = d\Gamma^i{}_{kl}\,,$$

поэтому

$$r^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m}\,.$$

V. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Дифференциал по направлению

Введем понятие *дифференциал по направлению.* Обозначать такие дифференциалы будем следующим образом: d_1, d_2,... – соответственно дифференциал по направлению 1, дифференциал по направлению 2 и так далее. Аналогично для искривленных дифференциалов D_1, D_2,... Дифференциал по направлению определяется через частную производную по координате направления. Например,

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 \,,$$

где x_1 – координата по направлению 1.

Пусть сначала рассматривается дифференциал вектора искривленного пространства $\mathcal{Y}$ по направлению, которое условно обозначим 1,

$$D_1 \mathcal{Y} \,.$$

Ему соответствует вектор системы отсчета

$$D_1 \mathbf{y} = \mathbf{l} \circ d_1 \mathbf{x} \,.$$

И пусть последующее дифференцирование выполняется по направлению 2. В этом случае вместо выражения (11) имеем

$$D_2(D_1 \mathbf{y}) \;\sim\; D_2 D_1 \mathcal{Y}$$

и

$$D_2(D_1 \mathbf{y}) = \mathbf{l} \circ D_2(d_1 \mathbf{x}) + D_2(\mathbf{l}) \circ d_1 \mathbf{x}$$

или

$$D_2 D_1 \mathbf{y} = \mathbf{l} \circ (d_2 d_1 \mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d_2 \mathbf{x}) \circ d_1 \mathbf{x}) \,. \qquad (35)$$

Заметим, что, если дифференцирование проводится по нормальным координатам x_1 и x_2 в системе отсчета, то

$$d_2 d_1 \mathbf{x} = 0 \,,$$

и, если дифференцирование проводится по нормальным координатам y_1 и y_2 в искривленном пространстве, то

$$D_2 D_1 \mathbf{y} = 0 \sim D_2 D_1 \mathcal{Y} = 0 \,.$$

При вычислении третьего дифференциала по трем направлениям вместо выражения (26) получим

$$\begin{aligned} D_3(D_2 D_1 \mathbf{y}) = \mathbf{l} \circ (&d_3 d_2 d_1 \mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d_2 \mathbf{x}) \circ d_3 d_1 \mathbf{x} + \\ &+ (\mathbf{\Gamma} \circ d_3 d_2 \mathbf{x}) \circ d_1 \mathbf{x} + ((\mathbf{r} \circ d_3 \mathbf{x}) \circ d_2 \mathbf{x}) \circ d_1 \mathbf{x} + \\ &+ (\mathbf{\Gamma} \circ d_3 \mathbf{x}) \circ d_2 d_1 \mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d_3 \mathbf{x}) \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d_2 \mathbf{x}) \circ d_1 \mathbf{x}) \,. \end{aligned}$$

2. Внешнее дифференцирование

Первый внешний дифференциал не отличается от обычного дифференциала – d_1 или D_1.

Второй внешний дифференциал есть разность вторых дифференциалов по двум направлениям, отличающихся порядком дифференцирования. Для дифференциалов d он обозначается $d_2 \wedge d_1$. Таким образом,

$$d_2 \wedge d_1 = d_2 d_1 - d_1 d_2 \,.$$

Соответственно для дифференциалов представления

$$D_2 \wedge D_1 = D_2 D_1 - D_1 D_2 \,.$$

Третий внешний дифференциал есть антисимметричная комбинация дифференциалов по трем направлениям. Для дифференциалов d он обозначается $d_3 \wedge d_2 \wedge d_1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} d_3 \wedge d_2 \wedge d_1 = d_3 d_2 d_1 + d_2 d_1 d_3 + d_1 d_3 d_2 - \\ d_2 d_3 d_1 - d_3 d_1 d_2 - d_1 d_2 d_3 = \\ (d_3 \wedge d_2) d_1 + (d_2 \wedge d_1) d_3 + (d_1 \wedge d_3) d_2 \,. \end{aligned}$$

Аналогично записывается третий внешний дифференциал для дифференциалов представления.

Внешний дифференциал n-го порядка есть антисимметричная комбинация дифференциалов по n направлениям[4]. Максимальный порядок внешнего дифференциала равен числу независимых направлений, то есть размерности пространства.

Внешнее дифференцирование уравнения (6) дает[5]

$$D_2 \wedge D_1 \mathbf{y} = \mathbf{l} \circ (d_2 \wedge d_1 \mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d_2 \mathbf{x}) \wedge d_1 \mathbf{x}) \,. \qquad (36)$$

Заметим, что, если внешнее дифференцирование проводится по координатам (не обязательно нормальным) в системе отсчета, то

$$d_2 \wedge d_1 \mathbf{x} = 0 \,, \qquad (37)$$

и, если внешнее дифференцирование проводится по координатам в искривленном пространстве, то

$$D_2 \wedge D_1 \mathbf{y} = 0 \sim D_2 \wedge D_1 \mathcal{Y} = 0 \,.$$

---

[4] Можно представить себе дифференциалы n-го порядка, в которых используются как антисимметричные комбинации, так и симметричные комбинации дифференциалов по направлениям. Для подалгебр универсальной алгебры, рассмотренных в Главе 1.2. Раздел 2.5., целесообразно антисимметричные и симметричные комбинации дифференциалов поставить в соответствие антисимметричным и симметричным произведениям базисных векторов. С этой точки зрения внешнее дифференцирование соответствует алгебре Клиффорда.

[5] Это же соотношение можно получить путем антисимметризации соотношения (35).

Уравнение (36) в системе отсчета выглядит следующим образом:

$$D_2 \wedge D_1\mathbf{y} = \mathbf{l} \circ ((\mathbf{\Gamma} \circ d_2\mathbf{x}) \wedge d_1\mathbf{x}) \tag{38}$$

и по отношению к координатам

$$D_2 \wedge D_1 y^i = l^i{}_n \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} \cdot d_1x^k \wedge d_2x^l . \tag{39}$$

Антисимметричная часть коэффициентов связности называется *тензором кручения* и обозначается

$$T^n{}_{[kl]} = \Gamma^n{}_{[kl]} .$$

Внешнее дифференцирование уравнения (38) в системе отсчета дает

$$\begin{aligned} D_3 \wedge D_2 \wedge D_1\mathbf{y} = \mathbf{l} \circ (((\mathbf{r} \circ d_3\mathbf{x}) \wedge d_2\mathbf{x}) \wedge d_1\mathbf{x} + \\ +(\mathbf{\Gamma} \circ d_3\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{\Gamma} \circ d_2\mathbf{x}) \wedge d_1\mathbf{x}) . \end{aligned}$$

По отношению к координатам это соотношение имеет вид

$$D_3 \wedge D_2 \wedge D_1 y^i = l^i{}_n \cdot R^n{}_{[klm]} \cdot d_1x^k \wedge d_2x^l \wedge d_3x^m . \tag{40}$$

Вычислим внешний дифференциал от второго дифференциала $D_2(D_1\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} D_3 \wedge D_2(D_1\mathbf{y}) = \mathbf{l} \circ (d_3 \wedge d_2 d_1\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_3 d_1\mathbf{x} - \\ -(\mathbf{\Gamma} \circ d_3\mathbf{x}) \circ d_2 d_1\mathbf{x} + (d_3 \wedge d_2\mathbf{x} \circ \mathbf{\Gamma}) \circ d_1\mathbf{x} + \\ ((r \circ d_3\mathbf{x}) \wedge d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d_3\mathbf{x}) \circ d_2 d_1\mathbf{x} - \\ -(\mathbf{\Gamma} \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_3 d_1\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d_3\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d_2\mathbf{x}) - \\ -(\mathbf{\Gamma} \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d_3\mathbf{x})) \end{aligned} \tag{41}$$

или

$$D_3 \wedge D_2(D_1\mathbf{y}) = \mathbf{l} \circ ((\mathbf{R} \circ d_3\mathbf{x}) \wedge d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} .$$

По отношению к координатам

$$D_3 \wedge D_2(D_1x^i) = l^i{}_n \cdot R^n{}_{k[lm]} \cdot d_1x^k \cdot d_2x^l \wedge d_3x^m .$$

Здесь $R^n{}_{k[lm]}$ – это тензор кривизны искривленного пространства.

3. Первое уравнение структуры искривленного пространства

Рассмотрим уравнения (36) в форме, в которой они в дифференциальной геометрии называются *уравнениями структуры*. Для этого обратимся к координатному представлению и запишем дифференциал представления от координат вектора

$$Dy^i = l^i{}_k \cdot dx^k .$$

Далее введем переобозначение[6]

$$\omega^i \equiv Dy^i .$$

Таким образом, имеем

$$\omega^i = l^i{}_k \cdot dx^k .$$

Выполним внешнее D-дифференцирование этого соотношения:

$$D_2 \wedge \omega^i(d_1) = D_2 l^i{}_k \wedge d_1x^k + l^i{}_k \cdot D_2 \wedge d_1x^k$$

и в силу выражений (32) и (37) получим

$$D_2 \wedge \omega^i(d_1) = D_2 l^i{}_k \wedge d_1x^k .$$

Далее выполним преобразование

$$D_2 \wedge \omega^i(d_1) = (D_2 l^i{}_n \cdot \tilde{l}^n{}_k) \wedge (l^k{}_m \cdot d_1x^m) . \tag{42}$$

Здесь матрица $\tilde{l}$ является обратной по отношению к матрице l, то есть

$$\tilde{l}^n{}_k \cdot l^k{}_m = \delta^n{}_m .$$

Учтем, что

$$l^k{}_m \cdot d_1x^m = \omega^k(d_1) ,$$

а также введем обозначение

$$\omega^i{}_k(D_2) = D_2 l^i{}_n \cdot \tilde{l}^n{}_k . \tag{43}$$

В результате уравнение (42) приобретает вид

$$D_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega^i{}_k(D_2) \wedge \omega^k(d_1) . \tag{44}$$

Это уравнение назовем *первым уравнением структуры искривленного пространства.*

Для простоты записи уравнений структуры принято опускать индексы направлений при дифференциалах и знак альтернирования $\wedge$ для дифференциалов форм. С учетом этого первое уравнение структуры приобретает вид

$$D\omega^i = \omega^i{}_k \wedge \omega^k . \tag{45}$$

Рассмотрим формы $\omega^i{}_k(D)$. Из выражений (43) и (33) имеем

$$\omega^i{}_k(D) = Dl^i{}_n \cdot \tilde{l}^n{}_k = (dl^i{}_n + l^i{}_p \cdot \gamma^p{}_{nm} \cdot dx^m) \cdot \tilde{l}^n{}_k$$

или

$$\begin{aligned} \omega^i{}_k(D) = dl^i{}_n \cdot \tilde{l}^n{}_k + \\ l^i{}_p \cdot \gamma^p{}_{nm} \cdot \tilde{l}^n{}_k \cdot \tilde{l}^m{}_l \cdot \omega^l . \end{aligned} \tag{46}$$

Введем обозначения

$$\omega'^i{}_k = \omega^i{}_k(d) = dl^i{}_n \cdot \tilde{l}^n{}_k$$

и

$$\gamma'^i{}_{kl} = l^i{}_p \cdot \gamma^p{}_{nm} \cdot \tilde{l}^n{}_k \cdot \tilde{l}^m{}_l .$$

[6] Дифференциальные формы, к которым относится Dy^i, в дифференциальной геометрии принято обозначать буквой ω.

В результате получим

$$\omega^i{}_k = \omega'^i{}_k + \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l . \tag{47}$$

Введем коэффициенты связности $\Gamma'^i{}_{kl}$ в соответствии с определением

$$\omega^i{}_k = \Gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l .$$

Из выражения (46) имеем

$$\omega^i{}_k(D) = l^i{}_p \cdot \tilde{l}^p{}_q \cdot l^q{}_{n,m} \cdot \tilde{l}^n{}_k \cdot \tilde{l}^m{}_l \cdot \omega^l + \\ l^i{}_p \cdot \gamma^p{}_{nm} \cdot \tilde{l}^n{}_k \cdot \tilde{l}^m{}_l \cdot \omega^l$$

или

$$\omega^i{}_k(D) = \\ l^i{}_p \cdot (\tilde{l}^p{}_q \cdot l^q{}_{n,m} + \gamma^p{}_{nm}) \cdot \tilde{l}^n{}_k \cdot \tilde{l}^m{}_l \cdot \omega^l .$$

Так как выражение в скобках[7]

$$\tilde{l}^p{}_q \cdot l^q{}_{n,m} + \gamma^p{}_{nm} = \Gamma^p{}_{nm} ,$$

то для введенных коэффициентов связности $\Gamma'^i{}_{kl}$ получим

$$\Gamma'^i{}_{kl} = l^i{}_p \cdot \Gamma^p{}_{nm} \cdot \tilde{l}^n{}_k \cdot \tilde{l}^m{}_l .$$

4. Второе уравнение структуры искривленного пространства

Рассмотрим уравнения (41) в форме, в которой они в дифференциальной геометрии называются *уравнениями структуры*. Для этого обратимся к координатному представлению и выполним внешнее D-дифференцирование соотношения (44):

$$D_3 \wedge D_2 \wedge \omega^i(d_1) = \\ D_3 \wedge \omega^i{}_k(D_2) \wedge \omega^k(d_1) + \omega^i{}_k(D_2) \wedge D_3 \wedge \omega^k(d_1) .$$

В силу выражения (44) получим

$$D_3 \wedge D_2 \wedge \omega^i(d_1) = \\ \big(D_3 \wedge \omega^i{}_k(D_2) + \omega^i{}_n(D_2) \wedge \omega^n{}_k(D_3)\big) \wedge \omega^k(d_1) .$$

Выражение в скобках обозначим следующим образом:

$$D_3 \wedge \omega^i{}_k(D_2) + \omega^i{}_n(D_2) \wedge \omega^n{}_k(D_3) = \omega^i{}_{kl}(D_3) \wedge \omega^l(d_2)$$

или

$$D_3 \wedge \omega^i{}_k(D_2) = \omega^n{}_k(D_3) \wedge \omega^i{}_n(D_2) + \omega^i{}_{kl}(D_3) \wedge \omega^l(d_2) . \tag{48}$$

Это уравнение назовем *вторым уравнением структуры искривленного пространства.*

Для простоты записи уравнений структуры принято опускать индексы направлений при дифференциалах и знак альтернирования $\wedge$ для дифференциалов форм. В результате второе уравнение структуры приобретает вид

$$D\omega^i{}_k = \omega^n{}_k \wedge \omega^i{}_n + \omega^i{}_{kl} \wedge \omega^l . \tag{49}$$

Рассмотрим формы $\omega^i{}_{kl}$. Запишем их следующим образом:

$$\omega^i{}_{kl} = R'^i{}_{klm} \cdot \omega^m .$$

Из уравнения структуры следует

$$R'^i{}_{k[lm]} = \gamma'^i{}_{k[lm]} + \Gamma'^i{}_{k[l,m]} + \Gamma'^i{}_{n[m} \cdot \Gamma'^n{}_{|k|l]} .$$

Для геометрии Римана $\gamma'^i{}_{k[lm]} = 0$ и

$$R'^i{}_{k[lm]} = \Gamma'^i{}_{k[l,m]} + \Gamma'^i{}_{n[m} \cdot \Gamma'^n{}_{|k|l]} .$$

В общем случае последующее внешнее дифференцирование уравнений структуры позволяет установить последовательность дифференциальных форм

$$\omega^i , \quad \omega^i{}_k , \quad \omega^i{}_{kl} , \quad \ldots$$

и соответствующих им уравнений структуры. Указанный метод его автор – Г.Ф.Лаптев – назвал методом продолжений. Ограничимся приведенными двумя уравнениями структуры. Эти уравнения обобщают известные уравнения Картана-Лаптева в том отношении, что здесь используется дифференциал представления D, а коэффициенты связности обладают произвольной симметрией относительно нижних индексов.

5. Инвариантный вывод уравнений структуры искривленного пространства

Рассмотрим вектор кинематической алгебры T_2

$$D_1\mathbf{t} = \mathbf{e}_i \cdot \omega^i(d_1) + \mathbf{I}^k{}_i \cdot \omega^i{}_k(D_1) + \mathbf{J}^{lk}{}_i \cdot \omega^i{}_{kl}(D_1) .$$

Возьмем D_2 – дифференциал от этого вектора по направлению 2. Выражение

$$D_2D_1\mathbf{t} = D_1\mathbf{t} \circ D_2\mathbf{t}$$

определим как *уравнение структуры* алгебры T_2. Вычислим антисимметричную часть этого выражения

$$D_2 \wedge (\mathbf{e}_i \cdot \omega^i(d_1) + \mathbf{I}^k{}_i \cdot \omega^i{}_k(D_1) + \mathbf{J}^{lk}{}_i \cdot \omega^i{}_{kl}(D_1)) = \\ (\mathbf{e}_i \cdot \omega^i(d_1) + \mathbf{I}^k{}_i \cdot \omega^i{}_k(D_1) + \mathbf{J}^{lk}{}_i \cdot \omega^i{}_{kl}(D_1)) \wedge \\ (\mathbf{e}_i \cdot \omega^i(d_2) + \mathbf{I}^k{}_i \cdot \omega^i{}_k(D_2) + \mathbf{J}^{lk}{}_i \cdot \omega^i{}_{kl}(D_2)) ,$$

раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах в левой и правой частях уравнения. Получим

$$D_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega^i{}_k(D_2) \wedge \omega^i(d_1) , \\ D_2 \wedge \omega^i{}_k(D_1) = \omega^n{}_k(D_2) \wedge \omega^i{}_n(D_1) + \omega^i{}_{kl}(D_2) \wedge \omega^l(d_1) .$$

[7] См. соотношение (17).

Эти уравнения представляют собой ранее полученные уравнения структуры искривленного пространства (44) и (48).

6. Уравнения структуры Картана-Лаптева

Уравнениям структуры искривленного пространства можно придать другой вид. Как и в Разделе IV.3 рассмотрим форму

$$\omega^i = l^i{}_k \cdot dx^k\,.$$

Однако теперь выполним внешнее не $D-$, а $d-$ дифференцирование этого соотношения:

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = d_2 l^i{}_k \wedge d_1 x^k + l^i{}_k \cdot d_2 \wedge d_1 x^k\,.$$

В силу выражения (37) получим

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = d_2 l^i{}_k \wedge d_1 x^k\,. \tag{50}$$

Далее выполним преобразование

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = (d_2 l^i{}_n \cdot \tilde{l}^n{}_k) \wedge (l^k{}_m \cdot d_1 x^m)\,.$$

Здесь матрица $\tilde{l}$ является обратной по отношению к матрице l. Учтем, что

$$l^k{}_m \cdot d_1 x^m = \omega^k(d_1)$$

и

$$\omega'^i{}_k(d_2) = d_2 l^i{}_n \cdot \tilde{l}^n{}_k\,. \tag{51}$$

В результате уравнение (50) приобретает вид

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega'^i{}_k(d_2) \wedge \omega^k(d_1)\,. \tag{52}$$

Воспользуемся соотношением (47), из которого следует

$$\omega'^i{}_k = \omega^i{}_k - \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l\,. \tag{53}$$

Получим

$$d_2 \wedge \omega^i(d_1) = \omega^i{}_k(d_2) \wedge \omega^k(d_1) - \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l(d_2) \wedge \omega^k(d_1) \tag{54}$$

или в сокращенном виде

$$d\omega^i = \omega^i{}_k \wedge \omega^k - \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l \wedge \omega^k\,. \tag{55}$$

Это уравнение назовем *первым уравнением структуры искривленного пространства Картана-Лаптева.*

Рассмотрим второе уравнение структуры. Для этого выполним внешнее d-дифференцирование соотношения (52), получим

$$d_3 \wedge d_2 \wedge \omega^i(d_1) = \\ \big(d_3 \wedge \omega'^i{}_k(d_2) + \omega'^i{}_n(d_2) \wedge \omega'^n{}_k(d_3)\big) \wedge \omega^k(d_1)\,.$$

Так как

$$d_3 \wedge d_2 \wedge \omega^i(d_1) = 0\,,$$

то имеем

$$\big(d_3 \wedge \omega'^i{}_k(d_2) + \omega'^i{}_n(d_2) \wedge \omega'^n{}_k(d_3)\big) \wedge \omega^k(d_1) = 0\,.$$

Для форм вида (51) отсюда следует

$$d_3 \wedge \omega'^i{}_k(d_2) = \omega'^n{}_k(d_3) \wedge \omega'^i{}_n(d_2)$$

или в сокращенном виде

$$d\omega'^i{}_k = \omega'^n{}_k \wedge \omega'^i{}_n\,.$$

Подставим сюда выражения (53) для форм $\omega'^i{}_k$. Получим

$$d_3 \wedge \big(\omega^i{}_k(d_2) - \gamma'^i{}_{kl} \cdot \omega^l(d_2)\big) = \\ \big(\omega^n{}_k(d_3) - \gamma'^n{}_{kl} \cdot \omega^l(d_3)\big) \wedge \big(\omega^i{}_n(d_2) - \gamma'^i{}_{nm} \cdot \omega^m(d_2)\big)$$

или

$$d_3 \wedge \omega^i{}_k(d_2) - d_3\gamma'^i{}_{kl} \wedge \omega^l(d_2) - \gamma'^i{}_{kl} \cdot d_3 \wedge \omega^l(d_2) = \\ \omega^n{}_k(d_3) \wedge \omega^i{}_n(d_2) - \gamma'^n{}_{kl} \cdot \omega^l(d_3) \wedge \omega^i{}_n(d_2) - \\ \omega^n{}_k(d_3) \wedge \gamma'^i{}_{nm} \cdot \omega^m(d_2) - \gamma'^n{}_{kl} \cdot \omega^l(d_3) \wedge \gamma'^i{}_{nm} \cdot \omega^m(d_2)\,.$$

После необходимых преобразований с учетом первого уравнения структуры, получим

$$d_3 \wedge \omega^i{}_k(d_2) = \omega^n{}_k(d_3) \wedge \omega^i{}_n(d_2) + \\ \gamma'^i{}_{kl}\omega^l{}_m(d_3) \wedge \omega^m(d_2) + \gamma'^n{}_{kl} \cdot \omega^i{}_n(d_3) \wedge \omega^l(d_2) - \\ \gamma'^i{}_{nl} \cdot \omega^n{}_k(d_3) \wedge \omega^l(d_2) + r'^i{}_{k[l,m]} \cdot \omega^m(d_3) \wedge \omega^l(d_2)\,. \tag{56}$$

Здесь

$$r'^i{}_{k[l,m]} = \gamma'^i{}_{k[l,m]} + \gamma'^i{}_{n[m}\gamma'^n{}_{|k|l]} - \gamma'^i{}_{kn} \cdot \gamma'^n{}_{[lm]}$$

– тензор кривизны относительно коэффициентов связности γ'.

В сокращенном виде

$$d\omega^i{}_k = \omega^n{}_k \wedge \omega^i{}_n + \gamma'^i{}_{kl}\omega^l{}_m \wedge \omega^m + \gamma'^n{}_{kl} \cdot \omega^i{}_n \wedge \omega^l - \\ \gamma'^i{}_{nl} \cdot \omega^n{}_k \wedge \omega^l + r'^i{}_{k[l,m]} \cdot \omega^m \wedge \omega^l\,.$$

Это уравнение назовем *вторым уравнением структуры искривленного пространства Картана-Лаптева.*

VI. АБСОЛЮТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1. Оператор искривленного дифференцирования X_i

Введем оператор искривленного дифференцирования или относительную производную

$$X_k = \frac{D}{\partial x^k}\,.$$

Назовем его *искривленной производной*. Она связана с частной производной по координатам следующим образом:

$$X_k = \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\delta}{\partial x^k}\,.$$

Используя искривленную производную, соотношение (30) координатного представления можно записать так:

$$X_k(y^i) = l^i{}_k\,.$$

Соотношение (32) координатного представления можно записать так:

$$X_l(l^i{}_k) = l^i{}_n \cdot \Gamma^i{}_{kl}$$

или

$$X_l(l^i{}_k) = l^i{}_{k,l} + l^i{}_n \cdot \gamma^n{}_{kl}\,.$$

Соотношение (34) координатного представления можно записать так:

$$X_m(\Gamma^i{}_{kl}) = r^n{}_{klm}$$

или

$$X_m(\Gamma^i{}_{kl}) = \Gamma^i{}_{kl,m} + \gamma^i{}_{klm}\,.$$

Для геометрии Римана $\gamma^n{}_{klm} = 0$, поэтому

$$X_m(\Gamma^i{}_{kl}) = \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} = \Gamma^i{}_{kl,m}\,.$$

Соотношение базисного представления (28) можно записать следующим образом:

$$X_k(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_i \cdot l^i{}_k\,,$$

или

$$X_k(\mathbf{y}) = \mathbf{n}_k\,.$$

Применяя к этому выражению оператор искривленного дифференцирования X_l, получим

$$X_l X_k(\mathbf{y}) = X_l(\mathbf{e}_i) \cdot l^i{}_k + \mathbf{e}_i \cdot X_l(l^i{}_k)\,. \tag{57}$$

Рассмотрим это соотношение при условии

$$X_l(\mathbf{e}_i) = 0$$

или

$$D\mathbf{e}_i = 0\,.$$

Получим

$$X_l X_k(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_i \cdot X_l(l^i{}_k) = \mathbf{e}_i \cdot l^i{}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl} = X_n(\mathbf{y}) \cdot \Gamma^n{}_{kl}$$

или в другой записи

$$X_l(\mathbf{n}_k) = \mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl}\,. \tag{58}$$

Отсюда

$$X_l \wedge X_k(\mathbf{y}) = \mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{[kl]}\,.$$

Дифференцируя соотношение (57) еще раз при условии $D\mathbf{e}_i = 0$, получим

$$\begin{aligned} X_m X_l X_k(\mathbf{x}) &= X_m X_l(\mathbf{n}_k) = \\ &X_m(\mathbf{n}_n) \cdot \Gamma^n{}_{kl} + \mathbf{n}_n \cdot X_m(\Gamma^n{}_{kl}) = \\ &\mathbf{n}_i \cdot (X_m(\Gamma^i{}_{kl}) + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl}) = \mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{klm}\,. \end{aligned}$$

В частном случае отсюда имеем

$$X_m \wedge X_l(\mathbf{n}_k) = \mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{k[lm]} \tag{59}$$

а также

$$X_m(X_l \wedge X_k(\mathbf{x})) = \mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{[kl]m}\,. \tag{60}$$

2. Абсолютное дифференцирование

1. Обратимся к соотношению (6)

$$D_1\mathbf{y} = \mathbf{l} \circ d_1\mathbf{x} \sim D\mathcal{Y}$$

и второму искривленному дифференциалу от выражения $D_1\mathbf{y}$

$$DD_1\mathbf{y} = \mathbf{l} \circ (Dd_1\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x})\,. \tag{61}$$

После умножения слева на обратное линейное преобразование $\tilde{l}$ получим

$$\tilde{l} \circ DD_1\mathbf{y} = Dd_1\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x}\,.$$

Для выражения в левой части введем новое обозначение

$$\tilde{\mathbf{l}} \circ DD_1\mathbf{y} = \mathcal{D}(d_1\mathbf{x})\,.$$

Дифференциал $\mathcal{D}$ назовем *абсолютным*. Таким образом,

$$\mathcal{D}(d_1\mathbf{x}) = Dd_1\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x}\,.$$

Будем рассматривать абсолютный дифференциал при условии

$$Dd_1\mathbf{x} = dd_1\mathbf{x}\,.$$

Тогда

$$\mathcal{D}(d_1\mathbf{x}) = dd_1\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x}\,.$$

Абсолютный дифференциал можно записать и по отношению к координатам вектора $d_1\mathbf{x}$:

$$\mathcal{D}(d_1x^i) = D(d_1x^i) + \Gamma^i{}_{kl} \cdot d_1x^k \cdot dx^l\,.$$

При условии

$$D(d_1x^i) = d(d_1x^i)$$

абсолютный дифференциал от координат вектора приобретает вид

$$\mathcal{D}(d_1x^i) = d(d_1x^i) + \Gamma^i{}_{kl} \cdot d_1x^k \cdot dx^l\,.$$

2. Определение абсолютного дифференциала обобщается на случай векторных и тензорных полей на системе отсчета X и искривленном пространстве Y.

Пусть на точках системы отсчета задано поле векторов $S(x)$. Используя базисные векторы системы отсчета, можно записать

$$S(x) = \mathbf{e}_k \cdot S^k(x)\,.$$

Здесь $S^k(x)$ – координаты вектора. И пусть, кроме того, на точках искривленного пространства задано поле векторов $\mathsf{S}(y)$. Этому вектору мы ставим в соответствие линейно преобразованный вектор $S(x)$, то есть

$$S'(x) = \mathbf{l}(x) \circ S(x) \sim \mathsf{S}(y)\,.$$

При этом дифференциалу $D\mathsf{S}$ соответствует дифференциал DS':

$$DS' \sim D\mathsf{S}\,.$$

По аналогии с выражением (61) для DS' имеем

$$DS' = \mathbf{l} \circ (DS + (\boldsymbol{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ S)\,. \tag{62}$$

После умножения слева на обратное линейное преобразование $\tilde{\mathbf{l}}$ получим

$$\tilde{\mathbf{l}} \circ DS' = DS + (\boldsymbol{\Gamma} \circ \circ d\mathbf{x}) \circ S\,.$$

Для выражения в левой части введем новое обозначение

$$\tilde{\mathbf{l}} \circ DS' = \mathcal{D}S\,.$$

Дифференциал $\mathcal{D}$ обобщает ранее введенный *абсолютный* дифференциал. Таким образом,

$$\mathcal{D}S = DS + (\Gamma \circ d\mathbf{x}) \circ S\,.$$

Полагая

$$DS = dS\,,$$

получим классическое выражение для абсолютного дифференциала контравариантного вектора

$$\mathcal{D}S = dS + (\boldsymbol{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ S\,.$$

От дифференциалов перейдем к производным

$$\frac{\mathcal{D}S}{\partial x^i} = \frac{\partial S}{\partial x^i} + (\boldsymbol{\Gamma} \circ \mathbf{e}_i) \circ S\,. \tag{63}$$

Выражение

$$\frac{\mathcal{D}}{\partial x^i}$$

называется *абсолютной* производной. Соотношение (63) может быть записано в других обозначениях:

$$S_{;i} = S_{,i} + (\boldsymbol{\Gamma} \circ \mathbf{e}_i) \circ S\,.$$

Здесь и далее индекс, отделенный точкой с запятой, означает частное абсолютное дифференцирование по координате с этим индексом.

Абсолютный дифференциал можно записать и по отношению к координатам вектора S (при условии $DS^i = dS^i$)

$$\mathcal{D}S^i = dS^i + \Gamma^i{}_{kl} \cdot S^k \cdot dx^l\,.$$

От дифференциалов перейдем к производным

$$\frac{\mathcal{D}S^i}{\partial x^l} = \frac{\partial S^i}{\partial x^l} + \Gamma^i{}_{kl} \cdot S^k\,. \tag{64}$$

Это соотношение может быть записано иначе:

$$S^i{}_{;l} = S^i{}_{,l} + \Gamma^i{}_{kl} \cdot S^k\,.$$

Кроме того, отметим, что из выражения (62) следует связь между искривленной производной и абсолютной производной контравариантного вектора

$$X_l(S') = \mathbf{l} \circ S_{;l}\,, \tag{65}$$

и для координат контравариантного вектора

$$X_l(S'^i) = l^i{}_k \cdot S^k{}_{;l}\,. \tag{66}$$

3. Пусть на точках системы отсчета задано поле *ковариантных (сопряженных)* векторов $S^*(x)$. Используя базисные векторы системы отсчета, можно записать

$$S^*(x) = S_i(x) \cdot \mathbf{E}^i\,.$$

Здесь $S_i(x)$ – координаты вектора. И пусть на точках искривленного пространства задано поле ковариантных (сопряженных) векторов $\mathsf{S}^*(y)$. Этому вектору поставим в соответствие линейно преобразованный вектор $S^*(x)$, то есть

$$\mathsf{S}^*(y) \sim S'^*(x) = S^*(x) \circ \tilde{\mathbf{l}}(x)\,.$$

При этом дифференциалу $D\mathsf{S}^*$ соответствует дифференциал DS'^*:

$$DS'^* \sim D\mathsf{S}^*\,.$$

Для DS'^* имеем

$$DS'^* = (DS^* + S^* \circ (D\tilde{\mathbf{l}} \circ \mathbf{l})) \circ \tilde{\mathbf{l}}\,.$$

Учтем, что

$$D\tilde{\mathbf{l}} \circ \mathbf{l} + \tilde{\mathbf{l}} \circ D\mathbf{l} = 0$$

откуда

$$D\tilde{\mathbf{l}} \circ \mathbf{l} = -\tilde{\mathbf{l}} \circ D\mathbf{l} = -\boldsymbol{\Gamma} \circ d\mathbf{x}\,.$$

Получим

$$DS'^* = (DS^* - S^* \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x})) \circ \tilde{\mathbf{l}}\,. \tag{67}$$

После умножения справа на линейное преобразование $\mathbf{l}$ получим

$$DS'^* \circ \mathbf{l} = DS^* - S^* \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x})\,.$$

Для выражения в левой части введем обозначение абсолютного дифференциала

$$DS'^* \circ \mathbf{l} = \mathcal{D}(S^*)\,.$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}(S^*) = DS^* - S^* \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x})\,.$$

Полагая

$$DS^* = dS^*\,,$$

получим классическое выражение для абсолютного дифференциала ковариантного вектора

$$\mathcal{D}(S^*) = dS^* - S^* \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x})\,.$$

Соответсвенно абсолютная производная ковариантного вектора запишется как

$$\frac{\mathcal{D}(S)^*}{\partial x^i} = \frac{\partial S^*}{\partial x^i} - S^* \circ (\mathbf{\Gamma} \circ \mathbf{e}_i)\,.$$

В других обозначениях

$$S^*_{;i} = S^*_{,i} - S^* \circ (\mathbf{\Gamma} \circ \mathbf{e}_i)\,.$$

Абсолютный дифференциал можно ввести и по отношению к координатам ковариантного вектора S^*:

$$\mathcal{D}(S_k) = d(S_k) - S_i \cdot \Gamma^i{}_{kl} \cdot dx^l\,.$$

Запишем это соотношение через абсолютную производную

$$\frac{\mathcal{D}S_k}{\partial x^l} = \frac{\partial S_k}{\partial x^l} - S_i \cdot \Gamma^i{}_{kl}$$

или в других обозначениях

$$S_{k;l} = S_{k,l} - S_i \cdot \Gamma^i{}_{kl}\,.$$

Кроме того, отметим, что из выражения (67) следует связь между искривленной производной и абсолютной производной ковариантного вектора

$$X_l(S'^*) = S^*_{;l} \circ \tilde{\mathbf{l}}\,, \tag{68}$$

а для координат ковариантного вектора

$$X_l(S'_i) = S_{k;l} \cdot \tilde{l}^k{}_i\,. \tag{69}$$

4. Пусть теперь задано преобразование линейного преобразования $\mathbf{l}_0$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{l} \circ \mathbf{l}_0 \circ \tilde{\mathbf{l}}$$

или по отношению к координатам

$$l'^m{}_n = l^m{}_k \cdot (l_0)^k{}_i \cdot \tilde{l}^i{}_n\,. \tag{70}$$

Рассмотрим искривленный дифференциал этого выражения

$$\begin{gathered} Dl'^m{}_n = l^m{}_k \cdot D(l_0)^k{}_i \cdot \tilde{l}^i{}_n + \\ Dl^m{}_k \cdot (l_0)^k{}_i \cdot \tilde{l}^i{}_n + l^m{}_k \cdot (l_0)^k{}_i \cdot D\tilde{l}^i{}_n \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} Dl'^m{}_n = l^m{}_k \cdot \Big(D(l_0)^k{}_i + \\ \tilde{l}^k{}_q \cdot Dl^q{}_p \cdot (l_0)^p{}_i + (l_0)^k{}_p \cdot D\tilde{l}^p{}_q \cdot l^q{}_i\Big) \cdot \tilde{l}^i{}_n\,. \end{gathered}$$

Запишем это выражение в следующем виде:

$$Dl'^m{}_n = l^m{}_k \cdot \mathcal{D}(l_0)^k{}_i \cdot \tilde{l}^i{}_n\,,$$

где

$$\mathcal{D}(l_0)^k{}_i = D(l_0)^k{}_i + \tilde{l}^k{}_q \cdot Dl^q{}_p \cdot (l_0)^p{}_i + (l_0)^k{}_p \cdot D\tilde{l}^p{}_q \cdot l^q{}_i$$

есть абсолютный дифференциал функции $(l_0)^k{}_i$. Полагая

$$D(l_0)^k{}_i = d(l_0)^k{}_i\,,$$

получим абсолютный дифференциал в общепринятом виде:

$$\mathcal{D}(l_0)^k{}_i = d(l_0)^k{}_i + (\tilde{l}^k{}_q \cdot Dl^q{}_p) \cdot (l_0)^p{}_i + (l_0)^k{}_p \cdot (D\tilde{l}^p{}_q \cdot l^q{}_i)\,.$$

Используя коэффициенты связности (32), для абсолютного дифференциала получим

$$\mathcal{D}(l_0)^k{}_i = d(l_0)^k{}_i + \Gamma^k{}_{pl} \cdot dx^l \cdot (l_0)^p{}_i - (l_0)^k{}_p \cdot \Gamma^p{}_{il} \cdot dx^l\,.$$

Дифференциалу $\mathcal{D}$ соответствует абсолютная производная

$$\frac{\mathcal{D}(l_0)^k{}_i}{\partial x^l} = \frac{\partial (l_0)^k{}_i}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{pl} \cdot (l_0)^p{}_i - (l_0)^k{}_p \cdot \Gamma^p{}_{il}\,.$$

Для произвольного вектора $S^k{}_i$, который изменяется при преобразовании линейной группы подобно выражению (70)

$$S'^m{}_n = l^m{}_k \cdot S^k{}_i \cdot (l^{-1})^i{}_n\,,$$

абсолютная производная имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}S^k{}_i}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k{}_i}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{pl} \cdot S^p{}_i - S^k{}_p \cdot \Gamma^p{}_{il}\,.$$

Запишем абсолютную производную от тензора кручения

$$\frac{\mathcal{D}T^i{}_{ml}}{\partial x^n} = \frac{\partial T^i{}_{ml}}{\partial x^n} + \Gamma^i{}_{pn} \cdot T^p{}_{ml} - T^i{}_{pl} \cdot \Gamma^p{}_{mn} - T^i{}_{mp} \cdot \Gamma^p{}_{ln}\,,$$

и абсолютную производную от тензора кривизны

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}R^i{}_{klm}}{\partial x^n} = \frac{\partial R^i{}_{klm}}{\partial x^n} + \Gamma^i{}_{pn} \cdot R^p{}_{klm} - R^i{}_{plm} \cdot \Gamma^p{}_{kn} - \\ R^i{}_{kpm} \cdot \Gamma^p{}_{ln} - R^i{}_{klp} \cdot \Gamma^p{}_{mn}\,. \end{aligned}$$

3. Дифференцирование базисных векторов

Напомним, что в соответствии с формулами (28) и (29) вектор $D\mathbf{y}$ записывается через базисные векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{n}_k$ следующим образом:

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i \cdot l^i{}_k \cdot dx^k = \mathbf{n}_k \cdot dx^k\,.$$

Здесь

$$\mathbf{e}_i \cdot l^i{}_k = \mathbf{n}_k\,.$$

Рассмотрим искривленный дифференциал этого выражения. Имеем

$$D\mathbf{e}_i \cdot l^i{}_k + \mathbf{e}_i \cdot Dl^i{}_k = D\mathbf{n}_k\,.$$

Учтем, что первое слагаемое в левой части представляет собой абсолютный дифференциал базисных векторов $\mathbf{n}_k$

$$D\mathbf{e}_i \cdot l^i{}_k = \mathcal{D}\mathbf{n}_k\,.$$

Кроме того, учтем, что второе слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$(\mathbf{e}_i \cdot l^i{}_n) \cdot (\tilde{l}^n{}_m \cdot Dl^m{}_k) = \mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl} \cdot dx^l\,.$$

В результате получим абсолютный дифференциал базисных векторов $\mathbf{n}_k$

$$\mathcal{D}\mathbf{n}_k = D\mathbf{n}_k - \mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl} \cdot dx^l\,. \tag{71}$$

Соответственно абсолютная производная имеет вид

$$\mathbf{n}_{k;l} = X_l(\mathbf{n}_k) - \mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl}\,.$$

Приведем частные случаи указанного абсолютного дифференциала.

1.

$$D\mathbf{n}_k = d\mathbf{n}_k\,.$$

Тогда абсолютный дифференциал базисных векторов $\mathbf{n}_k$ приобретает вид

$$\mathcal{D}\mathbf{n}_k = d\mathbf{n}_k - \mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl} \cdot dx^l\,,$$

а абсолютная производная –

$$\mathbf{n}_{k;l} = \frac{\partial \mathbf{n}_k}{\partial x^l} - \mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl}\,.$$

2.

$$\mathcal{D}\mathbf{n}_k = 0\,.$$

В этом случае

$$D\mathbf{n}_k = \mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{kl} \cdot dx^l$$

откуда

$$\Gamma^n{}_{kl} = \mathbf{N}^n \cdot X_l(\mathbf{n}_k)\,.$$

3. Случай, когда имеют место оба предыдущих частных условия

$$\mathcal{D}\mathbf{n}_k = 0\,, \qquad D\mathbf{n}_k = d\mathbf{n}_k\,.$$

В этом случае

$$\frac{\partial \mathbf{n}_k}{\partial x^l} = \mathbf{n}_i \cdot \Gamma^i{}_{kl}$$

откуда

$$\Gamma^i{}_{kl} = \mathbf{N}^i \cdot \mathbf{n}_{k,l}\,. \tag{72}$$

Покажем, что в этом случае тензор кривизны искривленного пространства тождественно равен нулю. Вычислим

$$R^i{}_{klm} = \Gamma^i{}_{kl,m} - \Gamma^i{}_{km,l} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{km}\,,$$

используя соотношение (72). Первые два слагаемых в правой части дают

$$\begin{aligned}&\Gamma^i{}_{kl,m} - \Gamma^i{}_{km,l} = \\ &= (\mathbf{N}^i \cdot \mathbf{n}_{k,l})_{,m} - (\mathbf{N}^i \cdot \mathbf{n}_{k,m})_{,l} = \\ &= (\mathbf{N}^i_{,m} \cdot \mathbf{n}_{k,l}) - (\mathbf{N}^i_{,l} \cdot \mathbf{n}_{k,m})_{,l}\,.\end{aligned} \tag{73}$$

Для третьего слагаемого в правой части получим [8]

$$\begin{aligned}&\Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} = \\ &= (\mathbf{N}^i \cdot \mathbf{n}_{n,m}) \cdot (\mathbf{N}^n \cdot \mathbf{n}_{k,l}) = \\ &= -(\mathbf{N}^i_{,m} \cdot \mathbf{n}_n) \cdot (\mathbf{N}^n \cdot \mathbf{n}_{k,l)} = -(\mathbf{N}^i_{,m}) \cdot (\mathbf{n}_{k,l)}\,.\end{aligned} \tag{74}$$

Для четвертого слагаемого в правой части получим

$$\begin{aligned}&-\Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{km} = \\ &= -(\mathbf{N}^i \cdot \mathbf{n}_{n,l}) \cdot (\mathbf{N}^n \cdot \mathbf{n}_{k,m}) = \\ &= (\mathbf{N}^i_{,l} \cdot \mathbf{n}_n) \cdot (\mathbf{N}^n \cdot \mathbf{n}_{k,m)} = (\mathbf{N}^i_{,l}) \cdot (\mathbf{n}_{k,m)}\,.\end{aligned} \tag{75}$$

Складывая выражения (73), (74) и (75), получим

$$R^i{}_{klm} \equiv 0\,.$$

4. Дифференцирование метрического тензора

Приведем два варианта дифференцирования метрического тензора. В одном из них используются базисные векторы, в другом – нет.

Первый вариант.

Возьмем абсолютный дифференциал от соотношения, определяющего метрический тензор

$$g_{k_1 k_2} = (\mathbf{n}_{k_1} \cdot \mathbf{n}_{k_2})\,. \tag{76}$$

---

[8] Здесь и далее используется тождество

$$(\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{n}_n) \cdot (\mathbf{N}^n \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b})\,.$$

Получим

$$\mathcal{D}g_{k_1k_2} = (\mathcal{D}\mathbf{n}_{k_1} \cdot \mathbf{n}_{k_2}) + (\mathbf{n}_{k_1} \cdot \mathcal{D}\mathbf{n}_{k_2}) \,.$$

Далее воспользуемся абсолютным дифференциалом базисных векторов (71), сгруппируем слагаемые и воспользуемся формулой (76). В результате получим абсолютный дифференциал метрического тензора

$$\mathcal{D}g_{k_1k_2} = Dg_{k_1k_2} - g_{nk_2} \cdot \Gamma^n{}_{k_1l} \cdot dx^l - g_{k_1n} \cdot \Gamma^n{}_{k_2l} \cdot dx^l \,. \quad (77)$$

Абсолютному дифференциалу метрического тензора соответствует абсолютная производная

$$g_{k_1k_2;l} = X_l(g_{k_1k_2}) - g_{nk_2} \cdot \Gamma^n{}_{k_1l} - g_{k_1n} \cdot \Gamma^n{}_{k_2l} \,. \quad (78)$$

Второй вариант.

В этом случае исходим из преобразования метрического тензора (10)

$$g_{i_1i_2} \cdot l^{i_1}{}_{k_1} \cdot l^{i_2}{}_{k_2} = g_{k_1k_2} \,.$$

Рассмотрим искривленный дифференциал этого выражения. Имеем

$$Dg_{i_1i_2} \cdot l^{i_1}{}_{k_1} \cdot l^{i_2}{}_{k_2} + g_{i_1i_2} \cdot Dl^{i_1}{}_{k_1} \cdot l^{i_2}{}_{k_2} + \\ + g_{i_1i_2} \cdot l^{i_1}{}_{k_1} \cdot Dl^{i_2}{}_{k_2} = Dg_{k_1k_2} \,.$$

Учтем, что первое слагаемое в левой части представляет собой абсолютный дифференциал метрического тензора $g_{k_1k_2}$

$$Dg_{i_1i_2} \cdot l^{i_1}{}_{k_1} \cdot l^{i_2}{}_{k_2} = \mathcal{D}g_{k_1k_2} \,.$$

Кроме того, учтем, что второе слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$g_{i_1i_2} \cdot l^{i_1}{}_n \cdot (\tilde{l}^n{}_m \cdot Dl^m{}_{k_1}) \cdot l^{i_2}{}_{k_2} = g_{nk_2} \cdot \Gamma^n{}_{k_1l} \cdot dx^l \,.$$

Кроме того, учтем, что третье слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$g_{i_1i_2} \cdot l^{i_1}{}_{k_1} \cdot l^{i_2}{}_n \cdot (\tilde{l}^n{}_m \cdot Dl^m{}_{k_2}) = g_{k_1n} \cdot \Gamma^n{}_{k_2l} \cdot dx^l \,.$$

В результате получим абсолютный дифференциал метрического тензора $g_{k_1k_2}$, совпадающий с выражением (77).

4.1. Парадокс геометрии Римана

Геометрия Римана в том виде, в котором она используется в теории гравитации Эйнштейна, приводит к парадоксальной ситуации.

1. С одной стороны, *расчеты коэффициентов связности и тензора кривизны* в теории гравитации основаны на формуле

$$\frac{\partial g_{k_1k_2}}{\partial x^l} = g_{nk_2} \cdot \Gamma^n{}_{k_1l} + g_{k_1n} \cdot \Gamma^n{}_{k_2l} \,.$$

Указанная формула следует из (78) при условии

$$\mathcal{D}g_{k_1k_2} = 0 \,, \qquad Dg_{k_1k_2} = dg_{k_1k_2} \,. \quad (79)$$

2. С другой стороны, в силу определения метрического тензора (76) условие (79) эквивалентно условию

$$\mathcal{D}\mathbf{n}_k = 0 \,, \qquad D\mathbf{n}_k = d\mathbf{n}_k \,.$$

Но согласно результату Раздела 3. в этом случае *тензор кривизны тождественно равен нулю.*

Выход из парадоксальной ситуации таков: геометрия Римана в том виде, в котором она используется в теории гравитации, неявно отказывается от определения метрического тензора (76). А это означает, что в теории гравитации Эйнштейна система отсчета не рассматривается как векторное евклидово пространство, поэтому формула (76) не имеет места. Однако нужно понимать, что единственный путь отображения физического пространства в математические образы состоит в том, чтобы считать физическое пространство векторным и евклидовым. Отсюда следует вывод: геометрия Римана в том виде, в котором она используется в теории гравитации, неприемлема как теория физического пространства.

5. Преобразование пространства и преобразование координат

Для пространства Римана как точечного многообразия невозможно ясно решить вопрос о том, как отличить физическое преобразование пространства, за которым стоит изменение положения точек пространства, от нефизического преобразования системы координат, являющегося переобозначением (изменением числового обозначения) точек.

Представление о системе отсчета и об искривленном пространстве как о векторных пространствах очевидно решает этот вопрос. Изменение системы координат в системе отсчета не изменяет вектора в этом пространстве.

Пусть $d\mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot dx^k$ – вектор пространства X, а $l^k{}_i(x)$ – матрица линейного преобразования. Тогда линейное преобразование осуществляет преобразование вектора $d\mathbf{x}$ в вектор $(d\mathbf{x})' = \mathbf{e}_k \cdot l^k{}_i \cdot dx^i$. И в этом понимании линейное преобразование наделяется физическим смыслом как преобразование пространства. Таким образом, физическим смыслом наделяется следующая система преобразований[9]:

$$\begin{aligned} (dx)'^k &= l^k{}_i \cdot dx^i \,, \\ \mathbf{e}'_k &= \mathbf{e}_k \,, \\ l'^k{}_i &= (l_0)^k{}_n \cdot l^n{}_i \end{aligned}$$

[9] Эта система преобразований соответствует координатному представлению искривленного пространства.

или эквивалентная ей[10]

$$\begin{aligned} (dx)'^i &= dx^i\,, \\ \mathbf{e}'_i &= \mathbf{e}_k \cdot l^k{}_i\,, \\ l'^k{}_i &= (l_0)^k{}_n \cdot l^n{}_i\,. \end{aligned}$$

В отличие от этих преобразований рассмотрим преобразования

$$\begin{aligned} (dx)'^i &= x^i{}_k \cdot dx^k\,, \\ \mathbf{e}'_i &= \mathbf{e}_k \cdot \tilde{x}^k{}_i\,, \\ l'^k{}_i &= x^k{}_m \cdot l^m{}_n \cdot \tilde{x}^n{}_i\,. \end{aligned} \tag{80}$$

Они преобразуют систему координат, оставляя неизменными векторы пространства. Действительно, пусть исходный вектор:

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{e}_k \cdot l^k{}_i \cdot dx^i\,,$$

а преобразованный вектор:

$$d\mathbf{x}'' = \mathbf{e}'_k \cdot l'^k{}_i \cdot dx'^i\,.$$

Используя соотношение (73), получим

$$d\mathbf{x}'' = d\mathbf{x}'\,.$$

В этом понимании преобразования системы координат не меняют вектор и поэтому не наделяются физическим смыслом. В частном случае преобразования системы координат, когда $l^k{}_i = \delta^k{}_i$, имеем

$$\begin{aligned} (dx)'^k &= x^k{}_i \cdot dx^i\,, \\ \mathbf{e}'_i &= \mathbf{e}_k \cdot \tilde{x}^k{}_i\,, \\ l'^k{}_i &= \delta^k{}_i\,, \\ d\mathbf{x}' &= d\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \cdot dx^i\,. \end{aligned} \tag{81}$$

Здесь полезно рассмотреть следующий пример. Пусть в пространстве с системой преобразований (81) задан вектор $A(x) = \mathbf{e}_k \cdot A^k(x)$. В соответствии с соотношением (81) координаты этого вектора преобразуются следующим образом:

$$A'^k = x^k{}_i \cdot A^i\,.$$

Отсюда следует, что

$$X_l(A'^k) = x^k{}_i \cdot A^i{}_{;l} = x^k{}_i \cdot (A^i{}_{,l} + \Gamma^i{}_{nl} \cdot A^n)\,,$$

то есть абсолютная производная от координат вектора

$$A^i{}_{;l} = A^i{}_{,l} + \Gamma^i{}_{nl} \cdot A^n\,,$$

а коэффициенты связности

$$\Gamma^i{}_{nl} = \tilde{x}^i{}_p X_l(x^p{}_n)\,.$$

[10] Эта система преобразований соответствует базисному представлению искривленного пространства.

Казалось бы, мы имеем дело с искривленным пространством. Однако, при дифференцировании надо анализировать не координаты вектора, а сам вектор:

$$X_l(A') = X_l(\mathbf{e}'_k) \cdot A'^k + \mathbf{e}'_k \cdot X_l(A'^k)\,.$$

Учитывая второе соотношение в преобразованиях (81), получим

$$X_l(\mathbf{e}'_k) = -\mathbf{e}_i \cdot \Gamma^i{}_{kl}\,.$$

В результате

$$X_l(A') = A_{;l} = A_{,l}$$

то есть рассматриваемое пространство является евклидовым.

6. Абсолютное дифференцирование по подгруппе группы линейных преобразований

1. Для произвольного вектора S^k, который изменяется при линейном преобразовании как $S'^k = l^k{}_i \cdot S^i$, абсолютная производная имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}S^k}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{il} \cdot S^i\,.$$

Перейдем к подгруппе группы линейных преобразований. Для этого учтем, что

$$\Gamma^k{}_{il} = \frac{\mathcal{D}l^k{}_i}{\partial x^l} = \frac{\mathcal{D}l^k{}_i}{\mathcal{D}\varphi^\alpha} \cdot \frac{\mathcal{D}\varphi^\alpha}{\partial x^l} = K^k{}_{i\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_l\,, \tag{82}$$

где φ^α – параметры подгруппы группы линейных преобразований,

$$K^k{}_{i\alpha} = \frac{\mathcal{D}l^k{}_i}{\mathcal{D}\varphi^\alpha}\,.$$

Получим

$$\frac{\mathcal{D}S^k}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k}{\partial x^l} + K^k{}_{i\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_l \cdot S^i\,.$$

2. Пусть произвольный вектор S_i преобразуется под действием группы линейных преобразований следующим образом:

$$S'_i = S_k \cdot \tilde{l}^k{}_i\,,$$

где $l^l{}_k \cdot \tilde{l}^k{}_i = \delta^l{}_i$. Абсолютная производная от S_i имеет вид

$$\frac{\mathcal{D}S_i}{\partial x^l} = \frac{\partial S_i}{\partial x^l} - S_k \cdot K^k{}_{i\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_l\,.$$

3. Пусть теперь задан вектор $S^k{}_i$ с преобразованием

$$S'^k{}_i = l^k{}_m \cdot S^m{}_n \cdot \tilde{l}^n{}_i\,.$$

Абсолютная производная от $S^k{}_i$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\mathcal{D}S^k{}_i}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k{}_i}{\partial x^l} + \Gamma^k{}_{ml} \cdot S^m{}_i - S^k{}_n \cdot \Gamma^n{}_{il} \,.$$

Перейдем к подгруппе группы линейных преобразований. Для этого учтем выражение (74) и, кроме того,

$$S^k{}_i = K^k{}_{i\alpha} \cdot S^\alpha \,.$$

В результате получим

$$\frac{\mathcal{D}(K^k{}_{i\alpha} \cdot S^\alpha)}{\partial x^l} = \frac{\partial (K^k{}_{i\alpha} \cdot S^\alpha)}{\partial x^l} +$$

$$+K^k{}_{m\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_l \cdot (K^m{}_{i\beta} \cdot S^\beta) - (K^k{}_{n\beta} \cdot S^\beta) \cdot K^n{}_{i\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_l$$

или

$$K^k{}_{i\alpha} \cdot \frac{\mathcal{D}S^\alpha}{\partial x^l} = K^k{}_{i\alpha} \cdot \frac{\partial S^\alpha}{\partial x^l} +$$

$$+(K^k{}_{m\gamma} \cdot K^m{}_{i\beta} - K^k{}_{m\beta} \cdot K^m{}_{i\gamma}) \cdot \Gamma^\gamma{}_l \cdot S^\beta \,.$$

Примем во внимание, что

$$K^k{}_{m\gamma} \cdot K^m{}_{i\beta} - K^k{}_{m\beta} \cdot K^m{}_{i\gamma} = K^k{}_{i\alpha} \cdot C^\alpha{}_{\beta\gamma} \,, \tag{83}$$

где $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$ – структурные постоянные подгруппы. В результате получим выражение для абсолютной производной от S^α по подгруппе группы линейных преобразований

$$\frac{\mathcal{D}S^\alpha}{\partial x^l} = \frac{\partial S^\alpha}{\partial x^l} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_l \cdot S^\beta \,.$$

4. Запишем абсолютную производную по подгруппе группы линейных преобразований от тензора кручения. Для этого в абсолютной производной общего вида

$$\frac{\mathcal{D}T^i{}_{ml}}{\partial x^n} = \frac{\partial T^i{}_{ml}}{\partial x^n} + \Gamma^i{}_{pn} \cdot T^p{}_{ml} - T^i{}_{pl} \cdot \Gamma^p{}_{mn} - T^i{}_{mp} \cdot \Gamma^p{}_{ln}$$

учтем, что

$$T^i{}_{ml} = K^i{}_{m\alpha} \cdot T^\alpha{}_l \quad \text{и} \quad \Gamma^i{}_{pn} = K^i{}_{p\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_n \,.$$

Тогда

$$\frac{\mathcal{D}(K^i{}_{m\alpha} \cdot T^\alpha{}_l)}{\partial x^n} = \frac{\partial (K^i{}_{m\alpha} \cdot T^\alpha{}_l)}{\partial x^n} + \\ +(K^i{}_{p\gamma} \cdot K^p{}_{m\beta} - K^p{}_{m\gamma} \cdot K^i{}_{p\beta}) \cdot \Gamma^\gamma{}_n \cdot T^\beta{}_l - \\ -K^i{}_{m\alpha} \cdot T^\alpha{}_p \cdot K^p{}_{l\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_n \,.$$

Используя выражение (75), получим

$$\frac{\mathcal{D}T^\alpha{}_l}{\partial x^n} = \frac{\partial T^\alpha{}_l}{\partial x^n} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_n \cdot T^\beta{}_l - T^\alpha{}_p \cdot K^p{}_{l\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_n \,.$$

5. Запишем абсолютную производную по подгруппе группы линейных преобразований от тензора кривизны. Для этого в абсолютной производной общего вида

$$\frac{\mathcal{D}R^i{}_{klm}}{\partial x^n} = \frac{\partial R^i{}_{klm}}{\partial x^n} + \Gamma^i{}_{pn} \cdot R^p{}_{klm} - R^i{}_{plm} \cdot \Gamma^p{}_{kn} - \\ -R^i{}_{kpm} \cdot \Gamma^p{}_{ln} - R^i{}_{klp} \cdot \Gamma^p{}_{mn} \,.$$

учтем

$$R^i{}_{klm} = K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{lm} \,, \qquad \Gamma^i{}_{pn} = K^i{}_{p\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_n \,.$$

Тогда

$$\frac{\mathcal{D}(K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{lm})}{\partial x^n} = \frac{\partial (K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{lm})}{\partial x^n} + \\ +(K^i{}_{p\gamma} \cdot K^p{}_{k\beta} - K^i{}_{p\beta} \cdot K^p{}_{k\gamma}) \cdot R^\beta{}_{lm} \cdot \Gamma^\gamma{}_n - \\ -K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{pm} \cdot K^p{}_{l\beta} \cdot \Gamma^\beta{}_n - K^i{}_{k\alpha} \cdot R^\alpha{}_{lp} \cdot K^p{}_{m\beta} \cdot \Gamma^\beta{}_n \,.$$

Используя выражение (75), получим

$$\frac{\mathcal{D}R^\alpha{}_{lm}}{\partial x^n} = \frac{\partial R^\alpha{}_{lm}}{\partial x^n} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_n \cdot R^\beta{}_{lm} - \\ -R^\alpha{}_{pm} \cdot K^p{}_{l\beta} \cdot \Gamma^\beta{}_n - R^\alpha{}_{lp} \cdot K^p{}_{m\beta} \cdot \Gamma^\beta{}_n \,.$$

Компоненты вектора x^i разделим на две части x^{i_1}, x^{i_2}. Пусть подгруппа группы линейных преобразований действует только на x^{i_1}, то есть $dx'^{i_1} = l^{i_1}{}_{k_1} \cdot dx^{k_1}$. Тогда из всех коэффициентов $K^i{}_{k\beta}$ отличны от нуля только коэффициенты вида $K^{i_1}{}_{k_1\beta}$. Поэтому, в частности, абсолютные производные имеют вид

$$\frac{\mathcal{D}T^\alpha{}_{i_2}}{\partial x^{n_2}} = \frac{\partial T^\alpha{}_{i_2}}{\partial x^{n_2}} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_{n_2} \cdot T^\beta{}_{i_2} \,,$$

$$\frac{\mathcal{D}R^\alpha{}_{k_2l_2}}{\partial x^{n_2}} = \frac{\partial R^\alpha{}_{k_2l_2}}{\partial x^{n_2}} + C^\alpha{}_{\beta\gamma} \cdot \Gamma^\gamma{}_{n_2} \cdot R^\beta{}_{k_2l_2} \,.$$

VII. КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Из выражения (58) следует, что коэффициенты связности могут быть записаны следующим образом:

$$\Gamma^i{}_{kl} = (\mathbf{N}^i \cdot X_l(\mathbf{n}_k)) \,.$$

Здесь векторы $\mathbf{N}^i$ определяются тем,что

$$(\mathbf{N}^i \cdot \mathbf{n}_k) = \delta^i{}_k \,.$$

В общем случае коэффициенты связности несимметричны по нижним индексам

$$\Gamma^i{}_{kl} = \Gamma^i{}_{<kl>} + \Gamma^i{}_{[kl]} \,.$$

Здесь

$$\Gamma^i{}_{<kl>} = \frac{1}{2}\big((\mathbf{N}^i \cdot X_l(\mathbf{n}_k)) + (\mathbf{N}^i \cdot X_k(\mathbf{n}_l))\big)$$

и

$$\Gamma^i{}_{[kl]} = \frac{1}{2}\left((\mathbf{N}^i \cdot X_l(\mathbf{n}_k)) - (\mathbf{N}^i \cdot X_k(\mathbf{n}_l))\right) .$$

Укажем, что в ряде случаев удобно пользоваться обозначением

$$\Gamma_{ikl} = g_{in} \cdot \Gamma^n{}_{kl} = (\mathbf{n}_i \cdot X_l(\mathbf{n}_k)) .$$

Введем символы Кристоффеля

$$\{i\,,\, kl\} \equiv \frac{1}{2}\left(X_l(g_{ik}) + X_k(g_{li}) - X_i(g_{kl})\right)$$

и найдем их связь с коэффициентами связности Γ_{ikl}. Для этого раскроем $\{i\,,\, kl\}$ через базисные векторы

$$\{i\,,\, kl\} = \tfrac{1}{2}\left((\mathbf{n}_i \cdot X_l(\mathbf{n}_k)) + (X_l(\mathbf{n}_k) \cdot \mathbf{n}_i) + \right.$$
$$\left. + (\mathbf{n}_l \cdot X_k \wedge X_i(\mathbf{y})) - (\mathbf{n}_k \cdot X_i \wedge X_l(\mathbf{y}))\right)$$

Откуда

$$\{i\,,\, kl\} = \frac{1}{2}\Gamma_{i<kl>} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{l[ik]} - \Gamma_{k[li]}\right) .$$

В результате получаем

$$\Gamma_{ikl} = \{i\,,\, kl\} + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{i[kl]} + \Gamma_{k[li]} - \Gamma_{l[ik]}\right) .$$

Если коэффициенты связности симметричны по последним двум индексам, то они совпадают с символами Кристоффеля:

$$\Gamma_{i<kl>} = \{i\,,\, kl\} .$$

VIII. ТЕНЗОРЫ КРУЧЕНИЯ И КРИВИЗНЫ

1. Тензор кручения

В соответствии с определением тензор кручения

$$T^n{}_{[kl]} \equiv \Gamma^n{}_{[kl]} .$$

2. Тензор кривизны

В соответствии с определением тензор кривизны

$$R^i{}_{k[lm]} \equiv \Gamma^i{}_{kl,m} - \Gamma^i{}_{km,l} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{km} .$$

Разбивая коэффициенты связности на слагаемые, симметричные и антисимметричные по нижним индексам, тензор кривизны можно записать в следующем виде (см. Приложение 1.):

$$R^i{}_{k[lm]} = B^i{}_{k[lm]} + \Omega^i{}_{k[lm]} ,$$

где

$$B^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{<kl>,m} - \Gamma^i{}_{<km>,l} +$$
$$+\Gamma^i{}_{<nm>} \cdot \Gamma^n{}_{<kl>} - \Gamma^i{}_{<nl>} \cdot \Gamma^n{}_{<km>} ,$$

$$\Omega^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{[kl];m} - \Gamma^i{}_{[km];l} +$$
$$+\Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} - \Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} + 2\Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{[lm]} .$$

Свертка тензора кривизны по индексам i и m приводит к тензору второго ранга – тензору Риччи

$$R_{kl} = B_{kl} + \Omega_{kl} .$$

Разберем свойства тензора Ω_{kl} при специально заданном условии

$$\Gamma^i{}_{[ki]} = 0$$

тогда

$$\Omega_{kl} = \Gamma^i{}_{[kl];i} + \Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{[li]} .$$

То есть

$$\Omega_{kl} = \Omega_{<kl>} + \Omega_{[kl]} ,$$

где

$$\Omega_{<kl>} = \Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{[li]} , \quad \Omega_{[kl]} = \Gamma^i{}_{[kl];i} .$$

Разбивая коэффициенты связности на слагаемые в соответствии с выражением (17)

$$\Gamma^i{}_{kl} = \tilde{l}^i{}_n \cdot l^n{}_{k,l} + \gamma^i{}_{kl}$$

или

$$\Gamma^i{}_{kl} = l^i{}_{kl} + \gamma^i{}_{kl} ,$$

где введено обозначение

$$l^i{}_{kl} = \tilde{l}^i{}_n \cdot l^n{}_{k,l} ,$$

тензор кривизны можно записать в следующем виде:

$$R^i{}_{k[lm]} = R^i{}_{k[lm]}(l) + R^i{}_{k[lm]}(\gamma) +$$
$$+ l^i{}_{n[m} \cdot \gamma^n{}_{|k|l]} + \gamma^i{}_{n[m} \cdot l^n{}_{|k|l]} ,$$

где

$$R^i{}_{k[lm]}(l) = l^i{}_{kl,m} - l^i{}_{km,l} + l^i{}_{nm} \cdot l^n{}_{kl} - l^i{}_{nl} \cdot l^n{}_{km}$$

– тензор кривизны по отношению к слагаемым коэффициентов связности l, а

$$R^i{}_{k[lm]}(\gamma) = \gamma^i{}_{kl,m} - \gamma^i{}_{km,l} + \gamma^i{}_{nm} \cdot \gamma^n{}_{kl} - \gamma^i{}_{nl} \cdot \gamma^n{}_{km}$$

– тензор кривизны по отношению к слагаемым коэффициентов связности γ. При этом тензор кривизны по отношению к слагаемым коэффициентов связности l

$$R^i{}_{k[lm]}(l) = 0 .$$

Отсюда следует важный результат. Коэффициенты связности содержат два слагаемых: одно задается линейным преобразованием, которым также определяется метрический тензор, а другое представлено коэффициентами γ. В общем случае эти величины не связаны друг с другом. Если коэффициенты связности определяются только линейным преобразованием, то есть они представлены только первым слагаемым, тензор кривизны в этом случае равен нулю[11]. Таким образом, если строить теорию гравитации на метрическом тензоре вида (10), другими словами на линейных преобразованиях, то такая теория не может использовать тензор кривизны. И, напротив, если мы хотим использовать тензор кривизны, то исходным объектом теории гравитации должны быть независимые слагаемые γ коэффициентов связности. Понятно, что вышесказанное не имеет место, если на величины l и γ наложены условия, связывающие их между собой. Например, таким условием может быть равенство нулю абсолютной производной от метрического тензора $\mathcal{D}g_{ik} = 0$.

3. Тождества Бианки

Внешнее дифференцирование уравнений структуры приводит к тождествам Бианки. Эти тождества можно получить иначе, используя тождества Якоби, которым подчиняются антисимметричные операторы

$$((X_m \wedge X_l) \wedge X_k) + ((X_l \wedge X_k) \wedge X_m) + \\ +((X_k \wedge X_m) \wedge X_l) = 0 \,. \tag{84}$$

Действительно, воздействуем этим оператором на вектор $\mathbf{y}$

$$(X_m \wedge X_l)X_k(\mathbf{y}) + (X_l \wedge X_k)X_m(\mathbf{y}) + \\ +(X_k \wedge X_m)X_l(\mathbf{y}) - X_k(X_m \wedge X_l)(\mathbf{y}) - \\ -X_m(X_l \wedge X_k)(\mathbf{y}) - X_l(X_k \wedge X_m)(\mathbf{y}) = 0$$

и используем соотношения (59) и (60). Получим

$$\mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{k[lm]} + \mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{m[kl]} + \mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{l[mk]} - \\ -X_k(\mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{[lm]}) - X_m(\mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{[kl]}) - \\ -X_l(\mathbf{n}_n \cdot \Gamma^n{}_{[mk]}) = 0 \,.$$

Отсюда получаем *первое тождество Бианки*

$$R^i{}_{k[lm]} + R^i{}_{m[kl]} + R^i{}_{l[mk]} - R^i{}_{[lm]k} - \\ -R^i{}_{[kl]m} - R^i{}_{[mk]l} = 0 \,.$$

В частном случае, когда коэффициенты связности симметричны по нижним индексам, первое тождество Бианки приобретает вид

$$R^i{}_{k[lm]} + R^i{}_{m[kl]} + R^i{}_{l[mk]} = 0 \,.$$

[11] Искривленное пространство в этом случае было названо пространством абсолютного параллелизма.

Воздействуем оператором (76) на вектор $\mathbf{n}_k$. Получим

$$(X_n \wedge X_m)X_l(\mathbf{n}_k) + (X_m \wedge X_l)X_n(\mathbf{n}_k) + \\ +(X_l \wedge X_n)X_m(\mathbf{n}_k) - X_l(X_n \wedge X_m)(\mathbf{n}_k) - \\ -X_n(X_m \wedge X_l)(\mathbf{n}_k) - X_m(X_l \wedge X_n)(\mathbf{n}_k) = 0 \,.$$

Отсюда получаем *второе тождество Бианки* (см. Приложение 2)

$$R^i{}_{k[lm];n} + R^i{}_{k[nl];m} + R^i{}_{k[mn];l} + \\ +2(R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} + \\ +R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]}) = 0 \,.$$

В частном случае, когда коэффициенты связности симметричны по нижним индексам, второе тождество Бианки приобретает вид

$$R^i{}_{k[lm];n} + R^i{}_{k[nl];m} + R^i{}_{k[mn];l} = 0 \,.$$

IX. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ГЕОМЕТРИЯ РИМАНА

Геометрия Римана в том виде, в котором она участвует в формировании теории гравитации Эйнштейна, не соответствует представлению о векторном пространстве (См. Раздел VI.4.1 настоящей Главы). Настоящий Раздел направлен на установление указанного соответствия. Решение проблемы связано с выяснением правил, по которым необходимо вычислять дифференциалы и производные в искривленном пространстве, дифференциалы и производные в пространстве представления и дифференциалы и производные в системе отсчета. В этом Разделе сформулируем правила искривленного и абсолютного дифференцирования, благодаря которым достигается соответствие между векторным пространством представления и геометрией Римана.

Напомним, что искривленный дифференциал

$$D = d + \delta \,,$$

где d – обыкновенный дифференциал, δ – искривленная вариация. Соответственно искривленная производная записывается следующим образом:

$$\frac{D}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\delta}{\partial x^k} \,.$$

Соотношение между абсолютным дифференциалом $\mathcal{D}$ и обыкновенным дифференциалом будем записывать так:

$$\mathcal{D} = d + \delta_a \,.$$

Величину δ_a назовем абсолютной вариацией. Абсолютную производную будем записывать соответственно

$$\frac{\mathcal{D}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\delta_a}{\partial x^k} \,.$$

1. Правила и примеры искривленного дифференцирования

Предварительно напомним, что вектор искривленного пространства $D\mathcal{Y} \in Y$

$$D\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_i \cdot Dy^i \,,$$

где

$$\mathfrak{e}_i = \frac{D\mathcal{Y}}{Dy^i} \,,$$

изучается с помощью *соответствующего* вектора движущегося пространства (пространства представления) X'

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i \cdot Dy^i \,,$$

где

$$\mathbf{e}_i = \frac{D\mathbf{y}}{Dy^i} \,.$$

Условие соответствия состоит в том, что граничные точки векторов $D\mathcal{Y}$ и $D\mathbf{y}$ совпадают. Условие соответствия векторов записывается так

$$D\mathcal{Y} \sim D\mathbf{y} \,.$$

Условие соответствия распространяется и на базисные векторы

$$\mathfrak{e}_i \sim \mathbf{e}_i \,.$$

Представляющий вектор $D\mathbf{y}$ записывается через координаты системы отсчета следующим образом:

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i \cdot Dy^i = \mathbf{e}_i \cdot l^i{}_k \cdot dx^k = \mathbf{n}_k \cdot dx^k \,.$$

Здесь

$$l^i{}_k = \frac{Dy^i}{\partial x^k} \,, \qquad \mathbf{n}_k = \mathbf{e}_i \cdot l^i{}_k = \frac{D\mathbf{y}}{\partial x^k} \,. \tag{85}$$

Отметим, что базисные векторы $\mathbf{n}_k$ необходимо отличать от базисных векторов системы отсчета

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^k} \,.$$

Теперь обратимся к *правилам искривленного дифференцирования.*

1. В том случае, когда независимыми переменными являются векторы искривленного пространства $\mathcal{Y}$, а координаты искривленного пространства y^i являются нормальными, вторые дифференциалы от этих объектов равны нулю.

$$D_2 D_1 \mathcal{Y} = 0 \,, \qquad D_2 D_1 y^i = 0 \,. \tag{86}$$

Отсюда для указанного случая

$$D\mathfrak{e}_i = 0 \,.$$

2. В том случае, когда независимыми переменными являются векторы системы отсчета $\mathbf{x}$, а координаты искривленного пространства x^k являются нормальными, вторые дифференциалы от этих объектов равны нулю

$$d_2 d_1 \mathbf{x} = 0 \,, \qquad d_2 d_1 x^k = 0 \,.$$

Отсюда для указанного случая

$$d\mathbf{e}_k = 0 \,.$$

3. В общем случае для искривленного дифференцирования векторов пространства представления X' имеют место следующие правила.

3.1. Искривленные дифференциалы базисных векторов движущегося пространства (пространства представления) X' и сопряженного ему пространства X'^* равны нулю. Равны нулю также искривленные дифференциалы произведений указанных векторов.

$$D\mathbf{e}_i = 0 \,, \qquad D\mathbf{E}^i = 0 \,, \qquad D\delta^i{}_{i_1} = D(\mathbf{e}_{i_1} \cdot \mathbf{E}^i) = 0 \,. \tag{87}$$

Отсюда следует, что выполняются соотношения

$$D\mathbf{y} = \mathbf{e}_i \cdot Dy^i \,, \qquad D\mathbf{n}_k = \mathbf{e}_i \cdot Dl^i{}_k \,. \tag{88}$$

3.2. Искривленное дифференцирование числовых объектов, принадлежащих пространству представления (ч.о.п.п.)[12], сводится к обыкновенному дифференцированию

$$D(\text{ч.о.п.п.}) = d(\text{ч.о.п.п.}) \,. \tag{89}$$

Отсюда следует, что

$$\delta(\text{ч.о.п.п.}) = 0 \,.$$

1.1. *Примеры искривленного дифференцирования*

1. Второй искривленный дифференциал от вектора представления $\mathbf{y}$

$$D_2 D_1 \mathbf{y} = D_2 \mathbf{n}_k \cdot d_1 x^k + \mathbf{n}_k \cdot D_2 d_1 x^k \,.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как в соответствии с правилом (89)

$$D_2 d_1 x^k = d_2 d_1 x^k \,.$$

---

[12] К таким объектам относятся, в частности, следующие величины

$$x^k \,, \qquad g_{k_1 k_2} \,, \qquad \Gamma^k{}_{k_1 k_2} \,, \qquad R^k{}_{k_1 k_2 k_3} \,.$$

Введем коэффициенты связности $\Gamma^k{}_{k_1k_2}$ следующим образом[13]:

$$D\mathbf{n}_{k_1} = \mathbf{n}_k \cdot \Gamma^k{}_{k_1k_2} dx^{k_2} \,. \tag{90}$$

Отсюда следует выражение для коэффициентов связности

$$\Gamma^k{}_{k_1k_2} = \mathbf{N}^k \cdot \frac{D\mathbf{n}_{k_1}}{\partial x^{k_2}} \,. \tag{91}$$

На основании изложенного для второго искривленного дифференциала от вектора представления $\mathbf{y}$ получаем

$$D_2D_1\mathbf{y} = \mathbf{n}_k \cdot (d_2d_1x^k + \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot d_1x^{k_1} \cdot d_2x^{k_2}) \,. \tag{92}$$

В частном случае, когда координаты x^k являются независимыми, то есть $d_2d_1x^k = 0$, имеем

$$D_2D_1\mathbf{y} = \mathbf{n}_k \cdot \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot d_1x^{k_1} \cdot d_2x^{k_2} \,.$$

Напомним, что в геометрии Римана коэффициенты связности полагаются симметричными по нижним индексам

$$\Gamma^k{}_{k_1k_2} = \Gamma^k{}_{\langle k_1k_2\rangle} \,.$$

2. Третий искривленный дифференциал от вектора представления $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} D_3D_2D_1\mathbf{y} &= D_3\mathbf{n}_k \cdot (d_2d_1x^k + \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot d_1x^{k_1} \cdot d_2x^{k_2}) + \\ &+\mathbf{n}_k \cdot (d_3d_2d_1x^k + D_3\Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot d_1x^{k_1} \cdot d_2x^{k_2} + \\ &+\Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot d_3d_1x^{k_1} \cdot d_2x^{k_2} + \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot d_1x^{k_1} \cdot d_3d_2x^{k_2}) \,. \end{aligned}$$

В соответствии с правилом (89)

$$D_3\Gamma^k{}_{k_1k_2} = \frac{\partial\Gamma^k{}_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} d_3x^{k_3} \,.$$

Используя это соотношение и соотношение (90), после группировки слагаемых получим

$$\begin{aligned} D_3D_2D_1\mathbf{y} &= \mathbf{n}_k \cdot (d_3d_2d_1x^k + \\ &+\Gamma^k{}_{k_1k_2}(d_3d_1x^{k_1}\cdot d_2x^{k_2} + d_1x^{k_1}\cdot d_3d_2x^{k_2} + d_2d_1x^{k_1}\cdot d_3x^{k_2}) + \\ &+ \left(\frac{\partial\Gamma^k{}_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \Gamma^k{}_{k_4k_3}\cdot\Gamma^{k_4}{}_{k_1k_2}\right)\cdot d_1x^{k_1}\cdot d_2x^{k_2}\cdot d_3x^{k_3}) \,. \end{aligned} \tag{93}$$

Выражение в скобках представляет собой объект кривизны

$$R^k{}_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial\Gamma^k{}_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \Gamma^k{}_{k_4k_3}\cdot\Gamma^{k_4}{}_{k_1k_2} \,.$$

[13] Далее покажем, что введенные таким образом коэффициенты связности совпадают с теми, которые введены в Разделе II.2 Главы 2.2.

В частном случае, когда координаты x^k являются независимыми, то есть $d_2d_1x^k = 0$, имеем

$$D_3D_2D_1\mathbf{y} = \mathbf{n}_k \cdot R^k{}_{k_1k_2k_3} \cdot d_1x^{k_1} \cdot d_2x^{k_2} \cdot d_3x^{k_3} \,.$$

Заметим, что в геометрии Римана в силу симметрии коэффициентов связности по нижним индексам объект кривизны симметричен по индексам k_1 и k_2

$$R^k{}_{k_1k_2k_3} = R^k{}_{\langle k_1k_2\rangle k_3} \,.$$

Отсюда следует, что для геометрии Римана при независимых координатах x^k выполняется соотношение

$$D_3[D_2D_1]\mathbf{y} = 0 \,. \tag{94}$$

Антисимметризация искривленных дифференциалов D_3 и D_2 в выражении (93) приводит к соотношению

$$[D_3D_2]D_1\mathbf{y} = \mathbf{n}_k \cdot R^k{}_{k_1[k_2k_3]}\cdot d_1x^{k_1}\cdot d_2x^{k_2}\cdot d_3x^{k_3} \,,$$

где выражение

$$\begin{aligned} R^k{}_{k_1[k_2k_3]} &= \frac{\partial\Gamma^k{}_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} - \frac{\partial\Gamma^k{}_{k_1k_3}}{\partial x^{k_2}} + \\ &+\Gamma^k{}_{k_4k_3}\cdot\Gamma^{k_4}{}_{k_1k_2} - \Gamma^k{}_{k_4k_2}\cdot\Gamma^{k_4}{}_{k_1k_3} \end{aligned}$$

представляет собой тензор кривизны.

Тождество Якоби[14]

$$\overrightarrow{[[D_3D_2]D_1]} \equiv 0 \,. \tag{95}$$

приводит к первому тождеству Бианки для геометрии Римана[15]

$$R^i{}_{i_1[i_2i_3]} + R^i{}_{i_2[i_3i_1]} + R^i{}_{i_3[i_1i_2]} \equiv 0 \,.$$

3. Искривленное дифференцирование коэффициентов линейного преобразования $l^i{}_k$.

Коэффициенты линейного преобразования $l^i{}_k$ принадлежат как пространству системы отсчета X, так и пространству представления X'. Поэтому на них не распространяется правило дифференцирования (89). Имея это в виду, запишем второе соотношение в (88) в следующем виде:

$$D\mathbf{n}_{k_1} = \mathbf{e}_i \cdot Dl^i{}_{k_1} = \mathbf{e}_{k_3} \cdot \tilde{l}^{k_3}{}_i \cdot Dl^i{}_{k_1} \,, \tag{96}$$

где матрица $\tilde{l}^{k_3}{}_i$ является обратной по отношению к матрице $l^i{}_{k_1}$, то есть для нее выполняется соотношение

$$\tilde{l}^{k_3}{}_i \cdot l^i{}_{k_1} = \delta^{k_3}{}_{k_1} \,.$$

[14] См. формулу (143) Главы 2.2.

[15] При выводе необходимо учесть, что в соответствии с соотношением (94)

$$D_1[D_3D_2]\mathbf{y} = D_2[D_1D_3]\mathbf{y} = D_3[D_2D_1]\mathbf{y} = 0 \,.$$

Подставляя (96) в (91), получим выражение коэффициентов связности через коэффициенты линейного преобразования $l^i{}_k$

$$\Gamma^k{}_{k_1k_2} = \tilde{l}^k{}_i \cdot \frac{Dl^i{}_{k_1}}{\partial x^{k_2}} \,. \tag{97}$$

4. Искривленное дифференцирование метрического тензора пространства представления

$$g_{k_1k_2} = \mathbf{n}_{k_1} \cdot \mathbf{n}_{k_2} \,.$$

Имеем

$$Dg_{k_1k_2} = D\mathbf{n}_{k_1} \cdot \mathbf{n}_{k_2} + \mathbf{n}_{k_1} \cdot D\mathbf{n}_{k_2} \,.$$

Используя правило (89) и соотношение (90), получим

$$dg_{k_1k_2} = g_{kk_2} \cdot \Gamma^k{}_{k_1k_3} dx^{k_3} + g_{k_1k} \cdot \Gamma^k{}_{k_2k_3} dx^{k_3} \,. \tag{98}$$

Отсюда получим выражение для производной от метрического тензора

$$\frac{\partial g_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} = g_{kk_2} \cdot \Gamma^k{}_{k_1k_3} + g_{k_1k} \cdot \Gamma^k{}_{k_2k_3}$$

– соотношение применяемое в геометрии Римана. Учитывая, что в геометрии Римана коэффициенты связности симметричны по нижним индексам, из этого соотношения следует выражение коэффициентов связности через метрический тензор, используемое в геометрии Римана и теории гравитации Эйнштейна

$$\Gamma^k{}_{k_1k_2} = \frac{1}{2}\, g^{kk_3} \left(\frac{\partial g_{k_3k_1}}{\partial x^{k_2}} + \frac{\partial g_{k_2k_3}}{\partial x^{k_1}} - \frac{\partial g_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} \right) \,.$$

4. Искривленное дифференцирование контравариантного вектора пространства представления

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}_k \cdot A^k \,.$$

Имеем

$$D\mathbf{A} = D\mathbf{n}_{k1} \cdot A^{k1} + \mathbf{n}_k \cdot DA^k \,.$$

Используя правило (89) и соотношение (90), получим

$$D\mathbf{A} = \mathbf{n}_k \cdot (dA^k + \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot A^{k_1} \cdot dx^{k_2}) \,. \tag{99}$$

Отсюда получим искривленную производную от контравариантного вектора пространства представления

$$\frac{D\mathbf{A}}{\partial x^{k_2}} = \mathbf{n}_k \cdot \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^{k_2}} + \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot A^{k_1} \right) \,.$$

5. Искривленное дифференцирование ковариантного вектора пространства представления

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{N}^k \cdot A_k \,. \tag{100}$$

Предварительно вычислим искривленный дифференциал от базисных векторов $\mathbf{N}^k$. Для этого продифференцируем скалярное произведение

$$\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{N}^{k_1} = \delta^{k_1}{}_k \,.$$

Получим[16]

$$D\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{N}^{k_1} + \mathbf{n}_k \cdot D\mathbf{N}^{k_1} = 0 \,.$$

Используя выражение (90), получим

$$\mathbf{n}_k \cdot D\mathbf{N}^{k_1} = -\Gamma^{k_1}{}_{kk_2} \cdot dx^{k_2} \,.$$

Отсюда получим искомое выражение

$$D\mathbf{N}^{k_1} = -\mathbf{N}^k \cdot \Gamma^{k_1}{}_{kk_2} \cdot dx^{k_2} \,. \tag{101}$$

Теперь рассмотрим искривленный дифференциал от ковариантного вектора (100). Имеем

$$D\mathbf{A}^* = D\mathbf{N}^{k_1} \cdot A_{k_1} + \mathbf{N}^k \cdot DA_k \,.$$

Используя правило (89) и соотношение (101), получим

$$D\mathbf{A}^* = \mathbf{N}^k \cdot (dA_k - \Gamma^{k_1}{}_{kk_2} \cdot A_{k_1} \cdot dx^{k_2}) \,. \tag{102}$$

Отсюда получим искривленную производную от ковариантного вектора пространства представления

$$\frac{D\mathbf{A}^*}{\partial x^{k_2}} = \mathbf{N}^k \cdot \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^{k_2}} - \Gamma^{k_1}{}_{kk_2} \cdot A_{k_1} \right) \,.$$

Аналогичным образом выполняется искривленное дифференцирование тензоров пространства представления произвольного ранга.

2. Правила и примеры абсолютного дифференцирования

Для абсолютного дифференцирования объектов пространства представления имеют место следующие правила:

1. Абсолютное дифференцирование относится только к координатам тензоров пространства представления. При этом, в отличие от искривленного дифференцирования, абсолютный дифференциал не сводится к обычному дифференциалу, а

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix}\text{координаты}\\ \text{тензора}\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix}\text{координаты}\\ \text{тензора}\end{pmatrix} + \delta_a\begin{pmatrix}\text{координаты}\\ \text{тензора}\end{pmatrix} . \tag{103}$$

---

[16] При этом учтено, что согласно правилу (89)

$$D\delta^{k_1}{}_k = d\delta^{k_1}{}_k = 0 \,.$$

Например, для координат контравариантного вектора A^k имеем

$$\mathcal{D}A^k = dA^k + \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot A^{k_1} \cdot dx^{k_2}\,.$$

Отсюда следует, что для координат контравариантного вектора A^k

$$\delta_a A^k = \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot A^{k_1} \cdot dx^{k_2}\,.$$

В частности для координат dx^k имеем

$$\mathcal{D}_2 d_1 x^k = d_2 d_1 x^k + \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot d_1 x^{k_1} \cdot d_2 x^{k_2}\,. \qquad (104)$$

Другой пример. Для координат ковариантного вектора A_k имеем

$$\mathcal{D}A_k = dA_k - \Gamma^{k_1}{}_{kk_2} \cdot A_{k_1} \cdot dx^{k_2}\,.$$

Отсюда следует, что для координат ковариантного вектора A_k

$$\delta_a A_k = -\Gamma^{k_1}{}_{kk_2} \cdot A_{k_1} \cdot dx^{k_2}\,.$$

2. Абсолютный дифференциал от метрического тензора пространства представления равен нулю[17]

$$\mathcal{D}g_{k_1k_2} = 0\,, \qquad \mathcal{D}g^{k_1k_2} = 0\,. \qquad (105)$$

Отсюда, в частности, следует, что правила абсолютного дифференцирования и правила искривленного дифференцирования приводят к одному и тому же выражению для дифференциала от метрического тензора (98).

Из правила (103) следует, что выражения (99) и (102) могут быть обобщены так:

$$D(\text{тензор}) = \begin{pmatrix}\text{базисные векторы}\\ \text{тензора}\end{pmatrix} \cdot \mathcal{D}\begin{pmatrix}\text{координаты}\\ \text{тензора}\end{pmatrix}. \qquad (106)$$

Например, из (92) и (104) следует

$$D_2 D_1 \mathbf{y} = \mathbf{n}_k \cdot \mathcal{D}_2 d_1 x^k\,,$$

что соответствует правилу (106).

Для другого примера вычислим выражение

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3\mathcal{D}_2 d_1 x^k &= d_3(\mathcal{D}_2 d_1 x^k) + \Gamma^k{}_{k_1k_3} \cdot (\mathcal{D}_2 d_1 x^{k_1}) \cdot d_3 x^{k_3} = \\ &= d_3(d_2 d_1 x^k + \Gamma^k{}_{k_1k_2} \cdot d_1 x^{k_1} \cdot d_2 x^{k_2}) + \\ &+ \Gamma^k{}_{k_4k_3} \cdot (d_2 d_1 x^{k_4} + \Gamma^{k_4}{}_{k_1k_2} \cdot d_1 x^{k_1} \cdot d_2 x^{k_2}) \cdot d_3 x^{k_3} = \\ &= d_3 d_2 k_2 d_1 x^k + \\ &+ \Gamma^k{}_{k_1k_2}(d_3 d_1 x^{k_1} \cdot d_2 x^{k_2} + d_1 x^{k_1} \cdot d_3 d_2 x^{k_2} + d_2 d_1 x^{k_1} \cdot d_3 x^{k_2}) + \\ &+ \left(\frac{\partial \Gamma^k{}_{k_1k_2}}{\partial x^{k_3}} + \Gamma^k{}_{k_4k_3} \cdot \Gamma^{k_4}{}_{k_1k_2}\right) \cdot d_1 x^{k_1} \cdot d_2 x^{k_2} \cdot d_3 x^{k_3}\,.\end{aligned}$$

[17] Из этого правила также следует, что

$$\mathcal{D}\delta^{k_1}{}_k = 0\,.$$

Сравнивая это выражение с (93), получим

$$D_3 D_2 D_1 \mathbf{y} = \mathbf{n}_k \cdot \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_2 d_1 x^k\,,$$

что соответствует правилу (106).

Таким образом, искривленное дифференцирование и абсолютное дифференцирование имеют разный смысл и подчиняются разным правилам, но при вычислении дифференциалов координат тензоров приводят к одинаковым результатам.

X. ГРУППА СДВИГОВ G_y КАК ГРУППА ЛИ В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

На точках пространства системы отсчета X действует группа сдвигов G_x. Закон композиции этой группы можно записать через сложение векторов системы отсчета

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\,. \qquad (107)$$

В свою очередь, на точках искривленного пространства Y действует группа сдвигов G_y. Закон композиции этой группы можно записать через сложение векторов искривленного пространства

$$\mathbf{y} = \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2\,. \qquad (108)$$

Векторам $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$, входящим в указанный закон композиции, можно поставить в соответствие векторы системы отсчета[18]

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{Y}\,, \quad \mathbf{x}_1 \sim \mathcal{Y}_1\,, \quad \mathbf{x}_2 \sim \mathcal{Y}_2$$

и считать, что закону композиции (108) соответствует закон композиции, позволяющий по двум векторам $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ определять вектор $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\,. \qquad (109)$$

Нулевому вектору в Y соответствует нулевой вектор в X

$$0_y \sim 0_x\,.$$

Для них

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_1 + 0_y \sim \mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_1, 0_x)\,,\\ \mathcal{Y}_1 = 0_y + \mathcal{Y}_1 \sim \mathbf{x}_1 = f(0_x, \mathbf{x}_1)\,.\end{aligned}$$

Обратному вектору в Y соответствует обратный вектор в X

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_1 + (-\mathcal{Y}_1) = 0_y \sim f(\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_1) = 0_x\,,\\ -\mathcal{Y}_1 \sim -\mathbf{x}_1\,.\end{aligned}$$

[18] Несмотря на одинаковые обозначения, эти векторы отличны от тех, которые входят в закон сложения (107).

Ассоциативности сложения в Y соответствует ассоциативность закона композиции (109) в X:

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2) + \mathcal{Y}_3 = \mathcal{Y}_1 + (\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_3) \sim$$
$$\mathbf{x} = f(f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \mathbf{x}_3) = f(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3))\,.$$

Таким образом, закон композиции (109) определяет группу в системе отсчета X. Обозначим эту группу G. Эта группа представляет группу сдвигов G_y искривленного пространства в системе отсчета. Так как элементами группы G являются векторы в X, которые, кроме того, подчиняются закону сложения векторов (107), то группа G является группой Ли.

Важно отметить следующее. Так как точки пространства системы отсчета и искривленного пространства совпадают, законы композиции (107) и (109) относятся к одной и той же точке. При переходе к другой точке закон композиции (107) остается прежним, закон композиции (109) меняется, так как меняются соответствующие векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$. Иначе говоря, искривленное пространство само по себе является однородным, а представляющее его пространство, напротив, неоднородно.

Дифференциал вектора $\mathbf{x}$, соответствующий закону сложения (107), обозначим $d\mathbf{x}$. Дифференциал этого же вектора, соответствующий закону композиции (109), обозначим $D\mathbf{x}$ и отождествим его с искривленным дифференциалом, введенным в Разделе 4.1. Связь между дифференциалами $d\mathbf{x}$ и $D\mathbf{x}$ найдем из условия

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}, D\mathbf{x})\,.$$

Вычитая отсюда

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{x}, 0_x)\,,$$

получим

$$d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}, D\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}, 0_x)\,.$$

В правой части этого соотношения выделим главную (линейную) часть относительно $D\mathbf{x}$ и запишем соотношение в следующем виде:

$$d\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{l}} \circ D\mathbf{x}\,.$$

Отсюда получим соотношение

$$D\mathbf{x} = \mathbf{l} \circ d\mathbf{x}\,,$$

которое в соответствии с нашим допущением совпадает с выражением (6).

XI. ИСКРИВЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ И ГЕОМЕТРИЯ КЛЕЙНА

Общность геометрии Римана, лежащей в основе теории гравитации Эйнштейна, достигается ценой отказа от соотношений

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \cdot dx^i\,, \quad dx^2 = (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})\,, \quad g_{ik} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)\,,$$

имеющих место в геометрии Евклида, то есть ценой отказа от направленных измерений в пространстве-времени. Иначе говоря, геометрия Римана не допускает введения эталонов длины и времени, а в качестве измеряемой величины принимает линейный элемент[19]

$$dx = \sqrt{g_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k}\,.$$

Эта особенность геометрии Римана приводит к трудностям в теории гравитации, связанным с измерением компонент импульса и энергии. Кроме того, положение, когда отсутствуют измерительные эталоны времени и длины, с физической точки зрения само по себе представляется неудовлетворительным.

Все это заставляет отказаться от геометрии Римана как основы теории гравитации и искать геометрию не менее общую, но допускающую введение в теорию линеек и часов. Ввести в геометрию понятие направления математически означает ввести группу, описывающую направленные движения в пространстве, а это наводит на мысль, что искомая геометрия должна подчиняться идее Ф.Клейна: она должна быть следствием действия группы на множество точек пространства. Соображения предыдущего Раздела позволяют рассматривать искривленное пространство как пространство Клейна, фундаментальной группой которого является группа Ли G, действующая на векторах системы отсчета и представляющая группу сдвигов G_y искривленного пространства. Геометрия Клейна, очевидно, должна быть ковариантна относительно фундаментальной группы[20]. Поэтому, если теорию гравитации строить на геометрии Клейна, то необходимо отказаться от идеи *общей ковариантности*, которая, согласно Эйнштейну, состоит в инвариантности теории гравитации относительно преобразований координат точек пространства Римана

$$x'^i = f^i(x^k)\,.$$

А так как в геометрии Римана преобразование точек пространства не отделимо от преобразования числового обозначения точек (преобразования системы координат), то использование идеи общей ковариантности неудовлетворительно и с этой точки зрения.

В заключение заметим, что изложенная теория искривленного пространства включает в себя и уточняет все соотношения геометрии Римана.

XII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Линейный элемент и метрический тензор, полученные для искривленного пространства, совпа-

---

[19] Отсюда следует инвариантность теории гравитации Эйнштейна относительно конформных преобразований.

[20] Ковариантность геометрии относительно фундаментальной группы означает инвариантность соотношений геометрии при преобразованиях этой группы.

дают с теми, которые используются в тетрадной формулировке теории гравитации.

- Подход к искривленному пространству как векторному пространству приводит к новому взгляду на коэффициенты связности. А именно, в основе этих коэффициентов и всей структуры искривленного пространства лежит группа линейных преобразований.

- Равенство нулю абсолютной производной от метрического тензора противоречит подходу к искривленному пространству как векторному пространству со скалярным произведением векторов. Поэтому, отказываясь от геометрии Римана как основы теории гравитации, необходимо отказаться и от этого равенства.

- Коэффициенты связности не определяются через метрический тензор, а представляют собой самостоятельные независимые переменные.

- Один из вопросов, который нужно решить при построении теории гравитации, основанной на искривленном пространстве, состоит в том, чтобы определить подгруппу группы линейных преобразований, ответственную за гравитационное взаимодействие.

XIII. ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

$$R^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{kl,m} - \Gamma^i{}_{km,l} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{km} \,.$$

Разделим коэффициенты связности на симметричную и антисимметричную части и запишем последовательно слагаемые в правой части

$$\Gamma^i{}_{kl,m} = \Gamma^i{}_{<kl>,m} + \Gamma^i{}_{[kl],m} \,,$$
$$-\Gamma^i{}_{km,l} = -\Gamma^i{}_{<km>,l} - \Gamma^i{}_{km,l} \,,$$

$$\begin{aligned}\Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{kl} &= (\Gamma^i{}_{<nm>} + \Gamma^i{}_{[nm]})\Gamma^n{}_{<kl>}\Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} = \\ &= \Gamma^i{}_{<nm>} \cdot \Gamma^n{}_{<kl>} + \Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{kl} - \\ &\quad -\Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} \,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{km} &= -(\Gamma^i{}_{<nl>} + \Gamma^i{}_{[nl]})\Gamma^n{}_{<km>} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} = \\ &= -\Gamma^i{}_{<nl>} \cdot \Gamma^n{}_{<km>} - \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{km} + \\ &\quad +\Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} - \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} \,,\end{aligned}$$

Учтем, что

$$\Gamma^i{}_{[kl];m} = \Gamma^i{}_{[kl],m} + \Gamma^i{}_{nm} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} - \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{km} - \Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{lm}$$

и

$$\begin{aligned}-\Gamma^i{}_{[km];l} = -\Gamma^i{}_{[km],l} - \Gamma^i{}_{nl} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} + \\ +\Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{kl} + \Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{ml} \,.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что тензор кривизны можно записать так:

$$R^i{}_{k[lm]} = B^i{}_{k[lm]} + \Omega^i{}_{k[lm]} \,,$$

где

$$\begin{aligned}B^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{<kl>,m} - \Gamma^i{}_{<km>,l} + \\ +\Gamma^i{}_{<nm>} \cdot \Gamma^n{}_{<kl>} - \Gamma^i{}_{<nl>} \cdot \Gamma^n{}_{<km>} \,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega^i{}_{k[lm]} = \Gamma^i{}_{[kl];m} - \Gamma^i{}_{[km];l} + \Gamma^i{}_{[nl]} \cdot \Gamma^n{}_{[km]} - \\ -\Gamma^i{}_{[nm]} \cdot \Gamma^n{}_{[kl]} + 2\Gamma^i{}_{[kn]} \cdot \Gamma^n{}_{[lm]} \,.\end{aligned}$$

XIV. ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВЫВОД ВТОРОГО ТОЖДЕСТВА БИАНКИ

Исходим из тождества Якоби

$$\begin{aligned}&(X_n \wedge X_m)X_l(\mathbf{n}_k) + (X_m \wedge X_l)X_n(\mathbf{n}_k) + \\ &+(X_l \wedge X_n)X_m(\mathbf{n}_k) - X_l(X_n \wedge X_m)(\mathbf{n}_k) - \\ &-X_n(X_m \wedge X_l)(\mathbf{n}_k) - X_m(X_l \wedge X_n)(\mathbf{n}_k) = 0 \,.\end{aligned}$$

Используя соотношения (58) и (60), получим

$$\begin{aligned}(X_n \wedge X_m)(\mathbf{n}_p \cdot \Gamma^p{}_{kl}) + (X_m \wedge X_l)(\mathbf{n}_p \cdot \Gamma^p{}_{kn}) + \\ +(X_l \wedge X_n)(\mathbf{n}_p \cdot \Gamma^p{}_{km}) - X_l(\mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{k[mn]}) - \\ -X_n(\mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{k[lm]}) - X_m(\mathbf{n}_i \cdot R^i{}_{k[nl]}) = 0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(X_n \wedge X_m)(\mathbf{n}_p) \cdot \Gamma^p{}_{kl} + (X_m \wedge X_l)(\mathbf{n}_p) \cdot \Gamma^p{}_{kn} + \\ +(X_l \wedge X_n)(\mathbf{n}_p) \cdot \Gamma^p{}_{km} - \mathbf{n}_p \cdot (X_n \wedge X_m)(\Gamma^p{}_{kl}) + \\ +\mathbf{n}_p \cdot (X_m \wedge X_l)(\Gamma^p{}_{kn}) + \mathbf{n}_p \cdot (X_l \wedge X_n)(\Gamma^p{}_{km}) - \\ -X_l(\mathbf{n}_i) \cdot R^i{}_{k[mn]} - X_n(\mathbf{n}_i) \cdot R^i{}_{k[lm]} - \\ -X_m(\mathbf{n}_i) \cdot R^i{}_{k[nl]} - \mathbf{n}_i \cdot X_l(R^i{}_{k[mn]}) - \\ -\mathbf{n}_i \cdot X_n(R^i{}_{k[lm]}) - \mathbf{n}_i \cdot X_m(R^i{}_{k[nl]}) = 0 \,.\end{aligned}$$

Далее учтем выражения (59) и (58), и кроме того, что в геометрии Римана выражения вида, указанного ниже, равны нулю:

$$(X_n \wedge X_m)(\Gamma^p{}_{kl}) = 0 \,,$$

так как по отношению к $\Gamma^p{}_{kl}$ оператор $(X_n \wedge X_m)$ означает

$$\frac{\partial^2}{\partial x^n \partial x^m} - \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial x^n} \,,$$

а также выражения вида $X_l(R^i{}_{k[mn]})$ означают частное дифференцирование $R^i{}_{k[mn]}$ по x^l:

$$X_l(R^i{}_{k[mn]}) = \frac{\partial R^i{}_{k[mn]}}{\partial x^l} = R^i{}_{k[mn],l}\,.$$

Получим:

$$\begin{aligned} R^i{}_{p[mn]} \cdot \Gamma^p{}_{kl} + R^i{}_{p[lm]} \cdot \Gamma^p{}_{kn} + R^i{}_{p[nl]} \cdot \Gamma^p{}_{km} - \\ -\Gamma^i{}_{pl} \cdot R^p{}_{k[mn]} - \Gamma^i{}_{pn} \cdot R^p{}_{k[lm]} - \Gamma^i{}_{pm} \cdot R^p{}_{k[nl]} - \\ -R^i{}_{k[mn],l} - R^i{}_{k[lm],n} - R^i{}_{k[nl],m} = 0\,. \end{aligned} \tag{110}$$

Далее воспользуемся следующим тождеством:

$$\begin{aligned} R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{<ln>} + R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{<nm>} + \\ +R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{<ml>} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{<mn>} + \\ +R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{<lm>} + R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{<nl>} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{ln} + R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{nm} + R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{ml} + \\ & +R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{mn} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{lm} + R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{nl} - \\ & -R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{[ln]} - R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{[nm]} - R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{[ml]} - \\ & -R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} - R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]} - R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{ln} + R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{nm} + R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{ml} + \\ & +R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{mn} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{lm} + R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{nl} - \\ & -2(R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]}) = 0\,. \end{aligned}$$

Сложим это тождество с тождеством Бианки (110):

$$\begin{aligned} & -R^i{}_{k[lm],n} - R^i{}_{k[nl],m} - R^i{}_{k[mn],l} - \\ & -\Gamma^i{}_{pn} \cdot R^p{}_{k[lm]} - \Gamma^i{}_{pm} \cdot R^p{}_{k[nl]} - \Gamma^i{}_{pl} \cdot R^p{}_{k[mn]} + \\ & +R^i{}_{p[lm]} \cdot \Gamma^p{}_{kn} + R^i{}_{p[nl]} \cdot \Gamma^p{}_{km} + R^i{}_{p[mn]} \cdot \Gamma^p{}_{kl} + \\ & +R^i{}_{k[pm]} \cdot \Gamma^p{}_{ln} + R^i{}_{k[pl]} \cdot \Gamma^p{}_{nm} + R^i{}_{k[pn]} \cdot \Gamma^p{}_{ml} + \\ & +R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{mn} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{lm} + R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{nl} - \\ & -2(R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]}) = 0\,. \end{aligned}$$

В результате получим второе тождество Бианки в следующем виде:

$$\begin{aligned} & R^i{}_{k[lm];n} + R^i{}_{k[nl];m} + R^i{}_{k[mn];l} + \\ & +2(R^i{}_{k[mp]} \cdot \Gamma^p{}_{[nl]} + R^i{}_{k[lp]} \cdot \Gamma^p{}_{[mn]} + R^i{}_{k[np]} \cdot \Gamma^p{}_{[lm]}) = 0\,. \end{aligned}$$

Глава 2.4 Искривленное пространство-время как универсальная алгебра

I. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК ИСКРИВЛЕННАЯ ТЕНЗОРНАЯ КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА

1. Образующее пространство

Четырехмерное искривленное пространство Y является исходным при построении тензорной контравариантной алгебры искривленного пространства-времени. В этом смысле векторное пространство Y называется *образующим* пространством тензорной контравариантной алгебры искривленного пространства-времени. Соответственно базисные векторы пространства Y называются *образующими* базисных векторов тензорной алгебры.

Здесь прежде всего важно, что искривленное пространство Y является четырехмерным векторным пространством. Вектор этого пространства $\mathcal{Y}$ записывается через базисные векторы следующим образом:

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_i \cdot y^i \,.$$

Здесь индекс i принимает значения 1, 2, 3, 4. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ – это базисные векторы геометрического искривленного пространства, а $\mathfrak{e}_4$ – базисный вектор искривленного времени.

Здесь и далее вектор $\mathcal{Y}$ и координаты вектора y^i считаются безразмерными. Базисные векторы – это безразмерные величины, определяющие только *направление* вектора.

2. Тензорное произведение двух векторов образующего пространства

Тензорное произведение векторов $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \,.$$

Билинейное отображение векторов $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ *общего вида*[1] запишем следующим образом:

$$F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2)\,.$$

[1] Напомним, что отображение F является *билинейным*, если оно подчиняется соотношениям

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{A},\, \mathcal{Y}_2) &= F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2) + F(\mathcal{A},\, \mathcal{Y}_2)\,,\\
F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2 + \mathcal{B}) &= F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2) + F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{B})\,,\\
F(\alpha \cdot \mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2) &= \alpha \cdot F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2)\,,\\
F(\mathcal{Y}_1,\, \alpha \cdot \mathcal{Y}_2) &= \alpha \cdot F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2)\,,
\end{aligned}$$

где $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

По определению тензорное произведение двух векторов отождествляется с билинейным отображением этих векторов общего вида

$$\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \equiv F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2)\,.$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что билинейное отображение в конкретное векторное пространство, например

$$G(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2)\,,$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2) = L(\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2)\,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$\begin{aligned}
&F(\mathcal{Y}_1\,,\ \mathcal{Y}_2) = F(\mathfrak{e}_{i_1}\, {y_1}^{i_1}\,,\ \mathfrak{e}_{i_2}\, {y_2}^{i_2}) = \\
&= F(\mathfrak{e}_{i_1}\,,\ \mathfrak{e}_{i_2})\, {y_1}^{i_1}\, {y_2}^{i_2}\,.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 = F(\mathfrak{e}_{i_1}\,,\ \mathfrak{e}_{i_2})\, {y_1}^{i_1}\, {y_2}^{i_2}\,.$$

Отсюда следует, что тензорное произведение двух векторов можно рассматривать как вектор, принадлежащий множеству векторов вида

$$\overset{2}{\mathcal{Y}} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2} \cdot y^{i_1 i_2}\,.$$

Здесь

$$\mathfrak{e}_{i_1 i_2} = \mathfrak{e}_{i_1} \otimes \mathfrak{e}_{i_2} = F(\mathfrak{e}_{i_1}\,,\ \mathfrak{e}_{i_2})\,.$$

Указанное множество векторов называется тензорной степенью второго порядка пространства Y и обозначается

$$\overset{2}{\otimes}\, Y\,.$$

Векторы $\mathfrak{e}_{i_1 i_2}$ рассматриваются как базисные векторы в $\overset{2}{\otimes}\, Y$. Числа $y^{i_1 i_2}$ представляют собой координаты вектора $\overset{2}{\mathcal{Y}}$.

3. Тензорное произведение n векторов образующего пространства

Тензорное произведение n векторов $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$, $\ldots, \mathcal{Y}_n$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{Y}_n\,.$$

Полилинейное отображение общего вида n векторов $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$, $\ldots, \mathcal{Y}_n$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2, \ldots,\, \mathcal{Y}_n)\,.$$

По определению тензорное произведение n векторов отождествляется с полилинейным отображением общего вида этих векторов

$$\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{Y}_n \equiv F(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2, \ldots,\, \mathcal{Y}_n)\,.$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что полилинейное отображение в конкретное векторное пространство, например

$$G(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2, \ldots,\, \mathcal{Y}_n)\,,$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G(\mathcal{Y}_1,\, \mathcal{Y}_2, \ldots,\, \mathcal{Y}_n) = L(\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{Y}_n)\,.$$

Вследствие полилинейности можно записать

$$\begin{aligned}
&F(\mathcal{Y}_1\,,\ \mathcal{Y}_2, \ldots,\, \mathcal{Y}_n) = \\
&= F(\mathfrak{e}_{i_1}\, {y_1}^{i_1}\,,\ \mathfrak{e}_{i_2}\, {y_2}^{i_2}\,, \ldots,\ \mathfrak{e}_{i_n}\, {y_n}^{i_n}) = \\
&= F(\mathfrak{e}_{i_1}\,,\ \mathfrak{e}_{i_2}\,, \ldots,\ \mathfrak{e}_{i_n})\, {y_1}^{i_1}\, {y_2}^{i_2} \ldots {y_n}^{i_n}\,.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{Y}_n = \\
&= F(\mathfrak{e}_{i_1}\,,\ \mathfrak{e}_{i_2}\,, \ldots,\ \mathfrak{e}_{i_n})\, {y_1}^{i_1}\, {y_2}^{i_2} \ldots {y_n}^{i_n}\,.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что тензорное произведение n векторов можно рассматривать как вектор, принадлежащий множеству векторов вида

$$\overset{n}{\mathcal{Y}} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot y^{i_1 i_2 \ldots i_n}\,.$$

Здесь

$$\mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \mathfrak{e}_{i_1} \otimes \mathfrak{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{e}_{i_n} = F(\mathfrak{e}_{i_1}\,,\ \mathfrak{e}_{i_2}\,, \ldots,\ \mathfrak{e}_{i_n})\,.$$

Указанное множество векторов называется тензорной степенью n-го порядка пространства Y и обозначается

$$\overset{n}{\otimes}\, Y\,.$$

Векторы $\mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ рассматриваются как базисные векторы в $\overset{n}{\otimes}\, Y$. Числа $y^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ представляют собой координаты вектора $\overset{n}{\mathcal{Y}}$.

4. Искривленное пространство-время как тензорная контравариантная алгебра

Помимо пространств тензорных степеней порядка 2 и более введем пространство тензорной степени 0, полагая[2]

$$\overset{0}{\otimes}\, Y = \mathbb{R}\,,$$

и пространство тензорной степени 1, полагая

$$\overset{1}{\otimes}\, Y = Y\,.$$

Рассмотрим векторное пространство, представленное суммой всех тензорных степеней. Это пространство обозначим $\otimes Y$ и назовем *искривленным пространством контравариантных тензоров*. Таким образом,

$$\otimes Y\ = \overset{0}{\otimes}\, Y + \overset{1}{\otimes}\, Y + \overset{2}{\otimes}\, Y\ + \ldots$$

Пространство $\otimes Y$ является не только векторным пространством[3], но и алгеброй, в которой умножение векторов представлено тензорным умножением и умножением тензоров на число. Поэтому $\otimes Y$ называется также *искривленной тензорной контравариантной алгеброй.* Вектор искривленной тензорной контравариантной алгебры записывается следующим образом:

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_0 \cdot y^0 + \mathfrak{e}_{i_1} \cdot y^{i_1} + \mathfrak{e}_{i_1 i_2} \cdot y^{i_1 i_2} + \ldots\,.$$

Здесь $\mathfrak{e}_0$ – действительная единица. Этот вектор удобно записать, используя *собирательный* индекс

$$I \sim\ 0,\ i_1\,,\ i_1 i_2\,,\ i_1 i_2 i_3\,,\ \ldots\,,$$

обобщенный базисный вектор

$$\mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_0,\, \mathfrak{e}_{i_1},\, \mathfrak{e}_{i_1 i_2},\, \ldots$$

и обобщенные координаты

$$y^I = y^0,\, y^{i_1},\, y^{i_1 i_2},\, \ldots\,,$$

в компактном виде

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_I \cdot y^I\,.$$

---

[2] Напомним, что $\mathbb{R}$ – это множество действительных чисел.

[3] Отметим, что векторное пространство контравариантных тензоров бесконечномерно.

II. ИСКРИВЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ КАК УНИВЕРСАЛЬНАЯ КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА

Наряду с тензорным произведением векторов образующего пространства Y будем рассматривать *скалярное* и *векторное* произведения векторов.

1. Скалярное произведение векторов образующего пространства

Скалярное произведение векторов, которое будем записывать следующим образом:

$$\mathcal{Y}_1 \cdot \mathcal{Y}_2 \,,$$

– это билинейное отображение

$$F_0(\mathcal{Y}_1 \,,\ \mathcal{Y}_2)$$

векторов в множество действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{Y}_1 \cdot \mathcal{Y}_2 \equiv F_0(\mathcal{Y}_1 \,,\ \mathcal{Y}_2) \in \mathbb{R} \,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$\begin{aligned} &F_0(\mathcal{Y}_1 \,,\ \mathcal{Y}_2) = F_0(\mathfrak{e}_{i_1}\, {y_1}^{i_1} \,,\ \mathfrak{e}_{i_2}\, {y_2}^{i_2}) = \\ &= F_0(\mathfrak{e}_{i_1} \,,\ \mathfrak{e}_{i_2})\, {y_1}^{i_1}\, {i_2}^{i_2} \,. \end{aligned}$$

Числовая величина

$$G_{i_1 i_2} = \mathfrak{e}_{i_1} \cdot \mathfrak{e}_{i_2} \equiv F_0(\mathfrak{e}_{i_1} \,,\ \mathfrak{e}_{i_2})$$

называется *метрическим тензором.*

Попрежнему будем полагать, что скалярное произведение не зависит от порядка используемых сомножителей. Отсюда

$$G_{i_1 i_2} = G_{i_2 i_1} \,.$$

2. Векторное произведение векторов образующего пространства

Векторное произведение векторов образующего пространства, которое будем записывать следующим образом:

$$\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \,,$$

– это билинейное отображение

$$F_1(\mathcal{Y}_1 \,,\ \mathcal{Y}_2)$$

векторов $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ в векторное пространство Y:

$$\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \equiv F_1(\mathcal{Y}_1 \,,\ \mathcal{Y}_2) \in Y \,.$$

В силу билинейности

$$\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 = F_1(\mathfrak{e}_{i_1} \,,\ \mathfrak{e}_{i_2})\, {y_1}^{i_1}\, {y_2}^{i_2} \,.$$

Векторное произведение базисных векторов

$$\mathfrak{e}_{i_1} \times \mathfrak{e}_{i_2} = F_1(\mathfrak{e}_{i_1} \,,\ \mathfrak{e}_{i_2})$$

также является вектором образующего пространства Y. Поэтому

$$\mathfrak{e}_{i_1} \times \mathfrak{e}_{i_2} = \mathfrak{e}_i \cdot C^i_{\ i_1 i_2} \,,$$

где постоянные коэффициенты $C^i_{\ i_1 i_2}$ – это координаты вектора $\mathfrak{e}_{i_1} \times \mathfrak{e}_{i_2}$.

3. Универсальное произведение искривленных векторов. Искривленное пространство-время как универсальная контравариантная алгебра

Произведение двух векторов образующего пространства $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, составленное из скалярного, векторного и тензорного произведений, назовем *универсальным* и запишем следующим образом:

$$\mathcal{Y}_1 \circ \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_1 \cdot \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \,.$$

По отношению к базисным векторам универсальное произведение принимает вид

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_{i_1} \circ \mathfrak{e}_{i_2} = \mathfrak{e}_{i_1} \cdot \mathfrak{e}_{i_2} + \mathfrak{e}_{i_1} \times \mathfrak{e}_{i_2} + \mathfrak{e}_{i_1} \otimes \mathfrak{e}_{i_2} = \\ &= G_{i_1 i_2} + \mathfrak{e}_i \cdot C^i_{\ i_1 i_2} + \mathfrak{e}_{i_1 i_2} \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Алгебру, построенную на универсальном произведении, назовем *искривленной универсальной* контравариантной и будем обозначать $\mathbb{Y}$. Вектор искривленной универсальной контравариантной алгебры записывается так же, как вектор искривленной тензорной контравариантной алгебры

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_0 \cdot y^0 + \mathfrak{e}_{i_1} \cdot y^{i_1} + \mathfrak{e}_{i_1 i_2} \cdot y^{i_1 i_2} + \ldots \,.$$

Начиная с этого момента, будем рассматривать искривленную универсальную контравариантную алгебру $\mathbb{Y}$ как *обобщенное искривленное* пространство-время, обобщающее четырехмерное искривленное пространство-время Y. Определение *обобщенное* по отношению к $\mathbb{Y}$ для краткости будем в дальнейшем опускать.

III. ЛЕВАЯ И ПРАВАЯ ИСКРИВЛЕННЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОНТРАВАРИАНТНЫЕ АЛГЕБРЫ

Так же, как для искривленной тензорной алгебры $\otimes Y$, вектор искривленной универсальной контравариантной алгебры $\mathbb{Y}$

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_0 \cdot y^0 + \mathfrak{e}_{i_1} \cdot y^{i_1} + \mathfrak{e}_{i_1 i_2} \cdot y^{i_1 i_2} + \ldots \,. \tag{2}$$

удобно записать, используя обобщенный базисный вектор

$$\mathfrak{e}_I = \mathfrak{e}_0,\, \mathfrak{e}_{i_1},\, \mathfrak{e}_{i_1 i_2},\, \ldots$$

и обобщенные координаты

$$y^I = y^0,\, y^{i_1},\, y^{i_1 i_2},\, \ldots\,,$$

в компактном виде

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_I \cdot y^I\,.$$

Обратимся к умножению векторов. Пусть *сначала* рассматривается вектор $\mathcal{Y}_1$, а *затем* вектор $\mathcal{Y}_2$. С этой точки зрения вектор $\mathcal{Y}_1$ будем называть *начальным*, а вектор $\mathcal{Y}_2$ - *последующим*. Возможны два варианта умножения указанных векторов:

$$\mathcal{Y}_1 \circ \mathcal{Y}_2\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *справа*, и

$$\mathcal{Y}_2 \circ \mathcal{Y}_1\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *слева*. В общем случае умножение векторов некоммутативно, поэтому

$$\mathcal{Y}_1 \circ \mathcal{Y}_2 \neq \mathcal{Y}_2 \circ \mathcal{Y}_1\,.$$

Введем обозначение для правого произведения

$$_r\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \circ \mathcal{Y}_2\,. \tag{3}$$

Левое произведение соответственно запишем так:

$$_l\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_2 \circ \mathcal{Y}_1\,. \tag{4}$$

Алгебру, основанную на умножении (3), назовем *правой искривленной* и обозначим $_r\mathbb{Y}$.

Алгебру, основанную на умножении (4), назовем *левой искривленной* и обозначим $_l\mathbb{Y}$. Единицей алгебр является вектор, равный числовой единице.

Предыдущие построения повторим для умножения базисных векторов. Пусть базисные векторы $\mathfrak{e}_{I_1}$ являются начальными, а базисные векторы $\mathfrak{e}_{I_2}$ являются последующими. Тогда правое произведение базисных векторов запишем следующим образом:

$$\mathfrak{e}_{I_1} \circ \mathfrak{e}_{I_2} = \mathfrak{e}_I \cdot {_r C^I}_{I_1 I_2}\,, \tag{5}$$

где ${_r C^I}_{I_1 I_2}$ – *структурные постоянные* правой искривленной универсальной контравариантной алгебры $_r\mathbb{Y}$.

Левое произведение базисных векторов соответственно запишем следующим образом:

$$\mathfrak{e}_{I_2} \circ \mathfrak{e}_{I_1} = \mathfrak{e}_I \cdot {_l C^I}_{I_1 I_2}\,, \tag{6}$$

где ${_l C^I}_{I_1 I_2}$ – *структурные постоянные* левой искривленной универсальной контравариантной алгебры $_l\mathbb{Y}$.

Очевидно, что

$${_r C^I}_{I_1 I_2} = {_l C^I}_{I_2 I_1}\,. \tag{7}$$

Для того, чтобы не возникала путаница между формулами (5) и (6), удобно ввести разное обозначение для базисных векторов левой и правой алгебр соответственно[4]:

$$_l\mathfrak{e}_I \quad - \quad \text{левые базисные векторы}\,,$$
$$_r\mathfrak{e}_I \quad - \quad \text{правые базисные векторы}\,.$$

Тогда умножение левых базисных векторов задается структурными постоянными $_l C$

$$_l\mathfrak{e}_{I_2} \circ {_l\mathfrak{e}_{I_1}} = {_l\mathfrak{e}_I} \cdot {_l C^I}_{I_1 I_2}\,,$$

а умножение правых базисных векторов задается структурными постоянными $_r C$

$$_r\mathfrak{e}_{I_1} \circ {_r\mathfrak{e}_{I_2}} = {_r\mathfrak{e}_I} \cdot {_r C^I}_{I_1 I_2}\,.$$

Учитывая

$$\mathcal{Y}_1 = \mathfrak{e}_{I_1} \cdot y_1^{I_1}\,, \quad \mathcal{Y}_2 = \mathfrak{e}_{I_2} \cdot y_2^{I_1}\,,$$

равенства (5) и (6), из выражений (3) и (4) получим

$$_r y^I = {_r C^I}_{I_1 I_2} \cdot y_1^{I_1} \cdot y_2^{I_2} \tag{8}$$

и

$$_l y^I = {_l C^I}_{I_1 I_2} \cdot y_1^{I_1} \cdot y_2^{I_2}\,. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) задают умножение векторов по отношению к координатам векторов.

IV. ПОДАЛГЕБРЫ ИСКРИВЛЕННОЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ КОНТРАВАРИАНТНОЙ АЛГЕБРЫ

Из искривленной универсальной контравариантной алгебры $\mathbb{Y}$ выделим подалгебру, накладывая на произведение базисных векторов (1) следующие условия:

1) условие евклидовости, в которое включим два требования

а) при $k_1 = k_2$

$$\mathfrak{e}_{i_1} \circ \mathfrak{e}_{i_2} = \mathfrak{e}_{i_1} \cdot \mathfrak{e}_{i_2}\,,$$

причем

$$\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 = 1\,,\ \mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_2 = 1\,,\ \mathfrak{e}_3 \cdot \mathfrak{e}_3 = 1\,,\ \mathfrak{e}_4 \cdot \mathfrak{e}_4 = -1\,;$$

---

[4] Такое различие теряет смысл, когда умножение векторов и соответственно алгебраические свойства множеств векторов не рассматриваются.

б) при $k_1 \neq k_2$

$$\mathfrak{e}_{i_1} \circ \mathfrak{e}_{i_2} = \mathfrak{e}_{i_1} \otimes \mathfrak{e}_{i_2}\,;$$

2) условие соседней перестановки
при $i_1 \neq i_2$

$$\mathfrak{e}_{i_1} \circ \mathfrak{e}_{i_2} = \mathrm{sign}(i_1, i_2) \cdot \mathfrak{e}_{i_2} \circ \mathfrak{e}_{i_1}\,.$$

Здесь $\mathrm{sign}(i_1, i_2)$ – знак соседней перестановки, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов.[5]

Из вышеуказанных условий вытекает, что векторное произведение базисных векторов образующего пространства в подалгебре не рассматривается. Кроме того, из них следует, что произведение четного количества одинаковых базисных векторов образующего пространства сводится к базисному вектору $\mathfrak{e}_0$. Например,

$$\mathfrak{e}_{1111} = \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_0\,.$$

Совокупность подалгебр, снабженных умножением в соответствии с вышеуказанными условиями, назовем *алгеброй пространства-времени фундаментальных объектов.* Давая такое определение, исходим из постулата о том, что физическая реальность включает в себя *фундаментальные объекты*, примером которых служат фундаментальные частицы, а обобщенное пространство-время – это окружение, в котором существуют фундаментальные объекты.

1. Конечное число измерений искривленного пространства подалгебры

Условия соседней перестановки и евклидовости приводят к тому, что искривленное пространство подалгебры $\mathbb{Y}$ имеет конечное число измерений (конечное число базисных векторов). Для того, чтобы пояснить это, рассмотрим пространство тензоров порядка p – Y^p. Базисные векторы этого пространства имеют вид

$$\mathfrak{e}_{i_1} \circ \mathfrak{e}_{i_2} \circ \ldots \circ \mathfrak{e}_{i_p} = \mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,.$$

В левую часть этого выражения не могут входить два одинаковых образующих базисных вектора. Если такое имеет место, то с помощью условия соседней транспозиции и условия евклидовости такой базисный вектор может быть сведен к базисному вектору, в произведении которого одинаковые образующие базисные векторы отсутствуют, то есть, такой базисный вектор $\mathfrak{e}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ не является линейно независимым вектором и не является базисным вектором по определению.

Отсюда следует, что порядок p пространства тензоров Y^p не превышает число измерений образующего пространства n. А так как образующее пространство Y^1 – это четырехмерное искривленное пространство-время, то $p \leq 4$. Таким образом, в крайнем случае

$$\mathbb{Y} = Y^0 + Y^1 + Y^2 + Y^3 + Y^4\,.$$

Если число измерений образующего пространства Y^1 обозначить через n, то число измерений подалгебры искривленного пространства-времени равно

$$N = \dim \mathbb{Y} = 2^n.$$

В нашем случае образующее пространство – это четырехмерное искривленное пространство-время, то есть

$$\dim Y^1 = 4\,,$$

поэтому

$$\dim \mathbb{Y} = 2^4 = 16\,.$$

$$\dim Y^2 = 6\,, \quad \dim Y^3 = 4\,, \quad \dim Y^4 = 1\,.$$

Вектор искривленного пространства-времени (2) в нашем случае имеет вид

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_0\, y^0 + \mathfrak{e}_i\, y^i + \mathfrak{e}_{ij}\, y^{ij} + \mathfrak{e}_{ijk}\, y^{ijk} + \mathfrak{e}_{1324}\, y^{1324}\,.$$

Будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$I\,, J\,, K\,, L\,, \sim (0, i, ij, ijk\,, 1324),$$

$$\mathcal{Y} = \mathfrak{e}_I\, y^I\,.$$

2. Скалярное произведение. Метрический тензор

Условие соседней перестановки и условие евклидовости позволяют обобщить скалярное произведение в образующем пространстве до скалярного произведения в подалгебре $\mathbb{Y}$.

Для $I_1 = I_2$

$$\mathfrak{e}_{I_1} \circ \mathfrak{e}_{I_2} = \mathfrak{e}_{I_1} \cdot \mathfrak{e}_{I_2} = G_{I_1 I_2}\,.$$

Здесь $G_{I_1 I_2}$ – *метрический тензор* в подалгебре искривленного пространства-времени $\mathbb{Y}$. Указанное скалярное произведение определяется через скалярные произведения образующих базисных векторов. Очевидно, что определенный таким образом метрический тензор не зависит от порядка умножения базисных векторов, то есть

$$G_{K_1 K_2} = G_{K_2 K_1}\,.$$

[5] Конкретное значение $\mathrm{sign}(i_1, i_2)$ определяет подалгебру искривленной универсальной контравариантной алгебры пространства-времени.

Вместе с тем, скалярное умножение является частным случаем универсального умножения. Отсюда для правой искривленной универсальной подалгебры ${}_r\mathbb{Y}$ из (5) для $I_1 = I_2$ имеем

$$\mathfrak{e}_{I_1} \cdot \mathfrak{e}_{I_2} = \mathfrak{e}_0 \cdot {}_rC^0{}_{I_1 I_2}\,.$$

Отсюда

$$G_{I_1 I_2} = {}_rC^0{}_{I_1 I_2}\,.$$

Так же для левой искривленной универсальной подалгебры ${}_l\mathbb{Y}$ из (6) для $I_1 = I_2$ имеем

$$\mathfrak{e}_{I_2} \cdot \mathfrak{e}_{I_1} = \mathfrak{e}_0 \cdot {}_lC^0{}_{I_1 I_2}\,.$$

Отсюда

$$G_{I_1 I_2} = {}_lC^0{}_{I_1 I_2}\,.$$

Если учесть, что

$${}_rC^I{}_{I_1 I_2} = {}_lC^I{}_{I_2 I_1}\,,$$

получим: в правой и левой подалгебрах искривленного пространства-времени $\mathbb{Y}$ имеет место один и тот же метрический тензор.

Установим еще одну связь между метрическим тензором и структурными постоянными подалгебры. Для этого воспользуемся ассоциативностью умножения в правой подалгебре ${}_r\mathbb{Y}$ по отношению к базисным векторам

$$({}_r\mathfrak{e}_{I_1} \circ {}_r\mathfrak{e}_{I_2}) \circ {}_r\mathfrak{e}_{I_3} = {}_r\mathfrak{e}_{I_1} \circ ({}_r\mathfrak{e}_{I_2} \circ {}_r\mathfrak{e}_{I_3})\,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (5), получим

$${}_rC^I{}_{I_1 I_2}\,({}_r\mathfrak{e}_I \circ {}_r\mathfrak{e}_{I_3}) = ({}_r\mathfrak{e}_{I_1} \circ {}_r\mathfrak{e}_I)\;{}_rC^I{}_{I_2 I_3}\,.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (5), получим

$${}_rC^I{}_{I_1 I_2} \cdot {}_rC^{I_4}{}_{I I_3} = {}_rC^{I_4}{}_{I_1 I} \cdot {}_rC^I{}_{I_2 I_3}\,. \tag{10}$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам I_4 и I_1. Получим

$${}_rC^I{}_{I_1 I_2} \cdot {}_rC^{I_1}{}_{I I_3} = {}_rC^{I_1}{}_{I_1 I} \cdot {}_rC^I{}_{I_2 I_3}\,. \tag{11}$$

Так как произведение базисного вектора $\mathfrak{e}_I$ на базисный вектор, отличный от $\mathfrak{e}_0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^M{}_{L0}$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (11) имеет вид

$${}_rC^I{}_{I_1 I_2} \cdot {}_rC^{I_1}{}_{I I_3} = {}_rC^{I_1}{}_{I_1 0} \cdot {}_rC^0{}_{I_2 I_3}\,.$$

Отсюда получим

$$G_{I_2 I_3} = \frac{1}{N} \cdot {}_rC^I{}_{I_1 I_2} \cdot {}_rC^{I_1}{}_{I I_3}\,,$$

где N–число измерений подалгебры ${}_r\mathbb{Y}$.

Аналогичное соотношение получим для структурных постоянных левой подалгебы ${}_l\mathbb{Y}$. Для этого воспользуемся ассоциативностью умножения в левой подалгебре ${}_l\mathbb{Y}$ по отношению к базисным векторам

$$({}_l\mathfrak{e}_{I_1} \circ {}_l\mathfrak{e}_{I_2}) \circ {}_l\mathfrak{e}_{I_3} = {}_l\mathfrak{e}_{I_1} \circ ({}_l\mathfrak{e}_{I_2} \circ {}_l\mathfrak{e}_{I_3})\,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (6), получим

$${}_lC^I{}_{I_2 I_1}\,({}_l\mathfrak{e}_I \circ {}_l\mathfrak{e}_{I_3}) = ({}_l\mathfrak{e}_{I_1} \circ {}_l\mathfrak{e}_I)\;{}_lC^I{}_{I_3 I_2}\,.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (6), получим

$${}_lC^I{}_{I_2 I_1} \cdot {}_lC^{I_4}{}_{I_3 I} = {}_lC^{I_4}{}_{I I_1} \cdot {}_lC^I{}_{I_3 I_2}$$

или иначе

$${}_lC^{I_4}{}_{I I_1} \cdot {}_lC^I{}_{I_3 I_2} = {}_lC^{I_4}{}_{I_3 I} \cdot {}_lC^I{}_{I_2 I_1}\,. \tag{12}$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам I_4 и I_1. Получим

$${}_lC^{I_1}{}_{I I_1} \cdot {}_lC^I{}_{I_3 I_2} = {}_lC^{I_1}{}_{I_3 I} \cdot {}_lC^I{}_{I_2 I_1}\,. \tag{13}$$

Так как произведение базисного вектора $\mathfrak{e}_I$ на базисный вектор, отличный от $\mathfrak{e}_0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^M{}_{0L}$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (13) имеет вид

$${}_lC^{I_1}{}_{0 I_1} \cdot {}_lC^0{}_{I_3 I_2} = {}_lC^{I_1}{}_{I_3 I} \cdot {}_lC^I{}_{I_2 I_1}$$

Отсюда получим

$$G_{I_3 I_2} = \frac{1}{N} \cdot {}_lC^{I_1}{}_{I_3 I} \cdot {}_lC^I{}_{I_2 I_1}\,,$$

где N–число измерений подалгебры ${}_l\mathbb{Y}$.

Скалярное произведение вектора пространства-времени на себя определяет его квадрат длины

$$\mathcal{Y} \cdot \mathcal{Y} = G_{I_1 I_2}\, y^{I_1}\, y^{I_2}\,.$$

Подалгебру искривленного пространства-времени $\mathbb{Y}$ необходимо подчинить условию: *квадрат длины вектора $\mathcal{Y}$ равен нулю*[6]:

$$\mathcal{Y} \cdot \mathcal{Y} \equiv G_{I_1 I_2}\, y^{I_1}\, y^{I_2} = 0\,.$$

По существу это условие позволяет рассматривать координаты y^0 как обобщение *интервала* пространства-времени СТО.

---

[6] Пояснения к этому условию приведены в Главе 1.1 Раздел IV.5.

V. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

1. Постановка задачи

Для исследования поведения тел в силовом поле необходимо положить, что на одном и том же множестве точек-событий установлены два векторных пространства: искривленное пространство $\mathbb{Y}$ и система отсчета $\mathbb{X}$. Поставим задачу представления искривленного пространства $\mathbb{Y}$ в системе отсчета $\mathbb{X}$. При этом нужно учесть, что обе алгебры $\mathbb{Y}$ и $\mathbb{X}$ являются некоммутативными и существуют в двух модификациях соответственно: ${}_l\mathbb{Y}$, ${}_r\mathbb{Y}$ и ${}_l\mathbb{X}$, ${}_r\mathbb{X}$. Поэтому задача представления распадается на две: левое – представления левого искривленного пространства ${}_l\mathbb{Y}$ в левой системе отсчета ${}_l\mathbb{X}$ – и правое – представления правого искривленного пространства ${}_r\mathbb{Y}$ в правой системе отсчета ${}_r\mathbb{X}$.

Будем считать, что левое представление установлено, если определено *преобразование* ${}_l f\colon\ {}_l\mathbb{X}\to{}_l\mathbb{Y}$ или ${}_l\mathbb{Y} = {}_l f({}_l\mathbb{X})$. Иначе говоря, ставится задача поиска функции

$${}_l\mathcal{Y} = {}_l f({}_l\mathbf{x})\,,$$

где ${}_l\mathcal{Y} \in {}_l\mathbb{Y}$, а ${}_l\mathbf{x} \in {}_l\mathbb{X}$.

Эта задача решается в два этапа.

На первом этапе устанавливается преобразование левого искривленного пространства ${}_l\mathbb{Y}$ в левое движущееся пространство ${}_l\mathbb{X}'$ – ${}_l f\colon\ {}_l\mathbb{X}'\to{}_l\mathbb{Y}$ (${}_l\mathbb{Y} = {}_l f({}_l|BX'))$.

На втором этапе рассматривается преобразование установленного левого движущегося пространства ${}_l\mathbb{X}'$ в левую систему отсчета ${}_l\mathbb{X}$ – ${}_l f\colon\ {}_l\mathbb{X}\to{}_l\mathbb{X}'$ (${}_l\mathbb{X}' = {}_l f({}_l\mathbb{X})$).

Иначе говоря, на первом этапе устанавливается функциональная зависимость вектора левого искривленного пространства от вектора левого движущегося пространства

$${}_l\mathcal{Y} = {}_l f({}_l\mathbf{y})\,,$$

где ${}_l\mathcal{Y} \in {}_l\mathbb{Y}$, а ${}_l\mathbf{y} \in {}_l\mathbb{X}'$.

На втором этапе рассматривается функциональная зависимость вектора установленного левого движущегося пространства от вектора левой системы отсчета

$${}_l\mathbf{y} = {}_l f({}_l\mathbf{x})\,,$$

где ${}_l\mathbf{y} \in {}_l\mathbb{X}'$, а ${}_l\mathbf{x} \in {}_l\mathbb{X}$.

Будем считать, что правое представление установлено, если определено *преобразование* ${}_r f\colon\ {}_r\mathbb{X}\to{}_r\mathbb{Y}$ или ${}_r\mathbb{Y} = {}_r f({}_r\mathbb{X})$. Иначе говоря, ставится задача поиска функции

$${}_r\mathcal{Y} = {}_r f({}_r\mathbf{x})\,,$$

где ${}_r\mathcal{Y} \in {}_r\mathbb{Y}$, а ${}_r\mathbf{x} \in {}_r\mathbb{X}$.

Эта задача решается в два этапа.

На первом этапе устанавливается преобразование правого искривленного пространства ${}_r\mathbb{Y}$ в правое движущееся пространство ${}_r\mathbb{X}'$ – ${}_r f\colon\ {}_r\mathbb{X}'\to{}_r\mathbb{Y}$ (${}_r\mathbb{Y} = {}_r f({}_r|BX'))$.

На втором этапе рассматривается преобразование установленного правого движущегося пространства ${}_r\mathbb{X}'$ в правую систему отсчета ${}_r\mathbb{X}$ – ${}_r f\colon\ {}_r\mathbb{X}\to{}_r\mathbb{X}'$ (${}_r\mathbb{X}' = {}_r f({}_r\mathbb{X})$).

Иначе говоря, на первом этапе устанавливается функциональная зависимость вектора правого искривленного пространства от вектора правого движущегося пространства

$${}_r\mathcal{Y} = {}_r f({}_r\mathbf{y})\,,$$

где ${}_r\mathcal{Y} \in {}_r\mathbb{Y}$, а ${}_r\mathbf{y} \in {}_r\mathbb{X}'$.

На втором этапе рассматривается функциональная зависимость вектора установленного правого движущегося пространства от вектора правой системы отсчета

$${}_r\mathbf{y} = {}_r f({}_r\mathbf{x})\,,$$

где ${}_r\mathbf{y} \in {}_r\mathbb{X}'$, а ${}_r\mathbf{x} \in {}_r\mathbb{X}$.

2. Соответствие векторов искривленного пространства и векторов движущегося пространства

Решая задачу представления искривленного пространства-времени в системе отсчета, на первом этапе необходимо установить преобразование искривленного пространства в движущееся пространство. Такое преобразование устанавливается с помощью процедуры *соответствия*, использующей то обстоятельство, что оба векторных пространства расположены на одном и том же множестве точек-событий. Сделаем следующее определение. Назовем вектор $\mathbf{y}$ и вектор $\mathcal{Y}$ *соответствующими*, если их начала и концы совпадают (см. Рис. 1).Обозначать соответствие векторов будем следующим образом:

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{Y}\,.$$

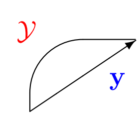


Рис. 1

3. Движущееся пространство

Преобразование установленного движущегося пространства $\mathbb{X}'$ в систему отсчета $\mathbb{X}$ – $f\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ ($\mathbb{X}' = f(\mathbb{X})$) исследуется путем разложения функции f в ряд Тейлора.

Для анилиза первого дифференциала разложения Df необходимо обратиться к движущемуся пространству, представленному *первым линейным* преобразованием $\mathbf{l}\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}'$ ($\mathbb{X}' = \mathbf{l}(\mathbb{X})$). Множество линейных преобразований $\mathbf{l}$ обозначим $\mathbb{L}$.

Для анилиза второго дифференциала разложения $D^2 f$ необходимо обратиться к движущемуся пространству, представленному *вторым линейным* преобразованием $\mathbf{a}\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{L}$ ($\mathbb{L} = \mathbf{a}(\mathbb{X})$). Множество вторых линейных преобразований обозначим $\mathbb{A}$.

Для анилиза третьего дифференциала разложения $D^3 f$ необходимо обратиться к движущемуся пространству, представленному *третьим линейным* преобразованием $\mathbf{b}\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{A}$ ($\mathbb{A} = \mathbf{b}(\mathbb{X})$). Множество третьих линейных преобразований $\mathbf{b}$ обозначим $\mathbb{B}$.

Векторное пространство $\mathbb{X}$ совместно с линейными преобразованиями $\mathbb{L}$ образуют алгебру, которая была обозначена

$$\mathbb{T}_1 = \mathbb{X} + \mathbb{L}$$

и названа *первой кинематической алгеброй*[7].

Векторное пространство $\mathbb{X}$ совместно с линейными преобразованиями $\mathbb{L}$ и $\mathbb{A}$ образуют алгебру, которая была обозначена

$$\mathbb{T}_2 = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A}$$

и названа *второй кинематической алгеброй.*

В общем случае включение линейных преобразований n-го порядка, то есть отображений векторного пространства $\mathbb{X}$ на пространство линейных преобразований $(n-1)$-го порядка, приводит к кинематической алгебре n-го порядка. Для представления искривленных векторов ограничимся третьей кинематической алгеброй, то есть

$$\mathbb{T}_3 = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A} + \mathbb{B}\,,$$

где $\mathbb{B}$ это множество линейных преобразований, осуществляющих преобразование пространства $\mathbb{X}$ в пространство вторых линейных преобразований $\mathbb{A}$

$$\mathbb{B} \circ \mathbb{X} \to \mathbb{A}\,.$$

В заключение этого Раздела напомним, что каждая из вышеуказанных алгебр существует в двух модификациях – левой и правой.

4. Первая кинематическая алгебра $\mathbb{T}_1 = \mathbb{X} + \mathbb{L}$

Рассматривая алгебру $\mathbb{T}_1 = \mathbb{X} + \mathbb{L}$, необходимо отметить, что умножение в пространстве-времени $\mathbb{X}$ и композиция (умножение) линейных преобразований в алгебре $\mathbb{L}$ являются некоммутативными, поэтому алгебра $\mathbb{T}_1$ существует в двух модификациях – левая первая кмнематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}_1$ и правая первая кмнематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}_1$.

[7] Замечание: термин *первая* здесь имеет тот же смысл , что и *первая* в отношении к производной.

4.1. Левая первая кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}_1 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L}$

В алгебре ${}_l\mathbb{T}_1$ наряду с умножениями

$${}_l\mathbb{X} \circ {}_l\mathbb{X} \to {}_l\mathbb{X} \quad \text{и} \quad {}_l\mathbb{L} \circ {}_l\mathbb{L} \to {}_l\mathbb{L}$$

рассматриваются умножения

$${}_l\mathbb{X} \circ {}_l\mathbb{L} \to \emptyset \quad \text{и} \quad {}_l\mathbb{L} \circ {}_l\mathbb{X} \to {}_l\mathbb{X}\,.$$

Указанные умножения определяются следующей таблицей умножений базисных векторов

$$\begin{aligned}
{}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K &= {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI}\,,\\
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{e}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{e}_K\,,\\
{}_l\mathbf{e}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= 0\,,\\
{}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_K + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Умножение векторов в левой первой кинематической алгебре запишем следующим образом:

$${}_l\mathbf{t} = {}_l\mathbf{t}_2 \circ {}_l\mathbf{t}_1\,.$$

Здесь ${}_l\mathbf{t},\ {}_l\mathbf{t}_1,\ {}_l\mathbf{t}_2 \in {}_l\mathbb{T}_1$.

4.2. Правая первая кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}_1 = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L}$

В алгебре ${}_r\mathbb{T}_1$ наряду с умножениями

$${}_r\mathbb{X} \circ {}_r\mathbb{X} \to {}_r\mathbb{X} \quad \text{и} \quad {}_r\mathbb{L} \circ {}_r\mathbb{L} \to {}_r\mathbb{L}$$

рассматриваются умножения

$${}_r\mathbb{X} \circ {}_r\mathbb{L} \to {}_r\mathbb{X} \quad \text{и} \quad {}_r\mathbb{L} \circ {}_r\mathbb{X} \to \emptyset$$

Указанные умножения определяются следующей таблицей умножений базисных векторов

$$\begin{aligned}
{}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K &= {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{KI}\,,\\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{e}_M &= 0\,,\\
{}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^K{}_I \cdot {}_r\mathbf{e}_M\,,\\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Умножение векторов в правой первой кинематической алгебре запишем следующим образом

$${}_r\mathbf{t} = {}_r\mathbf{t}_1 \circ {}_r\mathbf{t}_2\,.$$

Здесь ${}_r\mathbf{t},\ {}_r\mathbf{t}_1,\ {}_r\mathbf{t}_2 \in {}_r\mathbb{T}_1$.

5. Вторая кинематическая алгебра $\mathbb{T}_2 = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A}$

5.1. Левая вторая кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}_2 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{A}$

Левая вторая кинематическая алгебра ${}_l\mathbb{T}_2$ включает в себя векторное пространство ${}_l\mathbb{A}$ линейных преобразований пространства-времени ${}_l\mathbb{X}$ в ${}_l\mathbb{L}$. Таким образом, в левой второй кинематической алгебре ${}_l\mathbb{T}_2$ рассматриваются умножения

$$ {}_l\mathbb{A} \circ {}_l\mathbb{X} \to {}_l\mathbb{L}\,. $$

Базисные векторы в ${}_l\mathbb{A}$ обозначим ${}_l\mathbf{J}^{LK}{}_I$. Разложение вектора ${}_l\mathbf{a} \in {}_l\mathbb{A}$ по базисным векторам имеет вид

$$ {}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{J}^{LK}{}_I \cdot {}_l l^I{}_{KL}\,. $$

Указанное обобщение называется левой второй кинематической алгеброй

$$ {}_l\mathbb{T}_2 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{A}\,. $$

Для того чтобы определить эту алгебру, необходимо к ранее определенной таблице умножения базисных векторов левой первой кинематической алгебры ${}_l\mathbb{T}_1$ добавить произведения, в которых участвуют базисные векторы ${}_l\mathbf{J}^{IK}{}_L$. Эти произведения можно вычислить на основании правил тензорной алгебры.

В результате левая вторая кинематическая алгебра определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$ \begin{aligned} {}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K &= {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI}\,,\\ {}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{I}^K{}_L &= 0\,,\\ {}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^I{}_K \cdot {}_l\mathbf{e}_M\,,\\ {}_l\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_l\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^L{}_M \cdot {}_l I^I{}_K + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,,\\ {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{e}_K &= \delta^P{}_K \cdot {}_l\mathbf{I}^I{}_M\,,\\ {}_l\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= 0\,,\\ {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_l\mathbf{I}^L{}_K &= {}_l\mathbf{J}^{LI}{}_M \cdot \delta^P{}_K\,,\\ {}_l\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_M \cdot \delta^I{}_K\,,\\ {}_l\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ {}_l\mathbf{J}^{PI}{}_M &= 0\,. \end{aligned} \tag{16} $$

Квадрат длины вектора в этой алгебре

$$ t^2 = g_{IK} \cdot {}_l x^I \cdot {}_l x^K + {}_l l^I{}_K \cdot {}_l l^K{}_I\,. $$

В дальнейшем будем пользоваться введенным в Главе 1.7. вектором, который был обозначен $\mathbf{\Gamma}$ и назван *связность* левого поля. Связность левого поля определяется следующим соотношением:

$$ {}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{l} \circ \mathbf{\Gamma}\,. $$

Воспользуемся координатной записью векторов в этом выражении

$$ {}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_i \cdot {}_l l^I{}_{K_1K_2}\,, \quad {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^M{}_I \cdot {}_l l^I{}_M\,, $$
$$ \mathbf{\Gamma} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_k \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2}\,. $$

Координаты $\Gamma^K{}_{K_1K_2}$ называются ***коэффициентами связности*** левого поля. Далее воспользуемся законом умножения

$$ {}_l\mathbf{I}^M{}_I \circ {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot \delta^M{}_K $$

из таблицы умножения (16) и получим выражение координат линейного преобразования ${}_l\mathbf{a}$ через коэффициенты связности

$$ {}_l l^I{}_{K_1K_2} = {}_l l^I{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2}\,. $$

Отсюда для коэффициентов связности левого поля имеем

$$ \Gamma^K{}_{K_1K_2} = {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_l l^I{}_{K_1K_2}\,. $$

5.2. Правая вторая кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}_2 = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L} + {}_r\mathbb{A}$

Правая вторая кинематическая алгебра ${}_r\mathbb{T}_2$ включает в себя векторное пространство ${}_r\mathbb{A}$ линейных преобразований пространства-времени ${}_r\mathbb{X}$ в ${}_r\mathbb{L}$. Таким образом, в правой второй кинематической алгебре ${}_r\mathbb{T}_2$ рассматриваются умножения

$$ {}_r\mathbb{X} \circ {}_r\mathbb{A} \to {}_r\mathbb{L}\,. $$

Базисные векторы в ${}_r\mathbb{A}$ обозначим ${}_r\mathbf{J}^{LK}{}_I$. Разложение вектора ${}_r\mathbf{a} \in {}_r\mathbb{A}$ по базисным векторам имеет вид

$$ {}_r\mathbf{a} = {}_r\mathbf{J}^{LK}{}_I \cdot {}_r l^I{}_{KL}\,. $$

Указанное обобщение наазывается правой второй кинематической алгеброй

$$ {}_r\mathbb{T}_2 = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L} + {}_r\mathbb{A}\,. $$

Для того чтобы определить эту алгебру, необходимо к ранее определенной таблице умножения базисных векторов правой первой кинематической алгебры ${}_r\mathbb{T}_1$ добавить произведения, в которых участвуют базисные векторы ${}_r\mathbf{J}^{IK}{}_L$. Эти произведения можно вычислить на основании правил тензорной алгебры.

В результате правая вторая кинематическая алгебра определяется следующей таблицей умножения базисных векторов:

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{e}_K &= {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{IK}\,,\\
{}_r\mathbf{e}_I \circ {}_r\mathbf{I}^K{}_L &= \delta^I{}_K \cdot {}_r\mathbf{e}_M\,,\\
{}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0\,,\\
{}_r\mathbf{I}^L{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^I{}_M &= \delta^I{}_K \cdot {}_rI^L{}_M + \delta^I{}_K \cdot \delta^L{}_M\,,\\
{}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_r\mathbf{e}_K &= 0\,,\\
{}_r\mathbf{e}_M \circ {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K &= \delta^N{}_M \cdot {}_r\mathbf{I}^L{}_K\,,\\
{}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M \circ {}_r\mathbf{I}^L{}_K &= {}_r\mathbf{J}^{PI}{}_K \cdot \delta^L{}_M\,,\\
{}_r\mathbf{I}^I{}_M \circ {}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K &= {}_r\mathbf{J}^{IL}{}_K \cdot \delta^N{}_M\,,\\
{}_r\mathbf{J}^{NL}{}_K \circ {}_r\mathbf{J}^{PI}{}_M &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Квадрат длины вектора в этой алгебре

$$t^2 = g_{IK} \cdot {}_rx^I \cdot {}_rx^K + {}_rl^I{}_K \cdot {}_rl^K{}_I\,.$$

В дальнейшем будем пользоваться введенным в Главе 1.7. вектором, который был обозначен $\mathbf{A}$ и назван *потенциалом* правого поля. Потенциал правого поля определяется следующим соотношением:

$${}_r\mathbf{a} = \mathbf{A} \circ {}_r\mathbf{l}\,.$$

Воспользуемся координатной записью векторов в этом выражении

$$
\begin{gathered}
{}_r\mathbf{a} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_i \cdot {}_rl^I{}_{K_1K_2}\,, \quad {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^M{}_I \cdot {}_rl^I{}_M\,,\\
\mathbf{A} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_k \cdot A^K{}_{K_1K_2}\,.
\end{gathered}
$$

Координаты $A^K{}_{K_1K_2}$ называются *потенциалами* правого поля. Далее воспользуемся законом умножения

$${}_r\mathbf{I}^M{}_I \circ {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot \delta^M{}_K$$

из таблицы умножения (17) и получим выражение координат линейного преобразования ${}_r\mathbf{a}$ через потенциалы правого поля

$${}_rl^I{}_{K_1K_2} = {}_rl^I{}_K \cdot A^K{}_{K_1K_2}\,.$$

Отсюда для потенциалов правого поля

$$A^K{}_{K_1K_2} = {}_r\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_rl^I{}_{K_1K_2}\,.$$

6. Третья кинематическая алгебра $\mathbb{T}_3 = \mathbb{X} + \mathbb{L} + \mathbb{A} + \mathbb{B}$

6.1. *Левая третья кинематическая алгебра* ${}_l\mathbb{T}_3 = {}_l\mathbb{X} + {}_l\mathbb{L} + {}_l\mathbb{A} + {}_l\mathbb{B}$

Полную таблицу произведений базисных векторов в ${}_l\mathbb{T}_3$ здесь приводить не будем. Приведем только два соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

Базисные векторы в множестве линейных преобразований ${}_l\mathbb{B}$ обозначим ${}_l\mathbf{n}^{NLK}{}_I$. Тогда преобразования

$${}_l\mathbb{B} \circ {}_l\mathbb{X} \to {}_l\mathbb{A}\,, \quad {}_l\mathbb{L} \circ {}_l\mathbb{B} \to {}_l\mathbb{B}$$

по отношению к базисным векторам запишутся так:

$$
\begin{aligned}
{}_l\mathbf{n}^{MLK}{}_I \circ {}_l\mathbf{e}_N &= \delta^M{}_N \cdot {}_l\mathbf{J}^{LK}{}_I\,,\\
{}_l\mathbf{I}^M{}_I \circ {}_l\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_K &= {}_l\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_I \cdot \delta^M{}_K\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Разложение вектора ${}_l\mathbf{b} \in {}_l\mathbb{B}$ по базисным векторам имеет вид

$${}_l\mathbf{b} = {}_l\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1K_2K_3}\,.$$

Квадрат длины вектора в этой алгебре

$$t^2 = g_{IK} \cdot {}_lx^I \cdot {}_lx^K + {}_ll^I{}_K \cdot {}_ll^K{}_I\,.$$

В дальнейшем будем пользоваться новым вектором, который обозначим $\mathbf{R}$ и назовем *объектом кривизны* левого поля. Объект кривизны левого поля определим следующим соотношением:

$${}_l\mathbf{b} = {}_l\mathbf{l} \circ \mathbf{R}\,.$$

Воспользуемся координатной записью векторов в этом выражении

$$
\begin{gathered}
{}_l\mathbf{b} = {}_l\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1K_2K_3}\,, \quad {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^M{}_I \cdot {}_ll^I{}_M\,,\\
\mathbf{R} = {}_l\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_K \cdot R^K{}_{K_1K_2K_3}\,.
\end{gathered}
$$

Далее воспользуемся законом умножения

$${}_l\mathbf{I}^M{}_I \circ {}_l\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_K = {}_l\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_I \cdot \delta^M{}_K$$

из таблицы умножения (18). Получим выражение координат линейного преобразования ${}_l\mathbf{b}$ через координаты объекта кривизны левого поля

$${}_ll^I{}_{K_1K_2K_3} = {}_ll^I{}_K \cdot R^K{}_{K_1K_2K_3}\,.$$

Отсюда для координат объекта кривизны левого поля

$$R^K{}_{K_1K_2K_3} = {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1K_2K_3}\,.$$

6.2. *Правая третья кинематическая алгебра* ${}_r\mathbb{T}_3 = {}_r\mathbb{X} + {}_r\mathbb{L} + {}_r\mathbb{A} + {}_r\mathbb{B}$

Полную таблицу произведений базисных векторов в ${}_r\mathbb{T}_3$ здесь приводить не будем. Приведем только два соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

Базисные векторы в множестве линейных преобразований ${}_r\mathbb{B}$ обозначим ${}_r\mathbf{n}^{NLK}{}_I$. Тогда преобразования

$${}_r\mathbb{X} \circ {}_r\mathbb{B} \to {}_r\mathbb{A}\,, \quad {}_r\mathbb{B} \circ {}_r\mathbb{L} \to {}_r\mathbb{B}$$

по отношению к базисным векторам запишутся так:

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathbf{e}_N \circ {}_r\mathbf{n}^{MLK}{}_I &= \delta^M{}_N \cdot {}_r\mathbf{J}^{LK}{}_I\,,\\
{}_r\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^M{}_I &= {}_r\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_I \cdot \delta^M{}_K\,.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Разложение вектора ${}_r\mathbf{b} \in {}_r\mathbb{B}$ по базисным векторам имеет вид

$$ {}_r\mathbf{b} = {}_r\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_I \cdot {}_rl^I{}_{K_1K_2K_3} \,. $$

Квадрат длины вектора в этой алгебре

$$ t^2 = g_{IK} \cdot {}_rx^I \cdot {}_rx^K + {}_rl^I{}_K \cdot {}_rl^K{}_I \,. $$

В дальнейшем будем пользоваться новым вектором, который обозначим $\mathbf{F}$ и назовем *объектом правого поля*. Объект правого поля определим следующим соотношением:

$$ {}_r\mathbf{b} = \mathbf{F} \circ {}_r\mathbf{l} \,. $$

Воспользуемся координатной записью векторов в этом выражении

$$ {}_r\mathbf{b} = {}_r\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_I \cdot {}_rl^I{}_{K_1K_2K_3} \,, \qquad {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^M{}_I \cdot {}_rl^I{}_M \,, $$
$$ \mathbf{F} = {}_r\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_K \cdot F^K{}_{K_1K_2K_3} \,. $$

Далее воспользуемся законом умножения

$$ {}_r\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_K \circ {}_r\mathbf{I}^M{}_I = {}_r\mathbf{n}^{K_3K_2K_1}{}_I \cdot \delta^M{}_K $$

из таблицы умножения (19). Получим выражение координат линейного преобразования ${}_r\mathbf{b}$ через координаты объекта правого поля

$$ {}_rl^I{}_{K_1K_2K_3} = {}_rl^I{}_K \cdot F^K{}_{K_1K_2K_3} \,. $$

Отсюда для координат объекта правого поля имеем

$$ F^K{}_{K_1K_2K_3} = {}_r\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_rl^I{}_{K_1K_2K_3} \,. $$

VI. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛЕВОГО ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В этом Разделе система отсчета $\mathbb{X}$ рассматривается как векторное пространство, умножение векторов в котором сводится к скалярному умножению. В этом случае левые векторы не отличимы от правых, то есть

$$ {}_l\mathbf{x} \equiv {}_r\mathbf{x} \equiv \mathbf{x} \,. $$

Задача представления левого искривленного пространства-времени в системе отсчета решается в два этапа.

На первом этапе устанавливается соответствие между векторами ${}_l\mathcal{Y}$ искривленного пространства ${}_l\mathbb{Y}$ и векторами ${}_l\mathbf{y}$ движущегося пространства ${}_l\mathbb{X}'$

$$ {}_l\mathbf{y} \sim {}_l\mathcal{Y} \,. $$

На втором этапе установленный вектор ${}_l\mathbf{y}$ движущегося пространства ${}_l\mathbb{X}'$ рассматривается как функция вектора $\mathbf{x}$ системы отсчета $\mathbb{X}$

$$ {}_l\mathbf{y} = {}_lf(\mathbf{x}) \,, $$

где ${}_l\mathbf{y} \in {}_l\mathbb{X}'$, а $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

Указанная функциональная зависимость задается рядом Тейлора для левых векторов

$$ \begin{aligned} &{}_l\mathbf{y}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = {}_l\mathbf{y}(\mathbf{x}) + {}_l\mathbf{l}(\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} + \\ &+({}_l\mathbf{a}(\mathbf{x}) \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} + \\ &+(({}_l\mathbf{b}(\mathbf{x}) \circ d_3\mathbf{x}) \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} + \ldots \end{aligned} \tag{20} $$

Перейдем к координатной записи ряда Тейлора. Для этого запишем векторы через базисные векторы и координаты

$$ {}_l\mathbf{y} = \mathbf{e}_I \cdot {}_ly^I \,, \quad d\mathbf{x} = \mathbf{e}_L \cdot dx^L \,, $$
$$ {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_ll^I{}_K \,, \quad {}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1K_2} \,, $$
$$ {}_l\mathbf{b} \circ d\mathbf{x} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3} $$

и учтем следующие законы умножения базисных векторов:

$$ {}_l\mathbf{I}^K{}_I \circ \mathbf{e}_L = \delta^K{}_L \cdot \mathbf{e}_I \,, $$
$$ {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \circ \mathbf{e}_L = \delta^{K_2}{}_L \cdot {}_l\mathbf{I}^{K_1}{}_I \,. $$

Получим

$$ \begin{aligned} &{}_ly^I(x + dx) = {}_ly^I(x) + {}_ll^I{}_K \cdot dx^K + \\ &+{}_ll^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ &+{}_ll^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \ldots \end{aligned} \tag{21} $$

В ряде случаев будем использовать переобозначение

$$ {}_ll \to l \,. $$

Тогда выражение (21) упрощается:

$$ \begin{aligned} &{}_ly^I(x + dx) = {}_ly^I(x) + l^I{}_K \cdot dx^K + \\ &+l^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ &+l^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \ldots \end{aligned} \tag{22} $$

Помимо ряда Тейлора (20), будем обращаться к ряду Тейлора, в котором использованы связность левого поля $\mathbf{\Gamma}$ и объект кривизны левого поля $\mathbf{R}$:

$$ \begin{aligned} &{}_l\mathbf{y}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = {}_l\mathbf{y}(\mathbf{x}) + {}_l\mathbf{l}(\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x} + \\ &+(({}_l\mathbf{l} \circ \mathbf{\Gamma}) \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} + \\ &+((({}_l\mathbf{l} \circ \mathbf{R}) \circ d_3\mathbf{x}) \circ d_2\mathbf{x}) \circ d_1\mathbf{x} + \ldots \end{aligned} \tag{23} $$

Это выражение по отношению к координатам приобретает вид

$$ \begin{aligned} &{}_ly^I(x^K + dx^K) = {}_ly^I(x^K) + l^I{}_K \cdot dx^K + \\ &+ l^I{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ &+ l^I{}_K \cdot R^K{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \\ &+ l^I{}_K \cdot R^K{}_{K_1K_2K_3K_4} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} \cdot d_4x^{K_4} + \ldots \end{aligned} \tag{24} $$

Здесь

$$\Gamma^{K}{}_{K_1K_2} = \tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot l^{I}{}_{K_1K_2} \equiv \tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot \frac{Dl^{I}{}_{K_1}}{\partial x^{K_2}} \tag{25}$$

– коэффициенты связности левого поля,

$$R^{K}{}_{K_1K_2K_3} = \tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot l^{I}{}_{K_1K_2K_3} \equiv \tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot \frac{Dl^{I}{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} \tag{26}$$

– объект кривизны левого поля,

$$R^{K}{}_{K_1K_2K_3K_4} = \tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot l^{I}{}_{K_1K_2K_3K_4} \equiv \tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot \frac{Dl^{I}{}_{K_1K_2K_3}}{\partial x^{K_4}} \tag{27}$$

– второй объект кривизны левого поля.

Раскрывая правую часть соотношения (25), получим калибровочное преобразование коэффициентов связности левого поля[8]

$$\Gamma^{K}{}_{K_1K_2} = \tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot \frac{\partial l^{I}{}_{K_1}}{\partial x^{K_2}} + \Gamma'^{K}{}_{K_1K_2}\,.$$

Раскрывая правую часть соотношения (26), получим калибровочное преобразование объекта кривизны левого поля

$$R^{K}{}_{K_1K_2K_3} = \tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot \frac{\partial l^{I}{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} + R'^{K}{}_{K_1K_2K_2}\,.$$

Из выражения (26) следует, что объект кривизны можно записать следующим образом:

$$R^{K}{}_{K_1K_2K_3} = \frac{D(\tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot l^{I}{}_{K_1K_2})}{\partial x^{K_3}} - \frac{D\tilde{l}^{K}{}_{I}}{\partial x^{K_3}} \cdot l^{I}{}_{K_1K_2}\,.$$

Первое слагаемое в правой части преобразуем следующим образом. Во-первых, учтем, что

$$\tilde{l}^{K}{}_{I} \cdot l^{I}{}_{K_1K_2} = \Gamma^{K}{}_{K_1K_2}$$

и, во-вторых, учтем, что для геометрии Римана[9]

$$\delta\Gamma^{K}{}_{K_1K_2} = 0\,.$$

Таким образом, для геометрии Римана

$$\frac{D\Gamma^{K}{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} = \frac{\partial\Gamma^{K}{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}}\,.$$

Второе слагаемое в правой части преобразуем следующим образом. Во-первых, перепишем его так:

$$\left(\frac{D\tilde{l}^{K}{}_{I_4}}{\partial x^{K_3}} \cdot l^{I_4}{}_{K_4}\right) \cdot \left(\tilde{l}^{K_4}{}_{I} \cdot l^{I}{}_{K_1K_2}\right)$$

и, во-вторых, учтем, что

$$\tilde{l}^{K_4}{}_{I} \cdot l^{I}{}_{K_1K_2} = \Gamma^{K_4}{}_{K_1K_2}$$

и[10]

$$\frac{D\tilde{l}^{K}{}_{I_4}}{\partial x^{K_3}} \cdot l^{I_4}{}_{K_4} = -\Gamma^{K}{}_{K_4K_3}\,.$$

С учетом выполненных преобразований получим выражение для объекта кривизны левого поля

$$R^{K}{}_{K_1K_2K_3} = \frac{\partial\Gamma^{K}{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} + \Gamma^{K}{}_{K_4K_3} \cdot \Gamma^{K_4}{}_{K_1K_2}\,.$$

После антисимметризации по индексам K_2K_3 получим тензор кривизны левого поля

$$R^{K}{}_{K_1[K_2K_3]} = \frac{\partial\Gamma^{K}{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} - \frac{\partial\Gamma^{K}{}_{K_1K_3}}{\partial x^{K_2}} + {} + \Gamma^{K}{}_{K_4K_3} \cdot \Gamma^{K_4}{}_{K_1K_2} - \Gamma^{K}{}_{K_4K_2} \cdot \Gamma^{K_4}{}_{K_1K_3}\,. \tag{28}$$

1. Первый дифференциал

Определение вектора $D_{\,l}\mathbf{y}$ движущегося пространства, соответствующего дифференциалу $D_{\,l}\mathcal{Y}$ в искривленном пространстве, поясним следующим рисунком.

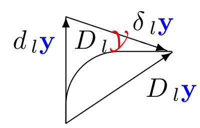


Рис. 1

Этот рисунок иллюстрирует то обстоятельство, что *соответствующие* векторы определяются из условия, что граничные точки искривленных тензоров и тензоров в движущемся пространстве совпадают.

Из Рис. 1 следует, что вектору $D_{\,l}\mathcal{Y}$ ставится в соответствие вектор

$$D_{\,l}\mathbf{y} = d_{\,l}\mathbf{y} + \delta_{\,l}\mathbf{y}\,. \tag{29}$$

Итак, следует записать

$$D_{\,l}\mathbf{y} \;\sim\; D_{\,l}\mathcal{Y}\,. \tag{30}$$

---

[8] Калибровочное преобразование оставляет инвариантными уравнения левого поля.

[9] См. Раздел IV.4 Главы 2.3.

[10] Действительно, из

$$\tilde{l}^{K}{}_{I_4} \cdot l^{I_4}{}_{K_4} = \delta^{K}{}_{K_4}$$

путем дифференцирования имеем

$$\frac{D\tilde{l}^{K}{}_{I_4}}{\partial x^{K_3}} \cdot l^{I_4}{}_{K_4} + \tilde{l}^{K}{}_{I_4} \cdot \frac{Dl^{I_4}{}_{K_4}}{\partial x^{K_3}} = \frac{D\delta^{K}{}_{K_4}}{\partial x^{K_3}} = \frac{\partial\delta^{K}{}_{K_4}}{\partial x^{K_3}} = 0\,.$$

Отсюда

$$\frac{D\tilde{l}^{K}{}_{I_4}}{\partial x^{K_3}} \cdot l^{I_4}{}_{K_4} + \Gamma^{K}{}_{K_4K_3} = 0\,.$$

Вектор $D\,{}_l\mathbf{y}$ – это вектор движущегося пространства, связанного с системой отсчета линейным преобразованием. Поэтому

$$D\,{}_l\mathbf{y} = {}_l\mathbf{l} \circ d\mathbf{x}\,. \qquad (31)$$

Здесь ${}_l\mathbf{l}$ – линейное преобразование на $\mathbb{X}$, ${}_l\mathbf{l} \in {}_l\mathbb{L}$. Если воспользоваться координатной записью векторов $d\mathbf{x}$ и ${}_l\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot dx^K\,, \quad {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^M{}_I \cdot l^I{}_M$$

и правилами произведения базисных векторов (14), то получим координатную запись вектора $D\,{}_l\mathbf{y}$

$$D\,{}_l\mathbf{y} = \mathbf{e}_I \cdot l^I{}_K \cdot dx^K\,. \qquad (32)$$

Воспользуемся обобщением формулы (7) Главы 2.2.

$$D\,{}_ly^I = l^I{}_K \cdot dx^K\,.$$

Получим

$$D\,{}_l\mathbf{y} = \mathbf{e}_I \cdot D\,{}_ly^I\,.$$

Вышеприведенные формулы показывают, что переход от системы отсчета к движущемуся пространству можно связать с преобразованием координат. Возможна другая точка зрения, когда переход от системы отсчета к движущемуся пространству связывается с преобразованием базисных векторов. Обозначим преобразованные базисные векторы (базисные векторы движущегося пространства) ${}_l\mathbf{n}_K$. При этом

$${}_l\mathbf{n}_K = \mathbf{e}_I \cdot l^I{}_K\,. \qquad (33)$$

Для них

$$D\,{}_l\mathbf{y} = {}_l\mathbf{n}_K \cdot dx^K\,.$$

1.1. *Левый метрический тензор представления*

Соответствие векторов $D\,{}_l\mathcal{Y}$ и $D\,{}_l\mathbf{y}$ необходимо дополнить соответствием скалярных произведений

$$(D\,{}_l\mathcal{Y} \cdot D\,{}_l\mathcal{Y}) \quad \text{и} \quad (D\,{}_l\mathbf{y} \cdot D\,{}_l\mathbf{y}).$$

Если учесть, что

$$D\,{}_l\mathcal{Y} \cdot D\,{}_l\mathcal{Y} = D\,{}_ly^2\,,$$

где $D\,{}_ly$ – длина вектора $D\,{}_l\mathcal{Y}$, то необходимо записать

$$D\,{}_l\mathcal{Y} \cdot D\,{}_l\mathcal{Y} = D\,{}_l\mathbf{y} \cdot D\,{}_l\mathbf{y} = D\,{}_ly^2\,. \qquad (34)$$

Учтем, что искривленный дифференциал от скалярной величины связан с обычным дифференциалом от этой величины следующим образом:

$$D\,{}_ly = f({}_ly) \cdot d\,{}_ly\,.$$

Обозначим ${}_ls$ первообразную функции $f({}_ly)$. Тогда

$$D\,{}_ly = d\,{}_ls$$

и

$$D\,{}_l\mathbf{y} \cdot D\,{}_l\mathbf{y} = d\,{}_ls^2\,.$$

Используя (32), получим

$$d\,{}_ls^2 = D\,{}_l\mathbf{y} \cdot D\,{}_l\mathbf{y} = (\mathbf{e}_{I_1} \cdot \mathbf{e}_{I_2}) \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot l^{I_2}{}_{K_2} \cdot dx^{K_1} \cdot dx^{K_2}$$

или

$$d\,{}_ls^2 = g_{I_1I_2} \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot l^{I_2}{}_{K_2} \cdot dx^{K_1} \cdot dx^{K_2}\,, \qquad (35)$$

где

$$g_{I_1I_2} = (\mathbf{e}_{I_1} \cdot \mathbf{e}_{I_2})$$

это метрический тензор системы отсчета, или с учетом (33)

$$d\,{}_ls^2 = ({}_l\mathbf{n}_{K_1} \cdot {}_l\mathbf{n}_{K_2}) \cdot dx^{K_1} \cdot dx^{K_2}\,.$$

Введем *левый метрический тензор представления искривленного пространства в системе отсчета* (или короче *левый метрический тензор представления*)

$${}_lg_{K_1K_2} = ({}_l\mathbf{n}_{K_1} \cdot {}_l\mathbf{n}_{K_2})\,,$$

или

$${}_lg_{K_1K_2} = g_{I_1I_2} \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot l^{I_2}{}_{K_2}\,. \qquad (36)$$

Тогда

$$d\,{}_ls^2 = {}_lg_{k_1k_2} \cdot dx^{k_1} \cdot dx^{k_2}\,.$$

2. Второй дифференциал. Уравнение левой геодезической

Дифференцируя соотношение (30), получим следующее соответствие между вторыми дифференциалами:

$$D^2\,{}_l\mathbf{y} \;\sim\; D^2\,{}_l\mathcal{Y}\,. \qquad (37)$$

Запишем дифференциал $D^2\,{}_l\mathbf{y}$ с учетом выражения (31). Получим

$$D(D\,{}_l\mathbf{y}) = D({}_l\mathbf{l} \circ d\mathbf{x}) = {}_l\mathbf{l} \circ D(d\mathbf{x}) + D({}_l\mathbf{l}) \circ d\mathbf{x}\,. \qquad (38)$$

Это выражение преобразуем, имея в виду, во-первых, что

$$D(d\mathbf{x}) = d(d\mathbf{x}) \qquad (39)$$

и, во-вторых, подчиним $D({}_l\mathbf{l})$ – искривленный дифференциал от ${}_l\mathbf{l}$ – соотношениям, аналогичным (29):

$$D\,{}_l\mathbf{l} = d\,{}_l\mathbf{l} + \delta\,{}_l\mathbf{l}\,, \qquad (40)$$

далее вектор $D\,{}_l\mathbf{l}$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть запишем

$$D\,{}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{a} \circ d\mathbf{x}$$

или[11]

$$D\,{}_l\mathbf{l} = ({}_l\mathbf{l} \circ \mathbf{\Gamma}) \circ d\mathbf{x}\,. \tag{41}$$

Здесь ${}_l\mathbf{a} = {}_l\mathbf{l} \circ \mathbf{\Gamma} \in {}_l\mathbb{A}$, а $\mathbf{\Gamma}$ – вектор, названный *связностью* левого поля.

Полагая

$$\delta\,{}_l\mathbf{l} = ({}_l\mathbf{l} \circ \gamma) \circ d\mathbf{x}\,,$$

где также ${}_l\mathbf{l} \circ \gamma \in {}_l\mathbb{A}$, соотношение (40) можно записать так:

$$D\,{}_l\mathbf{l} = d\,{}_l\mathbf{l} + {}_l\mathbf{l} \circ \gamma \circ d\mathbf{x}\,.$$

Сравнивая это выражение и соотношение (41), получим

$$\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x} = {}_l\tilde{\mathbf{l}} \circ d\,{}_l\mathbf{l} + \gamma \circ d\mathbf{x}\,. \tag{42}$$

Здесь ${}_l\tilde{\mathbf{l}}$ – линейное преобразование, обратное линейному преобразованию ${}_l\mathbf{l}$, для которого

$${}_l\tilde{\mathbf{l}} \circ {}_l\mathbf{l} = \mathbf{I}^K{}_I \cdot \delta^I{}_K\,.$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$, ${}_l\mathbf{l}$, $\mathbf{\Gamma}$ и γ

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot dx^K\,, \quad {}_l\mathbf{l} = {}_l\mathbf{I}^K{}_I \cdot l^I{}_K\,,$$
$$\mathbf{\Gamma} = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2}\,, \quad \gamma = {}_l\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K \cdot \gamma^K{}_{K_1K_2}$$

и правила произведения базисных векторов (16), получим уравнение (42) в координатной записи:

$$\Gamma^K{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2} = \tilde{l}^K{}_I \cdot dl^I{}_{K_1} + \gamma^K{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2}\,.$$

Отсюда

$$\Gamma^K{}_{K_1K_2} = \tilde{l}^K{}_I \cdot l^I{}_{K_1,K_2} + \gamma^K{}_{K_1K_2}\,. \tag{43}$$

Здесь и далее индекс, отделенный запятой, означает частное дифференцирование по координате с этим индексом. Например, в нашем случае

$$l^I{}_{K_1,K_2} = \frac{\partial l^I{}_{K_1}}{\partial x^{K_2}}\,.$$

Подставляя соотношения (39) и (41) ввыражение (38), имеем

$$D(D\,{}_l\mathbf{y}) = {}_l\mathbf{l} \circ d(d\mathbf{x}) + ({}_l\mathbf{l} \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x})) \circ d\mathbf{x}\,.$$

[11] Порядок умножения сомножителей в правой части может быть любым. Далее мы воспользуемся следующим порядком умножения:

$${}_l\mathbf{l} \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x})\,.$$

Далее учтем, что скобки в последнем слагаемом могут быть записаны иначе:

$$({}_l\mathbf{l} \circ (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x})) \circ d\mathbf{x} = {}_l\mathbf{l} \circ ((\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x})\,.$$

Поэтому запишем

$$D(D\,{}_l\mathbf{y}) = {}_l\mathbf{l} \circ (d^2\mathbf{x} + (\mathbf{\Gamma} \circ d\mathbf{x}) \circ d\mathbf{x})\,. \tag{44}$$

В Главе 2.1. показано, что уравнение геодезической в нормальной системе координат искривленного пространства имеет вид

$$\frac{D^2\mathcal{Y}}{Dy^2} = 0\,.$$

Опираясь на рассмотренное соответствие, имеем

$$\frac{D^2\,{}_l\mathbf{y}}{D\,{}_ly^2} \sim \frac{D^2\,{}_l\mathcal{Y}}{D\,{}_ly^2}\,.$$

Поэтому уравнение геодезической в движущемся пространстве следует записать так:

$$\frac{D^2\,{}_l\mathbf{y}}{D\,{}_ly^2} = 0\,.$$

Учитывая соотношение (44) и то обстоятельство, что

$$\det ||l^I{}_K|| \neq 0\,,$$

приходим к инвариантному уравнению *левой* геодезической в системе отсчета

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\,{}_ls^2} + \left(\mathbf{\Gamma} \circ \frac{d\mathbf{x}}{d\,{}_ls}\right) \circ \frac{d\mathbf{x}}{d\,{}_ls} = 0\,. \tag{45}$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$ и $\mathbf{\Gamma}$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot dx^K\,, \quad \mathbf{\Gamma} = {}_lJ^{K_2K_1}{}_K \cdot \Gamma^K{}_{K_1K_2}$$

и правила произведения базисных векторов (16), получим уравнение левой геодезической относительно координат системы отсчета

$$\frac{d^2x^K}{d\,{}_ls^2} + \Gamma^K{}_{K_1K_2} \cdot \frac{dx^{K_1}}{d\,{}_ls} \cdot \frac{dx^{K_2}}{d\,{}_ls} = 0\,.$$

2.1. Дифференцирование базисных векторов ${}_l\mathbf{n}_K$

Обратимся к базисным векторам движущегося пространства (33)

$$\mathbf{e}_I \cdot l^I{}_K = {}_l\mathbf{n}_K\,.$$

Рассмотрим искривленный дифференциал этого выражения. Имеем

$$D\mathbf{e}_I \cdot l^I{}_K + \mathbf{e}_I \cdot Dl^I{}_K = D\,{}_l\mathbf{n}_K\,.$$

Учтем, что первое слагаемое в левой части представляет собой ковариантный дифференциал базисных векторов ${}_l\mathbf{n}_K$

$$D\mathbf{e}_I \cdot l^I{}_K = \mathcal{D}\,{}_l\mathbf{n}_K\,.$$

Кроме того, учтем, что второе слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$(\mathbf{e}_I \cdot l^I{}_N) \cdot (\tilde{l}^N{}_M \cdot Dl^M{}_K) = {}_l\mathbf{n}_N \cdot \Gamma^N{}_{KL} \cdot dx^L\,.$$

В результате получим ковариантный дифференциал базисных векторов ${}_l\mathbf{n}_K$

$$\mathcal{D}\,{}_l\mathbf{n}_K = D\,{}_l\mathbf{n}_K - {}_l\mathbf{n}_N \cdot \Gamma^N{}_{KL} \cdot dx^L\,. \tag{46}$$

Соответственно ковариантная производная имеет вид

$${}_l\mathbf{n}_{K;L} = X_L({}_l\mathbf{n}_K) - {}_l\mathbf{n}_N \cdot \Gamma^N{}_{KL}\,.$$

Приведем частные случаи указанного ковариантного дифференциала.

1.

$$D\,{}_l\mathbf{n}_K = d\,{}_l\mathbf{n}_K\,.$$

Тогда ковариантный дифференциал базисных векторов ${}_l\mathbf{n}_K$ приобретает вид

$$\mathcal{D}\,{}_l\mathbf{n}_K = d\,{}_l\mathbf{n}_K - {}_l\mathbf{n}_N \cdot \Gamma^N{}_{KL} \cdot dx^L\,,$$

а ковариантная производная

$${}_l\mathbf{n}_{K;L} = \frac{\partial\,{}_l\mathbf{n}_K}{\partial x^L} - {}_l\mathbf{n}_N \cdot \Gamma^N{}_{KL}\,.$$

2.

$$\mathcal{D}\,{}_l\mathbf{n}_K = 0\,.$$

В этом случае

$$D\,{}_l\mathbf{n}_K = {}_l\mathbf{n}_N \cdot \Gamma^N{}_{KL} \cdot dx^L$$

откуда

$$\Gamma^N{}_{KL} = {}_l\mathbf{N}^N \cdot X_L({}_l\mathbf{n}_K)\,.$$

3. Случай, когда имеют место оба предыдущих частных условия

$$\mathcal{D}\,{}_l\mathbf{n}_K = 0\,, \qquad D\,{}_l\mathbf{n}_K = d\,{}_l\mathbf{n}_K\,.$$

В этом случае

$$\frac{\partial\,{}_l\mathbf{n}_K}{\partial x^L} = {}_l\mathbf{n}_I \cdot \Gamma^I{}_{KL}\,,$$

откуда

$$\Gamma^I{}_{KL} = {}_l\mathbf{N}^I \cdot {}_l\mathbf{n}_{K,L}\,. \tag{47}$$

Можно показать, что в этом случае тензор кривизны искривленного пространства тождественно равен нулю[12]

$$R^I{}_{KLM} = \Gamma^I{}_{KL,M} - \Gamma^I{}_{KM,L} + \\ +\Gamma^I{}_{NM} \cdot \Gamma^N{}_{KL} - \Gamma^I{}_{NL} \cdot \Gamma^N{}_{KM} \equiv 0\,.$$

[12] Доказательство этого утверждения аналогично тому, которое приводится в Разделе IV.3. Главы 2.3.

2.2. Дифференцирование левого метрического тензора представления

Приведем два варианта дифференцирования левого метрического тензора представления. В одном из них используются базисные векторы, в другом – нет.

Первый вариант.

Возьмем ковариантный дифференциал от соотношения, определяющего левый метрический тензор представления

$${}_lg_{K_1K_2} = ({}_l\mathbf{n}_{K_1} \cdot {}_l\mathbf{n}_{K_2})\,. \tag{48}$$

Получим

$$\mathcal{D}\,{}_lg_{K_1K_2} = (\mathcal{D}\,{}_l\mathbf{n}_{K_1} \cdot {}_l\mathbf{n}_{K_2}) + ({}_l\mathbf{n}_{K_1} \cdot \mathcal{D}\,{}_l\mathbf{n}_{K_2})\,.$$

Далее воспользуемся ковариантным дифференциалом базисных векторов (46), сгруппируем слагаемые и воспользуемся формулой (48). В результате получим ковариантный дифференциал метрического тензора представления

$$\begin{gathered}\mathcal{D}\,{}_lg_{K_1K_2} = D\,{}_lg_{K_1K_2} - \\ - {}_lg_{NK_2} \cdot \Gamma^N{}_{K_1L} \cdot dx^L - {}_lg_{K_1N} \cdot \Gamma^N{}_{K_2L} \cdot dx^L\,.\end{gathered} \tag{49}$$

Ковариантному дифференциалу метрического тензора представления соответствует ковариантная производная

$${}_lg_{K_1K_2;L} = X_L({}_lg_{K_1K_2}) - {}_lg_{NK_2} \cdot \Gamma^N{}_{K_1L} - {}_lg_{K_1N} \cdot \Gamma^N{}_{K_2L}\,. \tag{50}$$

Второй вариант.

В этом случае исходим из преобразования метрического тензора представления (36)

$$g_{I_1I_2} \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot l^{I_2}{}_{K_2} = {}_lg_{K_1K_2}\,.$$

Рассмотрим искривленный дифференциал этого выражения. Имеем

$$Dg_{I_1I_2} \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot l^{I_2}{}_{K_2} + g_{I_1I_2} \cdot Dl^{I_1}{}_{K_1} \cdot l^{I_2}{}_{K_2} + \\ + g_{I_1I_2} \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot Dl^{I_2}{}_{K_2} = D\,{}_lg_{K_1K_2}\,.$$

Учтем, что первое слагаемое в левой части представляет собой ковариантный дифференциал метрического тензора представления ${}_lg_{K_1K_2}$

$$Dg_{I_1I_2} \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot l^{I_2}{}_{K_2} = \mathcal{D}\,{}_lg_{K_1K_2}\,.$$

Кроме того, учтем, что второе слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$g_{I_1I_2} \cdot l^{I_1}{}_N \cdot (\tilde{l}^N{}_M \cdot Dl^M{}_{K_1}) \cdot l^{I_2}{}_{K_2} = {}_lg_{NK_2} \cdot \Gamma^N{}_{K_1L} \cdot dx^L\,.$$

Кроме того, учтем, что третье слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$g_{I_1I_2} \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot l^{I_2}{}_N \cdot (\tilde{l}^N{}_M \cdot Dl^M{}_{K_2}) = {}_lg_{K_1N} \cdot \Gamma^N{}_{K_2L} \cdot dx^L\,.$$

В результате получим ковариантный дифференциал метрического тензора ${}_{\iota}g_{K_1K_2}$, совпадающий с выражением (49).

Из соотношения (48) следует, что равенство нулю ковариантной производной от метрического тензора представления

$$ {}_{\iota}g_{K_1K_2;L} = 0 $$

эквивалентно равенству нулю ковариантной производной от базисных векторов ${}_{\iota}\mathbf{n}_K$

$$ {}_{\iota}\mathbf{n}_{K;L} = 0\,. $$

3. Третий дифференциал. Объект кривизны

Дифференцируя соотношение (37), получим следующее соответствие между третьими дифференциалами:

$$ D^3\,{}_{\iota}\mathbf{y} \;\sim\; D^3\,{}_{\iota}\mathcal{Y}\,. \tag{51} $$

Запишем дифференциал $D^3\,{}_{\iota}\mathbf{y}$ с учетом равенства (44). Получим

$$ \begin{aligned} D(D^2\,{}_{\iota}\mathbf{y}) = {}_{\iota}\mathbf{l}\circ D(d^2\mathbf{x} + (\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x}) + \\ D\,{}_{\iota}\mathbf{l}\circ(d^2\mathbf{x} + (\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\,. \end{aligned} \tag{52} $$

Это выражение преобразуем, учитывая, во-первых, что

$$ D(d^2\mathbf{x}) = d(d^2\mathbf{x}) $$

и, во-вторых, подчиним $D(\boldsymbol{\Gamma})$ – искривленный дифференциал от $\boldsymbol{\Gamma}$ – соотношениям, аналогичным выражениям (29) и (40):

$$ D\boldsymbol{\Gamma} = d\boldsymbol{\Gamma} + \delta\boldsymbol{\Gamma}\,. \tag{53} $$

Далее вектор $D\boldsymbol{\Gamma}$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть

$$ D\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r}\circ d\mathbf{x}\,. \tag{54} $$

Здесь $\mathbf{r}$ – линейное преобразование, для которого

$$ {}_{\iota}\mathbf{l}\circ\mathbf{r} \in {}_{\iota}\mathbb{B}. $$

Полагая также

$$ \delta\boldsymbol{\Gamma} = \rho\circ d\mathbf{x}\,, $$

соотношение (53) можно записать так:

$$ D\boldsymbol{\Gamma} = d\boldsymbol{\Gamma} + \rho\circ d\mathbf{x}\,. $$

Сравнивая это выражение и равенство (54), получим

$$ \mathbf{r}\circ d\mathbf{x} = d\boldsymbol{\Gamma} + \rho\circ d\mathbf{x}\,. \tag{55} $$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\mathbf{r}$ и ρ

$$ \begin{gathered} d\mathbf{x} = \mathbf{e}_I\cdot dx^I\,,\quad \boldsymbol{\Gamma} = {}_{\iota}\mathbf{J}^{LK}{}_I\cdot\Gamma^I{}_{KL}\,, \\ \mathbf{r} = {}_{\iota}\mathbf{n}^{MLK}{}_I\cdot r^I{}_{KLM}\,,\quad \rho = {}_{\iota}\mathbf{n}^{MLK}{}_I\cdot\gamma^I{}_{KLM} \end{gathered} $$

и правила произведения базисных векторов (16) и (18), получим уравнение (55) в координатной записи:

$$ r^I{}_{KLM}\cdot dx^M = d\Gamma^I{}_{KL} + \gamma^I{}_{KLM}\cdot dx^M\,. \tag{56} $$

Отсюда

$$ r^I{}_{KLM} = \Gamma^I{}_{KL,M} + \gamma^I{}_{KLM}\,. $$

Подставляя соотношения (41) и (54) в выражение (52), имеем

$$ \begin{aligned} D(D^2\,{}_{\iota}\mathbf{y}) = {}_{\iota}\mathbf{l}\circ\big(d^3\mathbf{x} + (\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d^2\mathbf{x} + \\ (\boldsymbol{\Gamma}\circ d^2\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} + ((\mathbf{r}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} + \\ (\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d^2\mathbf{x} + (\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ(\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x}\big)\,. \end{aligned} \tag{57} $$

Из этого выражения выделим два слагаемых

$$ ((\mathbf{r}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} \quad\text{и}\quad (\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ(\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} $$

и введем следующее обозначение:

$$ \begin{aligned} ((\mathbf{R}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} \equiv \\ ((\mathbf{r}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} + (\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ(\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x}\,. \end{aligned} \tag{58} $$

Величина $\mathbf{R}$ представляет собой *объект кривизны* левого поля. Воспользовавшись координатной записью векторов $d\mathbf{x}$ и $\mathbf{R}$

$$ d\mathbf{x} = \mathbf{e}_I\cdot dx^I\,,\quad \mathbf{R} = {}_{\iota}\mathbf{n}^{MLK}{}_I\cdot R^I{}_{KLM} $$

и правилами произведения базисных векторов (16) и (18), получим координатную запись правой части соотношения (58)

$$ \begin{aligned} &((\mathbf{R}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} = \\ &\quad = (((\mathbf{n}^{MLK}{}_I\cdot R^I{}_{KLM})\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} = \\ &\quad = \mathbf{e}_I\cdot R^I{}_{KLM}\cdot dx^K\cdot dx^L\cdot dx^M\,. \end{aligned} $$

Вычислим координатную запись слагаемых в левой части соотношения (58):

$$ \begin{aligned} &((\mathbf{r}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} = \\ &\quad \mathbf{e}_I\cdot(\gamma^I{}_{KLM} + \Gamma^I{}_{KL,M})\cdot dx^K\cdot dx^L\cdot dx^M\,. \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} &(\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ(\boldsymbol{\Gamma}\circ d\mathbf{x})\circ d\mathbf{x} = \\ &\quad \mathbf{e}_I\cdot\Gamma^I{}_{NM}\cdot\Gamma^N{}_{KL}\cdot dx^K\cdot dx^L\cdot dx^M\,. \end{aligned} $$

В результате для координат объекта кривизны левого поля получим

$$ R^I{}_{KLM} = \gamma^I{}_{KLM} + \Gamma^I{}_{KL,M} + \Gamma^I{}_{NM}\cdot\Gamma^N{}_{KL}\,. $$

4. Кинематическое поле внешней симметрии

4.1. Кинематическая группа внешней симметрии

В Главе 1.5. левая алгебра линейных преобразований ${}_l\mathbb{L}$ рассматривалась как линейная часть непрерывной левой группы ${}_l\mathbb{G}$. Эта группа была названа кинематической группой *внешней симметрии*.[13] Например, по нашим представлениям группа гравитации является подгруппой кинематической группы внешней симметрии ${}_l\mathbb{G}$.

В продолжение указанного определения группы ${}_l\mathbb{G}$ левое кинематическое поле в Разделе III.3 Главы 1.7. было названо *кинематическим полем внешней симметрии*. Например, гравитационное поле отнесем к кинематическому полю внешней симметрии.

4.2. Кинематическое поле внешней симметрии

Кинематическое поле внешней симметрии (левое поле) определяется тремя наборами функций, каждая из которых зависит от точек пространства-времени.

Первый набор функций определяется на основании дифференциала вектора движущегося пространства[14]

$$D\,{}_ly^I = {}_ll^I{}_K \cdot dx^K\,. \tag{59}$$

Отсюда к первому набору функций кинематического поля внешней симметрии относятся зависимости

$${}_l\mathbf{l}(x)\,, \qquad {}_ll^I{}_K(x)\,,$$

а для параметрического представления это зависимость

$${}_ll^I{}_K(\varphi(x))\,.$$

Таким образом, к первому набору функций кинематического поля внешней симметрии отнесены поле левого линейного преобразования, его координат и поле параметров представления этого преобразования

$${}_l\mathbf{l}(x)\,, \quad {}_ll^I{}_K(x)\,, \quad {}_l\varphi^\alpha(x)\,.$$

Второй набор функций кинематического поля внешней симметрии определяется на основании дифференциала линейного преобразования

$$D\,{}_ll^I{}_{K_1} = d\,{}_ll^I{}_{K_1} + {}_ll'^I{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2}\,. \tag{60}$$

Этими функциями являются коэффициенты

$${}_l\mathbf{a}\,, \qquad {}_ll'^I{}_{K_1K_2}\,.$$

Используем матрицу обратного линейного преобразования ${}_l\tilde{l}^K{}_I$, для которой

$${}_ll^I{}_K \cdot {}_l\tilde{l}^K{}_{I_1} = \delta^I{}_{I_1}\,, \qquad {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_ll^I{}_{K_1} = \delta^K{}_{K_1}\,,$$

и перейдем от коэффициентов ${}_ll'^I{}_{K_1K_2}$ к коэффициентам

$$\Gamma^K{}_{K_1K_2} = {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_ll'^I{}_{K_1K_2}\,,$$

которые называются *коэффициентами связности* кинематического поля внешней симметрии.

Таким образом, к *второму* набору функций кинематического поля внешней симметрии отнесены поле второго левого линейного преобразования, его координат и поле коэффициентов связности

$${}_l\mathbf{a}(x)\,, \quad {}_ll^I{}_{K_1K_2}(x)\,, \quad \Gamma^K{}_{K_1K_2(x)}\,.$$

Третий набор функций кинематического поля внешней симметрии определяется на основании дифференциала

$$D\,{}_ll^I{}_{K_1K_2} = d\,{}_ll^I{}_{K_1K_2} + {}_ll'^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3}\,. \tag{61}$$

Этими функциями являются коэффициенты

$${}_l\mathbf{b}\,, \quad {}_ll'^I{}_{K_1K_2K_3}\,.$$

Используя матрицу обратного линейного преобразования, перейдем от коэффициентов ${}_ll'^I{}_{K_1K_2K_3}$ к коэффициентам

$$R^K{}_{K_1K_2K_3} = {}_l\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_ll'^I{}_{K_1K_2K_3}\,,$$

которые называются *объектом кривизны* кинематического поля внешней симметрии.[15]

Таким образом, к *третьему* набору функций кинематического поля внешней симметрии отнесены поле третьего левого линейного преобразования, его координат и поле объекта кривизны

$${}_l\mathbf{b}(x)\,, \quad {}_ll^I{}_{K_1K_2K_3}(x)\,, \quad R^K{}_{K_1K_2K_3}(x)\,.$$

VII. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРАВОГО ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В этом Разделе система отсчета $\mathbb{X}$ рассматривается как векторное пространство, умножение векторов в

[13] Термин *внешняя симметрия*, с одной стороны, продиктован представлением о *внутренней симметрии*, используемой в современной физике, а, с другой стороны, введен для подчеркивания отличия рассматриваемой симметрии от внутренней симметрии.

[14] Дифференциал, относящийся к движущемуся пространству, обозначен символом D.

[15] Антисимметризация объекта кривизны по коэффициентам K_2 и K_3 приводит к величине, назывемой тензором кривизны поля внешней симметрии.

котором сводится к скалярному умножению. В этом случае левые векторы не отличимы от правых, то есть

$$ {}_l\mathbf{x} \equiv {}_r\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}\,. $$

Задача представления правого искривленного пространства-времени в системе отсчета решается в два этапа.

На первом этапе устанавливается соответствие между векторами ${}_r\mathcal{Y}$ искривленного пространства ${}_r\mathbb{Y}$ и векторами ${}_r\mathbf{y}$ движущегося пространства ${}_r\mathbb{X}'$

$$ {}_r\mathbf{y} \sim {}_r\mathcal{Y}\,. $$

На втором этапе установленный вектор ${}_r\mathbf{y}$ движущегося пространства ${}_r\mathbb{X}'$ рассматривается как функция вектора $\mathbf{x}$ системы отсчета $\mathbb{X}$

$$ {}_r\mathbf{y} = {}_r f(\mathbf{x})\,, $$

где ${}_r\mathbf{y} \in {}_r\mathbb{X}'$, а $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

Указанная функциональная зависимость задается рядом Тейлора для правых векторов

$$ \begin{aligned} &{}_r\mathbf{y}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = {}_r\mathbf{y}(\mathbf{x}) + d\mathbf{x}\circ {}_r\mathbf{l}(\mathbf{x}) + \\ &+d_1\mathbf{x}\circ(d_2\mathbf{x}\circ {}_r\mathbf{a}(\mathbf{x})) + \\ &+d_1\mathbf{x}\circ(d_2\mathbf{x}\circ(d_3\mathbf{x}\circ {}_r\mathbf{b}(\mathbf{x}))) + \ldots \end{aligned} \qquad (62) $$

Перейдем к координатной записи ряда Тейлора. Для этого запишем векторы через базисные векторы и координаты

$$ {}_r\mathbf{y} = \mathbf{e}_I \cdot {}_r y^I\,, \quad d\mathbf{x} = \mathbf{e}_L \cdot dx^L\,, $$

$$ {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^K{}_I \cdot {}_r l^I{}_K\,, \quad {}_r\mathbf{a} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_r l^I{}_{K_1K_2}\,, $$

$$ {}_r\mathbf{b}\circ d\mathbf{x} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I \cdot {}_r l^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot dx^{K_3} $$

и учтем следующие законы умножения базисных векторов в правой алгебре

$$ \mathbf{e}_L \circ {}_r\mathbf{I}^K{}_I = \delta^K{}_L \cdot \mathbf{e}_I\,, $$

$$ \mathbf{e}_L \circ {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I = \delta^{K_2}{}_L \cdot {}_r\mathbf{I}^{K_1}{}_I\,, $$

Получим

$$ \begin{aligned} &{}_r y^I(x+dx) = {}_r y^I(x) + {}_r l^I{}_K \cdot dx^K + \\ &+{}_r l^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ &+{}_r l^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \ldots \end{aligned} \qquad (63) $$

В ряде случаев мы будем использовать переобозначение ${}_r l \to L$. Тогда выражение (63) упрощается:

$$ \begin{aligned} &{}_r y^I(x+dx) = {}_r y^I(x) + L^I{}_K \cdot dx^K + \\ &+L^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ &+L^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \ldots \end{aligned} \qquad (64) $$

Помимо ряда Тейлора (62), будем обращаться к ряду Тейлора, в котором использованы потенциал правого поля $\mathbf{A}$ и объект правого поля $\mathbf{F}$:

$$ \begin{aligned} &{}_r\mathbf{y}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = {}_r\mathbf{y}(\mathbf{x}) + d\mathbf{x}\circ {}_r\mathbf{l}(\mathbf{x}) + \\ &+d_1\mathbf{x}\circ(d_2\mathbf{x}\circ(\mathbf{A}\circ {}_r\mathbf{l})) + \\ &+d_1\mathbf{x}\circ(d_2\mathbf{x}\circ(d_3\mathbf{x}\circ(\mathbf{F}\circ {}_r\mathbf{l}))) + \ldots \end{aligned} \qquad (65) $$

Это выражение по отношению к координатам приобретает вид

$$ \begin{aligned} &{}_r y^I(x^K+dx^K) = {}_r y^I(x^K) + L^I{}_K \cdot dx^K + \\ &+L^I{}_K \cdot A^K{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ &+L^I{}_K \cdot F^K{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \\ &+L^I{}_K \cdot F^K{}_{K_1K_2K_3K_4} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} \cdot d_4x^{K_4} \ldots \end{aligned} \qquad (66) $$

Здесь

$$ A^K{}_{K_1K_2} = \tilde{L}^K{}_I \cdot L^I{}_{K_1K_2} \equiv \tilde{L}^K{}_I \cdot \frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^{K_2}} \qquad (67) $$

– потенциалы правого поля,

$$ F^K{}_{K_1K_2K_3} = \tilde{L}^K{}_I \cdot L^I{}_{K_1K_2K_3} \equiv \tilde{L}^K{}_I \cdot \frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} \qquad (68) $$

– объект правого поля,

$$ F^K{}_{K_1K_2K_3K_4} = \tilde{L}^K{}_I \cdot L^I{}_{K_1K_2K_3K_4} \equiv \tilde{L}^K{}_I \cdot \frac{DL^I{}_{K_1K_2K_3}}{\partial x^{K_4}} \qquad (69) $$

– второй объект правого поля.

Раскрывая правую часть соотношения (67), получим калибровочное преобразование потенциалов правого поля[16]

$$ A^K{}_{K_1K_2} = \tilde{L}^K{}_I \cdot \frac{\partial L^I{}_{K_1}}{\partial x^{K_2}} + A'^K{}_{K_1K_2}\,. $$

Раскрывая правую часть соотношения (68), получим калибровочное преобразование объекта правого поля

$$ F^K{}_{K_1K_2K_3} = \tilde{L}^K{}_I \cdot \frac{\partial L^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} + F'^K{}_{K_1K_2K_2}\,. $$

Из выражения (68) следует, что объект правого поля можно записать следующим образом

$$ F^K{}_{K_1K_2K_3} = \frac{D(\tilde{L}^K{}_I \cdot L^I{}_{K_1K_2})}{\partial x^{K_3}} - \frac{D\tilde{L}^K{}_I}{\partial x^{K_3}} \cdot L^I{}_{K_1K_2}\,. $$

Первое слагаемое в правой части преобразуем следующим образом. Во-первых, учтем, что

$$ \tilde{L}^K{}_I \cdot L^I{}_{K_1K_2} = A^K{}_{K_1K_2}\,, $$

[16] Калибровочные преобразования оставляют инвариантными уравнения правого поля.

и, во-вторых, потребуем, чтобы[17]

$$\delta A^K{}_{K_1K_2} = 0\,.$$

Таким образом, в этом случае

$$\frac{DA^K{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} = \frac{\partial A^K{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}}\,.$$

Второе слагаемое в правой части преобразуем следующим образом. Во-первых, перепишем его так:

$$\left(\frac{D\tilde{L}^K{}_{I_4}}{\partial x^{K_3}} \cdot L^{I_4}{}_{K_4}\right) \cdot \left(\tilde{L}^{K_4}{}_I \cdot L^I{}_{K_1K_2}\right)$$

и, во-вторых, учтем, что

$$\tilde{L}^{K_4}{}_I \cdot L^I{}_{K_1K_2} = A^{K_4}{}_{K_1K_2}$$

и[18]

$$\frac{D\tilde{L}^K{}_{I_4}}{\partial x^{K_3}} \cdot L^{I_4}{}_{K_4} = -A^K{}_{K_4K_3}\,.$$

С учетом выполненных преобразований получим выражение для объекта правого поля

$$F^K{}_{K_1K_2K_3} = \frac{\partial A^K{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} + A^K{}_{K_4K_3} \cdot A^{K_4}{}_{K_1K_2}\,.$$

После антисимметризации по индексам K_2K_3 получим тензор правого поля

$$\begin{aligned} F^K{}_{K_1[K_2K_3]} = {} & \frac{\partial A^K{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K_3}} - \frac{\partial A^K{}_{K_1K_3}}{\partial x^{K_2}} + \\ & + A^K{}_{K_4K_3} \cdot A^{K_4}{}_{K_1K_2} - A^K{}_{K_4K_2} \cdot A^{K_4}{}_{K_1K_3}\,. \end{aligned} \quad (70)$$

1. Первый дифференциал

Определение вектора $D\,{}_r\mathbf{y}$ движущегося пространства, соответствующего дифференциалу $D\,{}_r\mathcal{Y}$ в искривленном пространстве, поясним следующим рисунком.

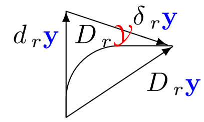


Рис. 2

Этот рисунок иллюстрирует то обстоятельство, что *соответствующие* векторы определяются из условия, что граничные точки искривленных тензоров и тензоров в движущемся пространстве совпадают.

Из Рис. 2 следует, что вектору $D\,{}_r\mathcal{Y}$ ставится в соответствие вектор

$$D\,{}_r\mathbf{y} = d\,{}_r\mathbf{y} + \delta\,{}_r\mathbf{y}\,. \quad (71)$$

Итак, следует записать

$$D\,{}_r\mathbf{y} \ \sim \ D\,{}_r\mathcal{Y}\,. \quad (72)$$

Вектор $D\,{}_r\mathbf{y}$ – это вектор движущегося пространства, связанного с системой отсчета линейным преобразованием. Поэтому запишем

$$D\,{}_r\mathbf{y} = d\mathbf{x} \circ {}_r\mathbf{l}\,. \quad (73)$$

Здесь ${}_r\mathbf{l}$ – линейное преобразование на $\mathbb{X}$, ${}_r\mathbf{l} \in {}_r\mathbb{L}$. Если воспользоваться координатной записью векторов $d\mathbf{x}$ и ${}_r\mathbf{l}$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot dx^K\,, \quad {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^M{}_I \cdot L^I{}_M$$

и правилами произведения базисных векторов (15), то получим координатную запись вектора $D\,{}_r\mathbf{y}$

$$D\,{}_r\mathbf{y} = \mathbf{e}_I \cdot L^I{}_K \cdot dx^K\,. \quad (74)$$

Воспользуемся обобщением формулы (7) Главы 2.2.

$$D\,{}_ry^I = L^I{}_K \cdot dx^K\,.$$

Получим

$$D\,{}_r\mathbf{y} = \mathbf{e}_I \cdot D\,{}_ry^I\,.$$

Вышеприведенные формулы показывают, что переход от системы отсчета к движущемуся пространству можно связать с преобразованием координат. Возможна другая точка зрения, когда переход от системы отсчета к движущемуся пространству связывается с преобразованием базисных векторов. Обозначим преобразованные базисные векторы (базисные векторы движущегося пространства) ${}_r\mathbf{n}_K$. При этом

$${}_r\mathbf{n}_K = \mathbf{e}_I \cdot L^I{}_K\,. \quad (75)$$

Для них

$$D\,{}_r\mathbf{y} = {}_r\mathbf{n}_K \cdot dx^K\,.$$

---

[17] См. Раздел IV.4 Главы 2.3.

[18] Действительно, из

$$\tilde{L}^K{}_{I_4} \cdot L^{I_4}{}_{K_4} = \delta^K{}_{K_4}$$

путем дифференцирования имеем

$$\frac{D\tilde{L}^K{}_{I_4}}{\partial x^{K_3}} \cdot L^{I_4}{}_{K_4} + \tilde{L}^K{}_{I_4} \cdot \frac{DL^{I_4}{}_{K_4}}{\partial x^{K_3}} = \frac{D\delta^K{}_{K_4}}{\partial x^{K_3}} = \frac{\partial\delta^K{}_{K_4}}{\partial x^{K_3}} = 0\,.$$

Отсюда

$$\frac{D\tilde{L}^K{}_{I_4}}{\partial x^{K_3}} \cdot L^{I_4}{}_{K_4} + A^K{}_{K_4K_3} = 0\,.$$

1.1. Правый метрический тензор представления

Соответствие векторов $D_r\mathcal{Y}$ и $D_r\mathbf{y}$ необходимо дополнить соответствием скалярных произведений

$$(D_r\mathcal{Y}\cdot D_r\mathcal{Y}) \quad \text{и} \quad (D_r\mathbf{y}\cdot D_r\mathbf{y}).$$

Если учесть, что

$$D_r\mathcal{Y}\cdot D_r\mathcal{Y} = D_r y^2\,,$$

где $D_r y$ – длина вектора $D_r\mathcal{Y}$ то

$$D_r\mathcal{Y}\cdot D_r\mathcal{Y} = D_r\mathbf{y}\cdot D_r\mathbf{y} = D_r y^2\,. \tag{76}$$

Учтем, что искривленный дифференциал от скалярной величины связан с обычным дифференциалом от этой величины следующим образом:

$$D_r y = f(_r y)\cdot d_r y\,.$$

Обозначим $_r s$ первообразную функции $f(_r y)$. Тогда

$$D_r y = d_r s$$

и

$$D_r\mathbf{y}\cdot D_r\mathbf{y} = d_r s^2\,.$$

Используя выражение (74), получим

$$d_r s^2 = D_r\mathbf{y}\cdot D_r\mathbf{y} = (\mathbf{e}_{I_1}\cdot\mathbf{e}_{I_2})\cdot L^{I_1}{}_{K_1}\cdot L^{I_2}{}_{K_2}\cdot dx^{K_1}\cdot dx^{K_2}$$

или

$$d_r s^2 = g_{I_1 I_2}\cdot L^{I_1}{}_{K_1}\cdot L^{I_2}{}_{K_2}\cdot dx^{K_1}\cdot dx^{K_2}\,, \tag{77}$$

где

$$g_{I_1 I_2} = (\mathbf{e}_{I_1}\cdot\mathbf{e}_{I_2})$$

– это метрический тензор системы отсчета; или с учетом (75)

$$d_r s^2 = (_r\mathbf{n}_{K_1}\cdot{}_r\mathbf{n}_{K_2})\cdot dx^{K_1}\cdot dx^{K_2}\,.$$

Введем *правый метрический тензор представления искривленного пространства в системе отсчета* (или короче *правый метрический тензор представления*)

$$_r g_{K_1 K_2} = (_r\mathbf{n}_{K_1}\cdot{}_r\mathbf{n}_{K_2})\,,$$

или

$$_r g_{K_1 K_2} = g_{I_1 I_2}\cdot L^{I_1}{}_{K_1}\cdot L^{I_2}{}_{K_2}\,. \tag{78}$$

Тогда

$$d_r s^2 = {}_r g_{k_1 k_2}\cdot dx^{k_1}\cdot dx^{k_2}\,.$$

2. Второй дифференциал. Уравнение правой геодезической

Дифференцируя соотношение (72), получим следующее соответствие между вторыми дифференциалами:

$$D^2{}_r\mathbf{y} \;\sim\; D^2{}_r\mathcal{Y}\,. \tag{79}$$

Запишем дифференциал $D^2{}_r\mathbf{y}$ с учетом (73). Получим

$$D(D_r\mathbf{y}) = D(d\mathbf{x}\circ{}_r\mathbf{l}) = D(d\mathbf{x})\circ{}_r\mathbf{l} + d\mathbf{x}\circ D(_r\mathbf{l})\,. \tag{80}$$

Это выражение преобразуем, имея в виду, во-первых, что

$$D(d\mathbf{x}) = d(d\mathbf{x})\,, \tag{81}$$

и, во-вторых, подчиним $D(_r\mathbf{l})$ – искривленный дифференциал от $_r\mathbf{l}$ – соотношениям, аналогичным (71):

$$D_r\mathbf{l} = d_r\mathbf{l} + \delta_r\mathbf{l}\,; \tag{82}$$

далее вектор $D_r\mathbf{l}$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть запишем

$$D_r\mathbf{l} = d\mathbf{x}\circ{}_r\mathbf{a}$$

или[19]

$$D_r\mathbf{l} = d\mathbf{x}\circ(\mathbf{A}\circ{}_r\mathbf{l})\,. \tag{83}$$

Здесь $_r\mathbf{a} = \mathbf{A}\circ{}_r\mathbf{l}\in{}_r\mathbb{A}$, а $\mathbf{A}$ – вектор, называемый *потенциалом* правого поля.

Полагая

$$\delta_r\mathbf{l} = d\mathbf{x}\circ(\mathbf{A}'\circ{}_r\mathbf{l})\,,$$

где также $\mathbf{A}'\circ{}_r\mathbf{l}\in{}_r\mathbb{A}$, соотношение (82) можно записать так:

$$D_r\mathbf{l} = d_r\mathbf{l} + d\mathbf{x}\circ\mathbf{A}'\circ{}_r\mathbf{l}\,.$$

Сравнивая это выражение и равенство (83), получим

$$d\mathbf{x}\circ\mathbf{A} = d_r\mathbf{l}\circ{}_r\tilde{\mathbf{l}} + d\mathbf{x}\circ\mathbf{A}'\,. \tag{84}$$

Здесь $_r\tilde{\mathbf{l}}$ – линейное преобразование, обратное линейному преобразованию $_r\mathbf{l}$, для которого

$$_r\mathbf{l}\circ{}_r\tilde{\mathbf{l}} = {}_r\mathbf{I}^{K}{}_{I}\cdot\delta^{I}{}_{K}\,.$$

---

[19] Порядок умножения сомножителей в правой части может быть любым. Далее мы воспользуемся следующим порядком умножения:

$$(d\mathbf{x}\circ\mathbf{A})\circ{}_r\mathbf{l}\,.$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$, ${}_r\mathbf{l}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot dx^K\,, \quad {}_r\mathbf{l} = {}_r\mathbf{I}^K{}_I \cdot L^I{}_K\,,$$
$$\mathbf{A} = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K \cdot A^K{}_{K_1K_2}\,, \quad \mathbf{A}' = {}_r\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_K \cdot A'^K{}_{K_1K_2}$$

и правила произведения базисных векторов (17), получим уравнение (84) в координатной записи

$$A^K{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2} = \tilde{L}^K{}_I \cdot dL^I{}_{K_1} + A'^K{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2}\,.$$

Отсюда

$$A^K{}_{K_1K_2} = \tilde{L}^K{}_I \cdot L^I{}_{K_1,K_2} + A'^K{}_{K_1K_2}\,. \qquad (85)$$

Здесь и далее индекс, отделенный запятой, означает частное дифференцирование по координате с этим индексом. Например, в нашем случае

$$L^I{}_{K_1,K_2} = \frac{\partial L^I{}_{K_1}}{\partial x^{K_2}}\,.$$

Подставляя соотношения (81) и (83) в выражение (80), имеем

$$D(D\,{}_r\mathbf{y}) = d(d\mathbf{x}) \circ {}_r\mathbf{l} + d\mathbf{x} \circ ((d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) \circ {}_r\mathbf{l})\,.$$

Далее учтем, что скобки в последнем слагаемом могут быть записаны иначе:

$$d\mathbf{x} \circ ((d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) \circ {}_r\mathbf{l}) = (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A})) \circ {}_r\mathbf{l}\,.$$

Поэтому запишем

$$D(D\,{}_r\mathbf{y}) = (d^2\mathbf{x} + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A})) \circ {}_r\mathbf{l}\,. \qquad (86)$$

В Главе 2.1. отмечено, что уравнение геодезической в нормальной системе координат искривленного пространства имеет вид

$$\frac{D^2\mathcal{Y}}{Dy^2} = 0\,.$$

Опираясь на рассмотренное соответствие, имеем

$$\frac{D^2\,{}_r\mathbf{y}}{D\,{}_ry^2} \sim \frac{D^2\,{}_r\mathcal{Y}}{D\,{}_ry^2}\,.$$

Поэтому уравнение *правой* геодезической в движущемся пространстве следует записать так:

$$\frac{D^2\,{}_r\mathbf{y}}{D\,{}_ry^2} = 0\,.$$

Учитывая соотношение (44) и то обстоятельство, что

$$\det ||L^I{}_K|| \neq 0\,,$$

приходим к инвариантному уравнению правой геодезической в системе отсчета

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\,{}_rs^2} + \frac{d\mathbf{x}}{d\,{}_rs} \circ \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\,{}_rs} \circ \mathbf{A}\right) = 0\,. \qquad (87)$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$ и $\mathbf{A}$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_K \cdot dx^K\,, \quad \mathbf{A} = {}_rJ^{K_2K_1}{}_K \cdot A^K{}_{K_1K_2}$$

и правила произведения базисных векторов (17), получим уравнение правой геодезической относительно координат системы отсчета

$$\frac{d^2x^K}{d\,{}_rs^2} + A^K{}_{K_1K_2} \cdot \frac{dx^{K_1}}{d\,{}_rs} \cdot \frac{dx^{K_2}}{d\,{}_rs} = 0\,.$$

2.1. Дифференцирование базисных векторов ${}_r\mathbf{n}_K$

Обратимся к базисным векторам движущегося пространства (75)

$$\mathbf{e}_I \cdot L^I{}_K = {}_r\mathbf{n}_K\,.$$

Рассмотрим искривленный дифференциал этого выражения. Имеем

$$D\mathbf{e}_I \cdot L^I{}_K + \mathbf{e}_I \cdot DL^I{}_K = D\,{}_r\mathbf{n}_K\,.$$

Учтем, что первое слагаемое в левой части представляет собой ковариантный дифференциал базисных векторов ${}_r\mathbf{n}_K$

$$D\mathbf{e}_I \cdot L^I{}_K = \mathcal{D}\,{}_r\mathbf{n}_K\,.$$

Кроме того, учтем, что второе слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$(\mathbf{e}_I \cdot L^I{}_N) \cdot (\tilde{L}^N{}_M \cdot DL^M{}_K) = {}_r\mathbf{n}_N \cdot A^N{}_{KL} \cdot dx^L\,.$$

В результате получим ковариантный дифференциал базисных векторов ${}_r\mathbf{n}_K$

$$\mathcal{D}\,{}_r\mathbf{n}_K = D\,{}_r\mathbf{n}_K - {}_r\mathbf{n}_N \cdot A^N{}_{KL} \cdot dx^L\,. \qquad (88)$$

Соответственно ковариантная производная имеет вид

$${}_r\mathbf{n}_{K;L} = X_L({}_r\mathbf{n}_K) - {}_r\mathbf{n}_N \cdot A^N{}_{KL}\,.$$

Приведем частные случаи указанного ковариантного дифференциала.

1.

$$D\,{}_r\mathbf{n}_K = d\,{}_r\mathbf{n}_K\,.$$

Тогда ковариантный дифференциал базисных векторов ${}_r\mathbf{n}_K$ приобретает вид

$$\mathcal{D}\,{}_r\mathbf{n}_K = d\,{}_r\mathbf{n}_K - {}_r\mathbf{n}_N \cdot A^N{}_{KL} \cdot dx^L\,,$$

а ковариантная производная

$${}_r\mathbf{n}_{K;L} = \frac{\partial\,{}_r\mathbf{n}_K}{\partial x^L} - {}_r\mathbf{n}_N \cdot A^N{}_{KL}\,.$$

2.

$$\mathcal{D}\,{}_r\mathbf{n}_K = 0\,.$$

В этом случае

$$D\,{}_r\mathbf{n}_K = {}_r\mathbf{n}_N \cdot A^N{}_{KL} \cdot dx^L\,.$$

Откуда

$$A^N{}_{KL} = {}_r\mathbf{N}^N \cdot X_L({}_r\mathbf{n}_K)\,.$$

3. Случай, когда имеют место оба предыдущих частных условия:

$$\mathcal{D}\,{}_r\mathbf{n}_K = 0\,, \qquad D\,{}_r\mathbf{n}_K = d\,{}_r\mathbf{n}_K\,.$$

В этом случае

$$\frac{\partial\,{}_r\mathbf{n}_K}{\partial x^L} = {}_r\mathbf{n}_I \cdot A^I{}_{KL}\,.$$

Откуда

$$A^I{}_{KL} = {}_r\mathbf{N}^I \cdot {}_r\mathbf{n}_{K,L}\,. \tag{89}$$

Можно показать, что в этом случае тензор правого поля искривленного пространства тождественно равен нулю[20]:

$$F^I{}_{KLM} = A^I{}_{KL,M} - A^I{}_{KM,L} + \\ + A^I{}_{NM} \cdot A^N{}_{KL} - A^I{}_{NL} \cdot A^N{}_{KM} \equiv 0\,.$$

2.2. *Дифференцирование правого метрического тензора представления*

Приведем два варианта дифференцирования правого метрического тензора представления. В одном из них используются базисные векторы, в другом – нет.

Первый вариант.

Возьмем ковариантный дифференциал от соотношения, определяющего правый метрический тензор представления

$${}_rg_{K_1K_2} = ({}_r\mathbf{n}_{K_1} \cdot {}_r\mathbf{n}_{K_2})\,. \tag{90}$$

Получим

$$\mathcal{D}\,{}_rg_{K_1K_2} = (\mathcal{D}\,{}_r\mathbf{n}_{K_1} \cdot {}_r\mathbf{n}_{K_2}) + ({}_r\mathbf{n}_{K_1} \cdot \mathcal{D}\,{}_r\mathbf{n}_{K_2})\,.$$

Далее воспользуемся ковариантным дифференциалом базисных векторов (88), сгруппируем слагаемые и воспользуемся формулой (90). В результате получим ковариантный дифференциал метрического тензора представления

$$\mathcal{D}\,{}_rg_{K_1K_2} = D\,{}_rg_{K_1K_2} - \\ - {}_rg_{NK_2} \cdot A^N{}_{K_1L} \cdot dx^L - {}_rg_{K_1N} \cdot A^N{}_{K_2L} \cdot dx^L\,. \tag{91}$$

[20] Доказательство этого утверждения аналогично тому, которое приводится в Разделе IV.3. Главы 2.3.

Ковариантному дифференциалу метрического тензора представления соответствует ковариантная производная

$${}_rg_{K_1K_2;L} = X_L({}_rg_{K_1K_2}) - {}_rg_{NK_2} \cdot A^N{}_{K_1L} - {}_rg_{K_1N} \cdot A^N{}_{K_2L}\,. \tag{92}$$

Второй вариант.

В этом случае исходим из преобразования правого метрического тензора представления (78)

$$g_{I_1I_2} \cdot L^{I_1}{}_{K_1} \cdot L^{I_2}{}_{K_2} = {}_rg_{K_1K_2}\,.$$

Рассмотрим искривленный дифференциал этого выражения. Имеем

$$Dg_{I_1I_2} \cdot L^{I_1}{}_{K_1} \cdot L^{I_2}{}_{K_2} + g_{I_1I_2} \cdot DL^{I_1}{}_{K_1} \cdot L^{I_2}{}_{K_2} + \\ + g_{I_1I_2} \cdot L^{I_1}{}_{K_1} \cdot DL^{I_2}{}_{K_2} = D\,{}_rg_{K_1K_2}\,.$$

Учтем, что первое слагаемое в левой части представляет собой ковариантный дифференциал метрического тензора представления ${}_rg_{K_1K_2}$

$$Dg_{I_1I_2} \cdot L^{I_1}{}_{K_1} \cdot L^{I_2}{}_{K_2} = \mathcal{D}\,{}_rg_{K_1K_2}\,.$$

Кроме того, учтем, что второе слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$g_{I_1I_2} \cdot L^{I_1}{}_N \cdot (\tilde{L}^N{}_M \cdot DL^M{}_{K_1}) \cdot L^{I_2}{}_{K_2} = {}_rg_{NK_2} \cdot A^N{}_{K_1L} \cdot dx^L.$$

Кроме того, учтем, что третье слагаемое в левой части может быть записано следующим образом:

$$g_{I_1I_2} \cdot L^{I_1}{}_{K_1} \cdot L^{I_2}{}_N \cdot (\tilde{L}^N{}_M \cdot DL^M{}_{K_2}) = {}_rg_{K_1N} \cdot A^N{}_{K_2L} \cdot dx^L.$$

В результате получим ковариантный дифференциал метрического тензора ${}_rg_{K_1K_2}$, совпадающий с выражением (91).

Отметим, что из соотношения (90) следует, что равенство нулю ковариантной производной от метрического тензора представления

$${}_rg_{K_1K_2;L} = 0$$

эквивалентно равенству нулю ковариантной производной от базисных векторов ${}_r\mathbf{n}_K$

$${}_r\mathbf{n}_{K;L} = 0\,.$$

3. Третий дифференциал. Объект правого поля

Дифференцируя соотношение (79), получим следующее соответствие между третьими дифференциалами

$$D^3\,{}_r\mathbf{y} \;\sim\; D^3\,{}_r\mathcal{Y}\,. \tag{93}$$

Запишем дифференциал $D^3\,{}_r\mathbf{y}$ с учетом выражения (86). Получим

$$D(D^2\,{}_r\mathbf{y}) = D(d^2\mathbf{x} + (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}))) \circ {}_r\mathbf{l} + \\ (d^2\mathbf{x} + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A})) \circ D\,{}_r\mathbf{l}\,. \tag{94}$$

Это выражение преобразуем, учитывая, во-первых, что

$$D(d^2\mathbf{x}) = d(d^2\mathbf{x})$$

и, во-вторых, подчиним $D(\mathbf{A})$ – искривленный дифференциал от $\mathbf{A}$ – соотношениям, аналогичным выражениям (71) и (82):

$$D\mathbf{A} = d\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}\,. \tag{95}$$

Далее вектор $D\mathbf{A}$ будем рассматривать как линейно преобразованный вектор $d\mathbf{x}$, то есть

$$D\mathbf{A} = d\mathbf{x} \circ \mathbf{f}\,. \tag{96}$$

Здесь $\mathbf{f}$ – линейное преобразование, для которого

$$\mathbf{f} \circ {}_r\mathbf{l} \in {}_r\mathbb{B}.$$

Полагая также

$$\delta\mathbf{A} = d\mathbf{x} \circ \varphi\,,$$

соотношение (95) можно записать так:

$$D\mathbf{A} = d\mathbf{A} + d\mathbf{x} \circ \varphi\,.$$

Сравнивая это выражение и соотношение (96), получим

$$d\mathbf{x} \circ \mathbf{f} = d\mathbf{A} + d\mathbf{x} \circ \varphi\,. \tag{97}$$

Используя координатную запись векторов $d\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{f}$ и φ:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_I \cdot dx^I\,, \quad \mathbf{A} = {}_r\mathbf{J}^{LK}{}_I \cdot A^I{}_{KL}\,,$$
$$\mathbf{f} = {}_r\mathbf{n}^{MLK}{}_I \cdot f^I{}_{KLM}\,, \quad \varphi = {}_r\mathbf{n}^{MLK}{}_I \cdot \varphi^I{}_{KLM}$$

и правила произведения базисных векторов (17) и (19), получим уравнение (97) в координатной записи

$$f^I{}_{KLM} \cdot dx^M = dA^I{}_{KL} + \varphi^I{}_{KLM} \cdot dx^M\,. \tag{98}$$

Отсюда

$$f^I{}_{KLM} = A^I{}_{KL,M} + \varphi^I{}_{KLM}\,.$$

Подставляя соотношения (83) и (96) в выражение (94), имеем

$$\begin{aligned} D(D^2\,{}_r\mathbf{y}) = \big(&d^3\mathbf{x} + d^2\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) + \\ &+ d\mathbf{x} \circ (d^2\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \circ \mathbf{f})) + \\ &+ d^2\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A})\big) \circ {}_r\mathbf{l}\,. \end{aligned} \tag{99}$$

Из этого выражения выделим два слагаемых

$$d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{f})) \quad \text{и} \quad d\mathbf{x} \circ \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A})$$

и введем обозначение

$$\begin{aligned} &d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{F})) \equiv \\ &\quad d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{f})) + d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A})\,. \end{aligned} \tag{100}$$

Величина $\mathbf{F}$ называется *объектом* правого поля.

Воспользовавшись координатной записью векторов $d\mathbf{x}$ и $\mathbf{F}$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{e}_I \cdot dx^I\,, \quad \mathbf{F} = {}_r\mathbf{n}^{MLK}{}_I \cdot F^I{}_{KLM}$$

и правилами произведения базисных векторов (17) и (19), получим координатную запись правой части соотношения (100)

$$\begin{aligned} &d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{F})) = \\ &\quad = d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (\,{}_r\mathbf{n}^{MLK}{}_I \cdot F^I{}_{KLM}))) = \\ &\quad = \mathbf{e}_I \cdot F^I{}_{KLM} \cdot dx^K \cdot dx^L \cdot dx^M\,. \end{aligned}$$

Вычислим координатную запись слагаемых в левой части соотношения (100).

$$\begin{aligned} &d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{f})) = \\ &\quad = \mathbf{e}_I \cdot (\varphi^I{}_{KLM} + A^I{}_{KL,M}) \cdot dx^K \cdot dx^L \cdot dx^M\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &d\mathbf{x} \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) \circ (d\mathbf{x} \circ \mathbf{A}) = \\ &\quad = \mathbf{e}_I \cdot A^I{}_{NM} \cdot A^N{}_{KL} \cdot dx^K \cdot dx^L \cdot dx^M\,. \end{aligned}$$

В результате для координат объекта правого поля получим

$$F^I{}_{KLM} = \varphi^I{}_{KLM} + A^I{}_{KL,M} + A^I{}_{NM} \cdot A^N{}_{KL}\,.$$

Так же, как для левого поля, будем полагать, что при описании физических явлений необходимо полагать

$$D\mathbf{A} = d\mathbf{A}$$

или

$$\delta\mathbf{A} = 0$$

или

$$\varphi = 0\,.$$

В этом случае объект правого поля приобретает вид

$$F^I{}_{KLM} = A^I{}_{KL,M} + A^I{}_{NM} \cdot A^N{}_{KL}\,.$$

4. Кинематическое поле внутренней симметрии

4.1. Непрерывная группа внутренней симметрии

В Главе 1.5. правая алгебра линейных преобразований ${}_r\mathbb{L}$ рассматривалась как линейная часть непрерывной правой группы ${}_r\mathbb{G}$. Эта группа была названа кинематической группой *внутренней симметрии.*[21]

[21] Термин *внутренняя симметрия* используется здесь в том смысле, в котором он используется в современной физике.

Например, электрическая группа является группой внутренней симметрии и подобна подгруппе кинематической группы внутренней симметрии ${}_r\mathbb{G}$.

В продолжение указанного определения группы ${}_r\mathbb{G}$ правое кинематическое поле в Разделе III.3 Главы 1.7. было названо *кинематическим полем внутренней симметрии.* Электромагнитное поле отнесено к кинематическому полю внутренней симметрии.

4.2. Кинематическое поле внутренней симметрии

Кинематическое поле внутренней симметрии (правое поле) определяется тремя наборами функций, каждая из которых зависит от точек пространства-времени.

Первый набор функций определяется на основании дифференциала вектора движущегося пространства[22]

$$D\,{}_ry^I = {}_rl^I{}_K \cdot dx^K\,. \tag{101}$$

Отсюда к первому набору функций кинематического поля внутренней симметрии относятся зависимости

$${}_r\mathbf{l}(x)\,,\quad {}_rl^I{}_K(x)\,,$$

а для параметрического представления – это зависимость

$${}_rl^I{}_K(\varphi(x))\,.$$

Таким образом, к первому набору функций кинематического поля внутренней симметрии отнесены поле правого линейного преобразования, его координат и поле параметров представления этого преобразования

$${}_r\mathbf{l}(x)\,,\quad {}_rl^I{}_K(x)\,,\quad {}_r\varphi^\alpha(x)\,.$$

Второй набор функций кинематического поля внутренней симметрии определяется на основании дифференциала линейного преобразования

$$D\,{}_rl^I{}_{K_1} = d\,{}_rl^I{}_{K_1} + {}_rl'^I{}_{K_1K_2} \cdot dx^{K_2}\,. \tag{102}$$

Этими функциями являются коэффициенты

$${}_r\mathbf{a}\,,\quad {}_rl'^I{}_{K_1K_2}\,.$$

Используем матрицу обратного линейного преобразования ${}_r\tilde{l}^K{}_I$, для которой

$${}_rl^I{}_K \cdot {}_r\tilde{l}^K{}_{I_1} = \delta^I{}_{I_1}\,,\quad {}_r\tilde{l}^K{}_I \cdot {}_rl^I{}_{K_1} = \delta^K{}_{K_1}\,,$$

и перейдем от коэффициентов ${}_rl'^I{}_{K_1K_2}$ к коэффициентам

$$A^I{}_{I_1K_2} = {}_r\tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} \cdot {}_rl'^I{}_{K_1K_2}\,,$$

которые называются *потенциалами* кинематического поля внутренней симметрии.

Таким образом, к *второму* набору функций кинематического поля внутренней симметрии отнесены поле второго правого линейного преобразования, его координат и поле потенциалов

$${}_r\mathbf{a}(x)\,,\quad {}_rl^I{}_{K_1K_2}(x)\,,\quad A^K{}_{K_1K_2}(x)\,.$$

Третий набор функций кинематического поля внутренней симметрии определяется на основании дифференциала

$$D\,{}_rl^I{}_{K_1K_2} = d\,{}_rl^I{}_{K_1K_2} + {}_rl'^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d\,{}_rx^{K_3}\,. \tag{103}$$

Этими функциями являются коэффициенты

$${}_r\mathbf{b}\,,\quad {}_rl'^I{}_{K_1K_2K_3}\,.$$

Используя матрицу обратного линейного преобразования, перейдем от коэффициентов ${}_rl'^I{}_{K_1K_2K_3}$ к коэффициентам

$$F^I{}_{I_1K_2K_3} = {}_r\tilde{l}^{K_1}{}_{I_1} \cdot {}_rl'^I{}_{K_1K_2K_3}\,,$$

которые называются *объектом* кинематического поля внутренней симметрии.[23]

Таким образом, к *третьему* набору функций кинематического поля внутренней симметрии отнесены поле третьего правого линейного преобразования, его координат и поле объекта поля внутренней симметрии

$${}_r\mathbf{b}(x)\,,\quad {}_rl^I{}_{K_1K_2K_3}(x)\,,\quad F^I{}_{I_1K_2K_3}(x)\,.$$

VIII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Искривленное пространство-время $\mathbb{Y}$ представляет собой совокупность контравариантных тензоров всех рангов, использующих искривленное четырехмерное пространство-время как образующее пространство.
- Искривленное пространство-время $\mathbb{Y}$ является *универсальной контравариантной алгеброй*, так как на нем определено не только сложение контравариантных векторов, но и *универсальное* умножение этих векторов.
- Так как универсальное умножение является некоммутативным, то искривленное пространство-время $\mathbb{Y}$ выступвет в двух модификациях: *искривленная левая* универсальная контравариантная алгебра ${}_l\mathbb{Y}$ и *искривленная правая* универсальная контравариантная алгебра ${}_r\mathbb{Y}$ – в зависимости от порядка умножения векторов.

[22] Дифференциал, относящийся к движущемуся пространству, является искривленным и обозначен символом D.

[23] Антисимметризация объекта поля внутренней симметрии по коэффициентам K_2 и K_3 приводит к величине, назывемой тензором поля внутренней симметрии. В частных случаях этот тензор сводится к тензору Максвелла и тензору Янга-Миллса.

- Искривленное пространство-время $\mathbb{Y}$ представляется движущимся пространством-временем $\mathbb{X}'$; точнее, *искривленная левая* универсальная контравариантная алгебра ${}_l\mathbb{Y}$ представляется левым движущимся пространством-временем ${}_l\mathbb{X}'$, а *искривленная правая* универсальная контравариантная алгебра ${}_r\mathbb{Y}$ представляется правым движущимся пространством-временем ${}_r\mathbb{X}'$.

- Кинематическое поле в общем понимании – это поле векторов движущегося пространства $\mathbb{X}'$, поставленных в соответствие точкам системы отсчета, то есть это поле $\mathbf{y}(\mathbf{x})$. В детальном определении кинематическое поле – это поле коэффициентов разложения функции $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора. Это поля

  1) линейных преобразований $\mathbf{l}(\mathbf{x})$, $l^I{}_K(x)$,

  2) вторых линейных преобразований $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $l^I{}_{K_1K_2}(x)$,

  3) третьих линейных преобразований $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, $l^I{}_{K_1K_2K_3}(x)$.

- Движение пространства представляется кинематическими алгебрами различных порядков. В общем случае эти кинематические алгебры являются некоммутативными. Поэтому представление движения с помощью ряда Тейлора существует в двух модификациях: левые и правые представления. Отсюда возникает необходимость различать левые и правые кинематические поля. Левое кинематическое поле определено как *кинематическое поле внешней симметрии*. Правое кинематическое поле определено как *кинематическое поле внутренней симметрии*.

- Кинематическое поле внешней симметрии (левое кинематическое поле) представляется

  1) полем левых линейных преобразований ${}_l l^I{}_K(x)$; левые линейные преобразования определены как *алгебра внешней симметрии* ${}_l\mathbb{L}$; в свою очередь алгебра внешней симметрии ${}_l\mathbb{L}$ является линейной частью кинематической группы внешней симметрии ${}_l\mathbb{G}$;

  2) полем левых вторых линейных преобразований ${}_l l^I{}_{K_1K_2}(x)$ или полем коэффициентов связности $\Gamma^K{}_{K_1K_2}(x)$;

  3) полем левых третьих линейных преобразований ${}_l l^I{}_{K_1K_2K_3}(x)$ или полем объекта кривизны $R^K{}_{K_1K_2K_3}(x)$.

- Кинематическое поле внутренней симметрии (правое кинематическое поле) представляется

  1) полем правых линейных преобразований ${}_r l^I{}_K(x)$; правые линейные преобразования определены как алгебра внутренней симметрии ${}_r\mathbb{L}$; в свою очередь алгебра внутренней симметрии ${}_r\mathbb{L}$ является линейной частью кинематической группы внутренней симметрии ${}_r\mathbb{G}$;

  2) полем правых вторых линейных преобразований ${}_r l^I{}_{K_1K_2}(x)$ потенциалом поля внутренней симметрии $A^I{}_{I_1K_2}(x)$;

  3) полем правых третьих линейных преобразований ${}_r l^I{}_{K_1K_2K_3}(x)$ или объектом поля внутренней симметрии $F^I{}_{I_1K_2K_3}(x)$.

Часть 3
Динамика. Действие. Фундаментальные физические объекты

Физическая реальность, помимо пространственно-временных, кинематических явлений, включает энергетические, динамические явления. Для описания этой части физической реальности введем специальный вектор – *вектор действия*. Конкретизация этого понятия связана, прежде всего, с выделением трех видов физических объектов, выполненным в Главах 1.2., 1.5., 1.7. Эти объекты названы следующим образом.

- Фундаментальные физические объекты.
- Промежуточные физические объекты.
- Вторые промежуточные физические объекты (или промежуточные физические объекты второго рода).

Такое разделение продиктовано, прежде всего, фактом разделения элементарных частиц на

1) фундаментальные, к которым относятся лептоны и кварки, а также соответствующие им гипотетические суперчастицы,

2) промежуточные частицы, ключевым свойством которых является обеспечение взаимодействия между фундаментальными частицами,

3) гипотетические промежуточные частицы второго рода[1], ключевым свойством которых является обеспечение взаимодействия между фундаментальными частицами с одной стороны и промежуточными частицами с другой.

Другим примером разделения физических объектов может служить планетарная система Солнца: планеты и Солнце могут рассматриваться как фундаментальные физические объекты – точечные объекты, обладающие массой и моментом, а гравитационное поле, их связывающее, – это промежуточный физический объект.

Кроме *физических объектов*, необходимо ввести *физические антиобъекты* и разделить их на три вида:

- фундаментальные физические антиобъекты;
- промежуточные физические антиобъекты;
- вторые промежуточные физические антиобъекты (или промежуточные физические антиобъекты второго рода).

[1] Это название имеет в виду, что вышеуказанные промежуточные частицы это промежуточные частицы первого рода.

Необходимость введения физических антиобъектов продиктована, прежде всего, фактом существования античастиц. Это

1) фундаментальные античастицы, к которым относятся антилептоны и антикварки, а также соответствующие им гипотетические суперантичастицы;

2) промежуточные античастицы, ключевым свойством которых является обеспечение взаимодействия между фундаментальными античастицами;

3) гипотетические промежуточные частицы второго рода, ключевым свойством которых является обеспечение взаимодействия между фундаментальными античастицами с одной стороны и промежуточными античастицами с другой.

Итак, прежде чем обратиться к описанию динамических явлений, постулируем следующее.

1. Существование *фундаментальных физических объектов*. Такими объектами, прежде всего, являются фундаментальные частицы. Фундаментальные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с пространством-временем $\mathbb{X}$. Таким образом, пространство-время $\mathbb{X}$ – это пространственно-временная характеристика фундаментальных физических объектов.

2. Существование *фундаментальных физических антиобъектов*. Такими объектами, прежде всего, являются фундаментальные античастицы. Фундаментальные антиобъекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с сопряженным пространством-временем $\mathbb{X}^*$. Таким образом, сопряженное пространство-время $\mathbb{X}^*$ – это пространственно-временная характеристика фундаментальных физических антиобъектов.

3. Существование *промежуточных физических объектов*. Такими объектами, прежде всего, являются промежуточные частицы. Промежуточные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, отождествляются с алгеброй $\mathbb{L}$ линейных преобразований $\mathbf{l}\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}$. Таким образом, алгебра линейных преобразований $\mathbb{L}$ – это пространственно-временная характеристика промежуточных физических объектов.

4. Существование *промежуточных физических антиобъектов*. Такими объектами, прежде всего, являются промежуточные античастицы. Промежуточные физические антиобъекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях,

отождествляются с алгеброй $\mathbb{L}^*$ линейных сопряженных преобразований $\mathbf{l}^*\colon\ \mathbb{X}^*\to\mathbb{X}^*$. Таким образом, алгебра линейных сопряженных преобразований $\mathbb{L}^*$ – это пространственно-временная характеристика промежуточных физических антиобъектов.

5. Существование *вторых промежуточных физических объектов.* Вторые промежуточные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны векторному пространству $\mathbb{A}$ линейных преобразований $\mathbf{a}\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{L}$. Следует предположить существование промежуточных частиц второго рода, реализующих представление о вторых промежуточных физических объектах.

6. Существование *вторых промежуточных физических антиобъектов.* Вторые промежуточные физические объекты в том виде, в котором они участвуют в пространственно-временных явлениях, тождественны векторному пространству $\mathbb{A}^*$ линейных преобразований $\mathbf{a}^*\colon\ \mathbb{X}^*\to\mathbb{L}^*$. Следует предположить существование промежуточных античастиц второго рода, реализующих представление о вторых промежуточных физических антиобъектах.

Для описания энергетических и динамических явлений с участием физических объектов введем *векторы действия* для каждого из трех видов физических объектов и каждого из трех видов физических антиобъектов.

1. Для описания энергетических и динамических явлений с участием фундаментальных физических объектов введем контравариантный вектор

$$\mathbf{S}\,,$$

который назовем *вектором действия фундаментальных объектов.* Множество указанных векторов действия является векторным пространством, которое обозначим $\mathbb{S}$. Векторное пространство $\mathbb{S}$ *подобно* пространству-времени $\mathbb{X}$. Векторное пространство $\mathbb{S}$ является также алгеброй, которую назовем *алгеброй действия фундаментальных объектов.*

2. Для описания энергетических и динамических явлений с участием промежуточных физических объектов введем вектор

$$\mathsf{S}\,,$$

который назовем *вектором действия промежуточных физических объектов.* Множество векторов действия промежуточных объектов, которое обозначим $\mathbb{S}_1$, является алгеброй, которую назовем *алгеброй действия промежуточных объектов.* Эта алгебра подобна алгебре линейных преобразований системы отсчета $\mathbb{L}$.

3. Для описания энергетических и динамических явлений с участием вторых промежуточных физических объектов введем вектор

$$\mathfrak{S}\,,$$

который назовем *вектором действия вторых промежуточных физических объектов.* Множество векторов действия вторых промежуточных объектов образует векторное пространство, которое обозначим $\mathbb{S}_2$. Это пространство подобно пространству линейных преобразований $\mathbb{A}$ системы отсчета.

4. Для описания энергетических и динамических явлений с участием фундаментальных физических антиобъектов введем ковариантный вектор

$$\mathbf{S}^*\,,$$

который назовем *вектором действия фундаментальных антиобъектов.* Множество указанных векторов действия является векторным прстранством, которое обозначим $\mathbb{S}^*$. Векторное пространство $\mathbb{S}^*$ *подобно* сопряженному пространству-времени $\mathbb{X}^*$. Векторное пространство $\mathbb{S}^*$ является также алгеброй, которую назовем *алгеброй действия фундаментальных антиобъектов.*

5. Для описания энергетических и динамических явлений с участием промежуточных физических антиобъектов введем вектор

$$\mathsf{S}^*\,,$$

который назовем *вектором действия промежуточных физических антиобъектов.* Множество векторов действия промежуточных объектов образует алгебру, которую обозначим $\mathbb{S}_1^*$. Эта алгебра подобна алгебре сопряженных линейных преобразований системы отсчета $\mathbb{L}^*$.

6. Для описания энергетических и динамических явлений с участием вторых промежуточных физических антиобъектов введем вектор

$$\mathfrak{S}^*\,,$$

который назовем *вектором действия вторых промежуточных физических антиобъектов.* Множество векторов действия вторых промежуточных антиобъектов образует векторное пространство, которое обозначим $\mathbb{S}_2^*$. Это пространство подобно пространству сопряженных линейных преобразований системы отсчета $\mathbb{A}^*$.

Вектор действия задан в каждой точке системы отсчета, и в этом смысле задано *поле* векторов действия. Физический объект рассматривается как *особенность* поля действия. Соответственно

1) фундаментальный физический объект – это особенность поля векторов действия $\mathbf{S}$;

2) промежуточный физический объект – это особенность поля векторов действия S;

3) второй промежуточный физический объект – это особенность поля векторов действия $\mathfrak{S}$;

4) фундаментальный физический антиобъект – это особенность поля векторов действия $\mathbf{S}^*$;

5) промежуточный физический антиобъект – это особенность поля векторов действия S^*;

6) второй промежуточный физический антиобъект – это особенность поля векторов действия $\mathfrak{S}^*$.

Помимо векторов действия, для описания энергетических и динамических явлений вводится скалярное действие. Определение скалярного действия и установление связи между этим скаляром и вышеприведенными векторами действия рассмотрим в последующих Разделах.[2]

Далее остановимся подробнее на формировании вектора действия фундаментальных физических объектов и свойствах универсальной контравариантной алгебры действия фундаментальных объектов $\mathbb{S}$, а также на формировании вектора действия фундаментальных физических антиобъектов и свойствах универсальной ковариантной алгебры действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$.

[2] Размерность векторов действия и скалярного действия – Дж·сек.

Глава 3.1 Алгебры действия фундаментальных объектов и антиобъектов

Алгебра действия фундаментальных объектов основывается на универсальной контравариантной алгебре действия, которая, в свою очередь, опирается на тензорную контравариантную алгебру действия. Поэтому сначала рассмотрим тензорную контравариантную алгебру действия, затем от нее перейдем к универсальной контравариантной алгебре действия и далее обратимся к алгебре действия фундаментальных объектов.

I. ТЕНЗОРНАЯ КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ

1. Образующее пространство действия

В основе тензорной контравариантной алгебры действия лежит четырехмерное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, которое обозначим S^1. Оно подобно (изоморфно) пространству-времени специальной теории относительности (СТО). Вектор этого пространства $S \in S^1$ запишем через базисные векторы следующим образом:

$$S = \mathbf{e}_k \cdot S^k$$

где S^k – координаты вектора S, а $\mathbf{e}_k$ – это базисные векторы пространства-времени СТО. Здесь индекс k принимает значения 1, 2, 3, 4. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – это базисные векторы геометрического пространства, а $\mathbf{e}_4$ – базисный вектор времени. Векторы и координаты имеют размерность действия, то есть

$$[S] = [S^k] = \text{Дж} \cdot \text{сек}\,.$$

Базисные векторы рассматриваются как безразмерные величины, определяющие только *направление* вектора.

Векторное пространство S^1 называется *образующим* пространством тензорной контравариантной алгебры действия. Базисные векторы $\mathbf{e}_k$ также называются *образующими*. В ряде случаев в качестве образующего пространства будем использовать подпространство, подобное геометрическому подпространству СТО. Будем обозначать его S^1_3. В этом случае вектор $S \in S^1_3$ будем записывать через базисные векторы следующим образом:

$$S = \mathbf{e}_a \cdot S^a\,.$$

Здесь индекс a принимает значения 1, 2, 3.

2. Тензорное произведение двух векторов образующего пространства действия

Тензорное произведение векторов S_1 и S_2, принадлежащих образующему пространству действия, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{S_0} S_1 \otimes S_2\,.$$

Здесь коэффициент S_0 имеет размерность действия и его назначение состоит в том, чтобы привести размерность тензорного произведения двух векторов к размерности одного вектора, то есть к действию.

Билинейное отображение векторов S_1 и S_2 *общего вида* запишем следующим образом:

$$\frac{1}{S_0} F_2(S_1,\, S_2)\,.$$

По определению тензорное произведение двух векторов отождествляется с билинейным отображением общего вида этих векторов

$$\frac{1}{S_0} S_1 \otimes S_2 \equiv \frac{1}{S_0} F_2(S_1,\, S_2)\,.$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что билинейное отображение в конкретное векторное пространство, например

$$G_2(S_1,\, S_2)\,,$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L_2 тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G_2(S_1,\, S_2) = \frac{1}{S_0} L_2(S_1 \otimes S_2)\,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$\frac{1}{S_0} F_2(S_1\,,\ S_2) = \frac{1}{S_0} F_2(\mathbf{e}_{k_1} S^{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2} S^{k_2}) =$$
$$= F_2(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2})\, \frac{1}{S_0} S^{k_1} S^{k_2}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{S_0} S_1 \otimes S_2 = F_2(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2})\, \frac{1}{S_0} S^{k_1} S^{k_2}$$

или, если ввести вектор

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} = F_2(\mathbf{e}_{k_1}\,,\ \mathbf{e}_{k_2})\,,$$

то

$$\frac{1}{S_0} S_1 \otimes S_2 = \mathbf{e}_{k_1 k_2} \frac{1}{S_0} S^{k_1} S^{k_2} .$$

Линейное преобразование этого вектора

$$\frac{1}{S_0} \cdot L_2(S_1 \otimes S_2)$$

приводит к вектору

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2} \cdot l^{k_1 k_2}{}_{i_1 i_2} \cdot \frac{1}{S_0} S^{i_1} S^{i_2} .$$

Здесь введем обозначение

$$S^{k_1 k_2} = l^{k_1 k_2}{}_{i_1 i_2} \frac{1}{S_0} S^{i_1} S^{i_2} .$$

В результате тензорное произведение двух векторов имеет вид вектора

$$\frac{1}{S_0} \cdot L_2(S_1 \otimes S_2) = \mathbf{e}_{k_1 k_2} \cdot S^{k_1 k_2} .$$

Обозначим этот вектор $\overset{2}{S}$. Таким образом,

$$\overset{2}{S} = \mathbf{e}_{k_1 k_2} \cdot S^{k_1 k_2} .$$

Множество таких векторов называется тензорной степенью второго порядка образующего пространства S^1 и обозначается S^2. Векторы $\mathbf{e}_{k_1 k_2}$ рассматриваются как базисные векторы в S^2, а числа $S^{k_1 k_2}$ – как координаты вектора $\overset{2}{S}$. Координаты $S^{k_1 k_2}$ имеют размерность действия.

3. Тензорное произведение n векторов образующего пространства действия

Тензорное произведение векторов $S_1, S_2, \ldots, S_n$ запишем следующим образом:

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} S_1 \otimes S_2 \otimes \ldots \otimes S_n .$$

Здесь коэффициент S_0 имеет размерность длины, а назначение множителя

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}}$$

состоит в том, чтобы привести размерность тензорного произведения n векторов к размерности одного вектора, то есть к действию.

Полилинейное отображение общего вида векторов $S_1, S_2, \ldots, S_n$, принадлежащих образующему пространству действия, запишем следующим образом

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} F_n(S_1, S_2, \ldots, S_n) .$$

По определению тензорное произведение n векторов отождествляется с полилинейным отображением общего вида этих векторов

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} S_1 \otimes S_2 \otimes \ldots \otimes S_n \equiv \frac{1}{(S_0)^{n-1}} F_n(S_1, S_2, \ldots, S_n) .$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что полилинейное отображение в конкретное векторное пространство, например

$$G_n(S_1, S_2, \ldots, S_n) ,$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L_n тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G_n(S_1, S_2, \ldots, S_n) = \frac{1}{(S_0)^{n-1}} L_n(S_1 \otimes S_2 \otimes \ldots \otimes S_n) .$$

Вследствие полилинейности можно записать

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(S_0)^{n-1}} F_n(S_1 , S_2, \ldots, S_n) = \\ &= \frac{1}{(S_0)^{n-1}} F_n(\mathbf{e}_{k_1} S^{k_1} , \mathbf{e}_{k_2} S^{k_2} , \ldots, \mathbf{e}_{k_n} S^{k_n}) = \\ &= F_n(\mathbf{e}_{k_1} , \mathbf{e}_{k_2} , \ldots, \mathbf{e}_{k_n}) \frac{1}{(S_0)^{n-1}} S^{k_1} S^{k_2} \ldots S^{k_n} . \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(S_0)^{n-1}} S_1 \otimes S_2 \otimes \ldots \otimes S_n = \\ &= \frac{1}{(S_0)^{n-1}} F_n(\mathbf{e}_{k_1} , \mathbf{e}_{k_2} , \ldots, \mathbf{e}_{k_n}) S^{k_1} S^{k_2} \ldots S^{k_n} \end{aligned}$$

или, если ввести векторы

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{k_n} = F_n(\mathbf{e}_{k_1} , \mathbf{e}_{k_2} , \ldots, \mathbf{e}_{k_n}) ,$$

то

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(S_0)^{n-1}} S_1 \otimes S_2 \otimes \ldots \otimes S_n = \\ &= \mathbf{e}_{k_1 k_2 \ldots k_n} \cdot \frac{1}{(S_0)^{n-1}} S^{k_1} S^{k_2} \ldots S^{k_n} . \end{aligned}$$

Линейное преобразование этого вектора

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} L_n(S_1 \otimes S_2 \otimes \ldots \otimes S_n)$$

приводит к вектору

$$\mathbf{e}_{k_1 k_2 \ldots k_n} \cdot l^{k_1 k_2 \ldots k_n}{}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot \frac{1}{(S_0)^{n-1}} S^{i_1} S^{i_2} \ldots S^{k_n} .$$

Здесь введем обозначение

$$S^{k_1k_2\dots k_n} = l^{k_1k_2\dots k_n}{}_{i_1i_2\dots i_n} \cdot \frac{1}{(S_0)^{n-1}} S^{i_1}\, S^{i_2} \dots S^{k_n}\,.$$

В результате тензорное произведение n векторов имеет вид вектора:

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} L_n(S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_n) = \mathbf{e}_{k_1k_2\dots k_n} \cdot S^{k_1k_2\dots k_n}\,.$$

Обозначим этот вектор $\overset{n}{S}$. Таким образом,

$$\overset{n}{S} = \mathbf{e}_{k_1k_2\dots k_n} \cdot S^{k_1k_2\dots k_n}\,.$$

Множество таких векторов называется тензорной степенью n-го порядка образующего пространства S^1 и обозначается S^n . Векторы $\mathbf{e}_{k_1k_2\dots k_n}$ рассматриваются как базисные векторы в S^n, а числа $S^{k_1k_2\dots k_n}$ – как координаты вектора $\overset{n}{S}$. Координаты $S^{k_1k_2\dots k_n}$ имеют размерность действия.

4. Тензорная контравариантная алгебра действия

Помимо пространств тензорных степеней порядка 2 и более, введем пространство тензорной степени 0, полагая[1]

$$S^0 = \mathbb{R} \cdot S_0\,.$$

Образующее пространство S^1 назовем пространством тензорной степени 1.

Рассмотрим векторное пространство, представленное суммой всех тензорных степеней. Это пространство обозначим $\otimes S$. Таким образом,

$$\otimes S \;=\; S^0 + S^1 + S^2 + \dots\,.$$

Пространство $\otimes S$ является не только векторным пространством[2], но и алгеброй, в которой умножение векторов представлено тензорным умножением и умножением тензоров на число. Поэтому пространство $\otimes S$ называется *тензорной* контравариантной алгеброй действия. Вектор тензорной контравариантной алгебры действия записывается следующим образом:

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_0 \cdot S^0 + \mathbf{e}_{k_1} \cdot S^{k_1} + \mathbf{e}_{k_1k_2} \cdot S^{k_1k_2} + \dots\,.$$

Здесь $\mathbf{e}_0$ – действительная единица. Этот вектор удобно записать, используя *собирательный* индекс

$$K \sim\; 0\,,\;\; k\,,\;\; k_1k_2\,,\;\; k_1k_2k_3\,,\;\; \dots\,,$$

обобщенный базисный вектор

$$\mathbf{e}_K = \mathbf{e}_0,\, \mathbf{e}_{k_1},\, \mathbf{e}_{k_1k_2},\, \dots$$

и обобщенные координаты

$$S^K = S^0,\, S^{k_1},\, S^{k_1k_2},\, \dots\,,$$

в компактном виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot S^K\,.$$

Напомним, что векторы и координаты векторов в тензорной контравариантной алгебре действия $\otimes S$ снабжены размерностью действия

$$[\mathbf{S}] = [S^K] = \text{Дж} \cdot \text{сек}\,.$$

5. Симметрии тензоров. Разложение тензоров на симметрии

Разложение тензоров на симметрии начнем с тензоров второго порядка и конкретнее с базисных тензоров второго порядка

$$\mathbf{e}_{k_1k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}\,.$$

Запишем этот тензор в виде суммы:

$$\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} = [\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}] + \langle \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \rangle\,, \qquad (1)$$

где обозначено

$$[\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}] = \frac{1}{2!}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} - \mathbf{e}_{k_2} \otimes \mathbf{e}_{k_1})$$

и

$$\langle \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \rangle = \frac{1}{2!}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} + \mathbf{e}_{k_2} \otimes \mathbf{e}_{k_1})\,.$$

Тензор $[\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}]$ антисимметричен при перестановке сомножителей, а тензор $\langle \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \rangle$ симметричен при перестановке сомножителей. Выражение $[\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}]$ обозначим $(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2})_1$ и назовем *первой симметрией*, а выражение $\langle \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \rangle$ обозначим $(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2})_2$ и назовем *второй симметрией*. Отсюда равенство (1) представляет собой разложение тензора второго порядка на две симметрии

$$\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} = (\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2})_1 + (\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2})_2\,.$$

Рассмотрим теперь разложение тензора третьего порядка

$$\mathbf{e}_{k_1k_2k_3} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \otimes \mathbf{e}_{k_3}\,.$$

Предварительно заметим, что для изложения существа вопроса нет необходимости указывать ни базисные векторы, ни их индексы. Достаточно указывать только номера индексов. Для того чтобы не путать номера индексов с числами, будем обозначать номера

---

[1] Напомним, что $\mathbb{R}$ – это множество действительных чисел, а S_0 – множитель размерности действия.

[2] Отметим, что векторное пространство контравариантных тензоров бесконечномерно.

индексов жирными цифрами. В принимаемых обозначениях предыдущее разложение тензора второго порядкана симметрии выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{12} = (\mathbf{12})_1 + (\mathbf{12})_2\,,\\
&(\mathbf{12})_1 \equiv [\mathbf{12}] = \frac{1}{2}(\mathbf{12} - \mathbf{21})\,,\\
&(\mathbf{12})_2 \equiv \langle\mathbf{12}\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{12} + \mathbf{21})\,.
\end{aligned}$$

После сказанного вернемся к тензору третьего ранга, который с учетом предыдущего замечания запишем так:

$$\mathbf{123}\,.$$

Прежде всего, заметим, что если положить, что перестановка каждой пары сомножителей антисимметрична, то есть

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\ \ \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\ \ \mathbf{13} = -\mathbf{31} \tag{2}$$

$$\text{или } \langle\mathbf{12}\rangle = 0\,,\ \ \langle\mathbf{23}\rangle = 0\,,\ \ \langle\mathbf{13}\rangle = 0\,,$$

то можно построить антисимметричный тензор третьего порядка

$$[\mathbf{123}] = \frac{1}{3!}(\mathbf{123} - \mathbf{213} + \mathbf{231} - \mathbf{321} + \mathbf{312} - \mathbf{132})\,.$$

Подобным образом, полагая, что перестановка каждой пары сомножителей симметрична, то есть

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\ \ \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,\ \ \mathbf{13} = \mathbf{31} \tag{3}$$

$$\text{или } [\mathbf{12}] = 0\,,\ \ [\mathbf{23}] = 0\,,\ \ [\mathbf{13}] = 0\,,$$

можно построить симметричный тензор третьего порядка

$$\langle\mathbf{123}\rangle = \frac{1}{3!}(\mathbf{123} + \mathbf{213} + \mathbf{231} + \mathbf{321} + \mathbf{312} + \mathbf{132})\,.$$

Сумма

$$[\mathbf{123}] + \langle\mathbf{123}\rangle = \frac{1}{3}(\mathbf{123} + \mathbf{231} + \mathbf{312}) \neq \mathbf{123}\,, \tag{4}$$

и отсюда следует, что симметрии $[\mathbf{123}]$ и $\langle\mathbf{123}\rangle$ не исчерпывают весь необходимый набор симметрий. Для построения оставшихся симметрий заметим, что помимо антисимметричных соотношений (2) и симметричных соотношений (3) возможны смешанные перестановочные соотношения

1)

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\ \ \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\ \ \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \tag{5}$$

(два антисимметричных и одно симметричное соотношения),

2)

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\ \ \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,\ \ \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \tag{6}$$

(два симметричных и одно антисимметричное соотношения). Перестановочные соотношения (5) соответствуют симметрии, которую обозначим

$$(\mathbf{123})_2 = \frac{1}{3!}(\mathbf{123} - \mathbf{213} - \mathbf{231} + \mathbf{321} - \mathbf{312} - \mathbf{132})\,.$$

Перестановочные соотношения (6) соответствуют симметрии, которую обозначим

$$(\mathbf{123})_3 = \frac{1}{3!}(\mathbf{123} + \mathbf{213} - \mathbf{231} - \mathbf{321} - \mathbf{312} + \mathbf{132})\,.$$

Их сумма

$$(\mathbf{123})_2 + (\mathbf{123})_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312})\,.$$

Сравнивая это выражение с равенством (4), замечаем, что разложение тензора третьего порядка на симметрии имеет вид

$$\mathbf{123} = \frac{3}{2}\left((\mathbf{123})_1 + (\mathbf{123})_2 + (\mathbf{123})_3 + (\mathbf{123})_4\right)\,,$$

где введено обозначение

$$(\mathbf{123})_1 = [\mathbf{123}]\,,\quad (\mathbf{123})_4 = \langle\mathbf{123}\rangle\,.$$

Подробнее симметрии тензора третьего порядка, а также симметрии тензора четвертого порядка будут рассмотрены в Разделе I.2. Главы 3.4, относящемся к классификации фундаментальных частиц.

II. УНИВЕРСАЛЬНАЯ КОНТРАВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ

От тензорной контравариантной алгебры действия перейдем к универсальной контравариантной алгебре действия. Для этого наряду с тензорным произведением векторов будем рассматривать *скалярное* и *векторное* произведение векторов.

1. Скалярное произведение векторов образующего пространства действия

Скалярное произведение векторов образующего пространства действия, которое запишем следующим образом:

$$\frac{1}{S_0}\cdot S_1\cdot S_2\,,$$

– это билинейное отображение

$$\frac{1}{S_0}\cdot F_0(S_1\,,\ S_2)$$

векторов в множество действительных чисел $\mathbb{R} \cdot S_0$:

$$\frac{1}{S_0} \cdot S_1 \cdot S_2 \equiv \frac{1}{S_0} \cdot F_0(S_1\,,\; S_2) \in \mathbb{R} \cdot L_0\,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$F_0(S_1, S_2) = F_0(\mathbf{e}_{k_1}\, S^{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}\, S^{k_2}) = F_0(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2})\, S^{k_1}\, S^{k_2}\,.$$

Числовая величина

$$g_{k_1 k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} \equiv F_0(\mathbf{e}_{k_1}\,,\; \mathbf{e}_{k_2})\,.$$

называется *метрическим тензором* образующего пространства действия. Примем, что скалярное произведение не зависит от порядка используемых сомножителей. Отсюда

$$g_{k_1 k_2} = g_{k_2 k_1}\,.$$

2. Векторное произведение векторов образующего пространства действия

Векторное произведение векторов образующего пространства действия, которое запишем следующим образом:

$$\frac{1}{S_0} \cdot S_1 \times S_2\,,$$

– это билинейное отображение

$$\frac{1}{S_0} \cdot F_1(S_1\,,\; S_2)$$

векторов S_1, S_2 в образующее пространство S^1

$$\frac{1}{S_0} \cdot S_1 \times S_2 \equiv \frac{1}{S_0} \cdot F_1(S_1\,,\; S_2) \in S^1\,.$$

В силу билинейности

$$\frac{1}{S_0} \cdot S_1 \times S_2 \equiv F_1(\mathbf{e}_{k_1}\,,\; \mathbf{e}_{k_2})\, \frac{1}{S_0} \cdot S^{k_1}\, S^{k_2}\,.$$

Векторное произведение базисных векторов

$$\mathbf{e}_{k_1} \times \mathbf{e}_{k_2} = F_1(\mathbf{e}_{k_1}\,,\; \mathbf{e}_{k_2})$$

также является вектором образующего пространства S^1. Поэтому

$$\mathbf{e}_{k_1} \times \mathbf{e}_{k_2} = \mathbf{e}_k \cdot C^k{}_{k_1 k_2}\,,$$

где постоянные коэффициенты $C^k{}_{k_1 k_2}$ – это координаты вектора $\mathbf{e}_{k_1} \times \mathbf{e}_{k_2}$.

3. Универсальное произведение векторов. Универсальная контравариантная алгебра действия

Произведение двух векторов S_1 и S_2, составленное из скалярного, векторного и тензорного произведений, назовем *универсальным* и запишем следующим образом:

$$S_1 \circ S_2 = S_1 \cdot S_2 + S_1 \times S_2 + S_1 \otimes S_2\,.$$

По отношению к базисным векторам образующего пространства действия универсальное произведение принимает вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} + \mathbf{e}_{k_1} \times \mathbf{e}_{k_2} + \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} = \\ &= g_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_k \cdot C^k{}_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_{k_1 k_2}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Также универсальное произведение n образующих базисных векторов

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \ldots \circ \mathbf{e}_{k_n}$$

разлагается по базисным векторам тензорных степеней порядков от 0 до n. В качестве примера приведем разложение универсального произведения трех образующих базисных векторов по базисным векторам тензорных степеней порядков от 0 до 3.

3.1. *Разложение произведения* $\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3}$

Рассмотрим разложение универсального произведения трех образующих базисных векторов

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3}$$

по базисным векторам тензорных степеней порядков от 0 до 3. При вычислении выберем следующее положение скобок[3]

$$(\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3}\,.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &(\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = \\ &= (g_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_k \cdot C^k{}_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_{k_1 k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = \\ &= g_{k_1 k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_3} + \mathbf{e}_k \circ \mathbf{e}_{k_3} \cdot C^k{}_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_{k_1 k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3} = \\ &= g_{k_1 k_2} \cdot \mathbf{c}_{k_3} + \\ &+ g_{k k_3} \cdot C^k{}_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k k_3} \cdot C^k{}_{k_1 k_2} + \mathbf{e}_{k k_3} \cdot C^k{}_{k_1 k_2} + \\ &+ \mathbf{e}_{k_1} \cdot g_{k_2 k_3} + \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2 k_3} + \mathbf{e}_{k_1 k_2 k_3}\,. \end{aligned}$$

---

[3] Универсальное умножение ассоциативно. Поэтому

$$(\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = \mathbf{e}_{k_1} \circ (\mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3})$$

и результат вычислений не зависит от положения скобок.

Раскрывая предпоследнее слагаемое, окончательно получим

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = g_{k_1k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_3} +\\ +g_{kk_3} \cdot C^{k}{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{kk_3} \cdot C^{k}{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{kk_3} \cdot C^{k}{}_{k_1k_2} +\\ +\mathbf{e}_{k_1} \cdot g_{k_2k_3} + g_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_5} \cdot C^{k_5}{}_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3} +\\ +\mathbf{e}_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3}\,. \qquad (8)\end{aligned}$$

Наконец, сгруппируем слагаемые по мере возрастания тензорных степеней:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}) \circ \mathbf{e}_{k_3} = (g_{kk_3} \cdot C^{k}{}_{k_1k_2} + g_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3}) +\\ +(g_{k_1k_2} \cdot \mathbf{e}_{k_3} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{kk_3} \cdot C^{k}{}_{k_1k_2} +\\ +\mathbf{e}_{k_1} \cdot g_{k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_5} \cdot C^{k_5}{}_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3}) +\\ +(\mathbf{e}_{kk_3} \cdot C^{k}{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_2k_3}) + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3}\,. \qquad (9)\end{aligned}$$

3.2. Универсальная контравариантная алгебра действия

Множество векторов вида

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2}\, S'^{k_1k_2}$$

представляет собой *универсальную степень второго порядка* образующего пространства S^1. Обозначим его $\overset{2}{\circ} S$. Аналогично множество векторов вида

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \ldots \circ \mathbf{e}_{k_n}\, S'^{k_1k_2\ldots k_n}$$

представляет собой *универсальную степень n-го порядка* образующего пространства S^1. Обозначим его $\overset{n}{\circ} S$. Помимо пространств универсальных степеней порядка 2 и более введем пространство универсальной степени 0, полагая[4]

$$\overset{0}{\circ} S = \mathbb{R} \cdot S_0\,,$$

и пространство тензорной степени 1, полагая

$$\overset{1}{\circ} S = S^1\,.$$

Рассмотрим векторное пространство, представленное суммой всех универсальных степеней. Это пространство обозначим $\mathbb{S}$ и назовем *обобщенным контравариантным универсальным пространством действия.* Таким образом,

$$\mathbb{S} = \overset{0}{\circ} S + \overset{1}{\circ} S + \overset{2}{\circ} S + \ldots$$

Пространство $\mathbb{S}$ является не только векторным пространством[5], но и алгеброй, в которой умножение векторов представлено универсальным умножением и умножением тензоров на число. Поэтому $\mathbb{S}$ называется также *универсальной контравариантной алгеброй действия.* Вектор универсальной контравариантной алгебры действия записывается следующим образом:

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_0 \cdot S'^0 + \mathbf{e}_{k_1} \cdot S'^{k_1} + \mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \cdot S'^{k_1k_2} + \ldots\,.$$

Этот вектор после разложения универсальных произведений образующих базисных векторов по базисным векторам тензорных степеней и переобозначения координат может быть записан как вектор тензорной контравариантной алгебры действия

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_0 \cdot S^0 + \mathbf{e}_{k_1} \cdot S^{k_1} + \mathbf{e}_{k_1k_2} \cdot S^{k_1k_2} + \ldots\,.$$

Понятно, что векторы и координаты универсальной контравариантной алгебры действия имеют размерность действия.

4. Единичные числовые тензоры

Универсальное произведение n тензоров проецируется на сумму тензоров порядка от нуля до n. Например, для произведения двух базисных векторов

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = g_{k_1k_2} + \mathbf{e}_k \cdot C^{k}{}_{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1k_2}\,.$$

Произведение трех базисных векторов (9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_3} = g_{k_1k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_4} \cdot C^{k_4}{}_{k_1k_2k_3} +\\ +\mathbf{e}_{k_4k_5} \cdot C^{k_4k_5}{}_{k_1k_2k_3} + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, универсальное умножение вводит набор числовых тензоров

$$\begin{aligned}&g_{k_1k_2}\,,\ C^{k_3}{}_{k_1k_2}\,,\\ &g_{k_1k_2k_3}\,,\ C^{k_4}{}_{k_1k_2k_3}\,,\ C^{k_4k_5}{}_{k_1k_2k_3}\,,\\ &g_{k_1k_2k_3k_4}\,,\ C^{k_5}{}_{k_1k_2k_3k_4}\,,\ C^{k_5k_6}{}_{k_1k_2k_3k_4}\,,\ C^{k_5k_6k_7}{}_{k_1k_2k_3k_4}\,,\\ &\ldots\end{aligned}$$

Конкретизация числовых тензоров связана с двумя действиями:

1) разложением числовых тензоров по симметриям;

2) введением условий, позволяющих рассматривать числовые тензоры как *единичные*, то есть такие, компоненты которых принимают значения либо +1, либо -1, либо 0.

Например, для *нормированных* базисных векторов образующего пространства $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ выполняются равенства

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1\,,$$

а для *ортогональных* базисных векторов имеем

$$g_{k_1k_2} = 0 \text{ при } k_1 \neq k_2\,.$$

[4] Напомним, что $\mathbb{R}$ – это множество действительных чисел, а S_0 – множитель размерности действия.

[5] Отметим, что векторное пространство $\mathbb{S}$ бесконечномерно.

Другой пример: в теории векторного поля[6]

$$C^a{}_{bc} = \varepsilon_{abc}\,,$$

где ε_{abc} – антисимметричный, единичный числовой тензор.

III. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Из универсальной контравариантной алгебры действия $\mathbb{S}$ выделим подалгебру, которую назовем *алгеброй действия фундаментальных объектов.* За алгеброй действия фундаментальных объектов закрепим то же обозначение, что и за универсальной контравариантной алгеброй действия, – $\mathbb{S}$.

Алгебру действия фундаментальных объектов выделим, накладывая на произведение базисных векторов (7) следующие условия:

1) условие евклидовости, в которое включим два требования

а) при $k_1 = k_2$

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2}\,,$$

причем

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1\,,\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1\,,\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1\,,\ \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = -1\,;$$

б) при $k_1 \neq k_2$

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2}\,;$$

2) условие соседней перестановки
при $k_1 \neq k_2$

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} = \mathrm{sign}(k_1, k_2) \cdot \mathbf{e}_{k_2} \circ \mathbf{e}_{k_1}\,.$$

Здесь $\mathrm{sign}(k_1, k_2)$ – знак соседней перестановки, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов[7].

Из вышеуказанных условий вытекает, что векторное произведение базисных векторов образующего пространства в алгебре действия фундаментальных объектов не рассматривается.

Пространство универсальных степеней, снабженное умножением в соответствии с вышеуказанными условиями, является алгеброй, которую назовем *алгеброй действия фундаментальных объектов.*

[6] Индексы a ,b ,c , принимают значения 1 ,2 ,3 .
[7] Конкретное значение $\mathrm{sign}(k_1, k_2)$ принимается на основании дополнительных соображений, связанных с классификацией фундаментальных частиц.

1. Конечное число измерений алгебры действия фундаментальных объектов

Условия соседней перестановки и евклидовости в сочетании с ассоциативностью приводят к тому, что алгебра действия фундаментальных объектов $\mathbb{S}$ имеет конечное число измерений. Для того чтобы пояснить это, рассмотрим пространство универсальной степени порядка $p - \overset{p}{\circ} S$. Базисные векторы этого пространства имеют вид

$$\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \ldots \circ \mathbf{e}_{k_p}\,.$$

В это выражение не могут входить два одинаковых образующих базисных вектора. Если такое имеет место, то с помощью условия соседней перестановки и условия евклидовости такой базисный вектор может быть сведен к базисному вектору, в произведении которого одинаковые образующие базисные векторы отсутствуют, то есть такой базисный вектор $\mathbf{e}_{k_1} \circ \mathbf{e}_{k_2} \circ \ldots \circ \mathbf{e}_{k_p}$ не является линейно независимым вектором (не является базисным вектором по определению).

Отсюда следует, что порядок n пространства тензоров S^n не превышает число измерений образующего пространства. А так как образующее пространство S^1 подобно пространству-времени СТО, то $n \leq 4$. Таким образом, в крайнем случае

$$\mathbb{S} = S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4\,.$$

Если число измерений пространства S^1 обозначить через n, то число измерений пространства S^p равно числу сочетаний из n элементов по p

$$\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{p!} = \mathrm{C}_n^p\,.$$

Отсюда следует что

$$\dim S^p = \dim S^{n-p}\,, \quad \dim S^n = 1\,, \quad \dim S^{n-1} = n\,.$$

Пространство алгебры действия фундаментальных объектов $\mathbb{S}$ в общем случае представляет собой сумму пространств

$$\mathbb{S} = S^0 + S^1 + \ldots + S^n\,.$$

Число измерений пространства $\mathbb{S}$ (число базисных векторов)

$$N = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

В случае необходимости для пространства алгебры действия фундаментальных объектов будем использовать обозначение $\mathbb{S}_n$, подчеркивая размерность n образующего пространства S^1. В том случае, если образующее пространство четырехмерно (подобно пространству-времени СТО), то

$$\dim \mathbb{S}_4 = 2^4 = 16\,.$$

Вектор действия в этом случае имеет вид

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_0\, S^0 + \mathbf{e}_k\, S^k + \mathbf{e}_{k_1k_2}\, S^{k_1k_2} + \\ + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3}\, S^{k_1k_2k_3} + \mathbf{e}_{1324}\, S^{1324}\,.$$

Будем записывать это соотношение, используя собирательный индекс

$$K \sim (0, k, k_1k_2, k_1k_2k_3\,, 1324),$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_K\, S^K\,.$$

Если образующее пространство трехмерно (подобно геометрическому пространству),

$$\dim \mathbb{S}_3 = 2^3 = 8\,.$$

Вектор действия в этом случае имеет вид

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_0\, S^0 + \mathbf{e}_a\, S^a + \mathbf{e}_{a_1a_2}\, S^{a_1a_2} + \mathbf{e}_{123}\, S^{123}\,.$$

Будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$A\,, \sim (0, a, a_1a_2, 123),$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_A\, S^A\,.$$

IV. УМНОЖЕНИЕ В АЛГЕБРЕ ДЕЙСТВИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

1. Левая и правая алгебры действия фундаментальных объектов

Обратимся к умножению векторов в алгебре действия фундаментальных объектов. Пусть *сначала* рассматривается вектор $\mathbf{S}_1$, а *затем* вектор $\mathbf{S}_2$. С этой точки зрения вектор $\mathbf{S}_1$ будем называть *начальным*, а вектор $\mathbf{S}_2$ – *последующим*. Возможны два варианта умножения указанных векторов:

$$\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *справа*, и

$$\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *слева*. В общем случае умножение векторов некоммутативно

$$\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 \neq \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1\,.$$

Введем обозначение для правого произведения

$${}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2\,. \qquad (10)$$

Здесь коэффициент S_0 имеет размерность действия и согласует размерности правой и левой частей уравнения. Левое произведение соответственно запишем так:

$${}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1\,. \qquad (11)$$

Алгебру, основанную на умножении (10), назовем правой и обозначим ${}_r\mathbb{S}$. Алгебру, основанную на умножении (11), назовем левой и обозначим ${}_l\mathbb{S}$. Единицей алгебр является вектор, равный числу S_0.

Предыдущие построения повторим для умножения базисных векторов. Пусть базисные векторы $\mathbf{e}_{K_1}$ являются начальными, а базисные векторы $\mathbf{e}_{K_2}$ являются последующими. Тогда правое произведение базисных векторов запишем следующим образом:

$$\mathbf{e}_{K_1} \circ \mathbf{e}_{K_2} = \mathbf{e}_K \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2}\,, \qquad (12)$$

где ${}_rC^K{}_{K_1K_2}$ – структурные постоянные правой алгебры действия фундаментальных объектов ${}_r\mathbb{S}$. Левое произведение базисных векторов соответственно запишем следующим образом:

$$\mathbf{e}_{K_2} \circ \mathbf{e}_{K_1} = \mathbf{e}_K \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2}\,, \qquad (13)$$

где ${}_lC^K{}_{K_1K_2}$ – структурные постоянные левой алгебры действия фундаментальных объектов ${}_l\mathbb{S}$.

Для более четкого различия между правым (12) и левым (13) умножениями удобно ввести правые и левые базисные векторы

$${}_r\mathbf{e}_K \quad \text{и} \quad {}_l\mathbf{e}_K\,.$$

Они отличаются друг от друга только тем, что при умножении правых базисных векторов номер структурной матрицы совпадает с индексом базисного вектора, стоящего справа, то есть

$${}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_2} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2}\,, \qquad (14)$$

а при умножении левых базисных векторов номер структурной матрицы совпадает с индексом базисного вектора, стоящего слева, то есть

$${}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_1} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2}\,. \qquad (15)$$

Очевидно, что

$${}_rC^K{}_{K_1K_2} = {}_lC^K{}_{K_2K_1}\,. \qquad (16)$$

Учитывая

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{e}_{K_1} \cdot S_1^{K_1}\,, \quad \mathbf{S}_2 = \mathbf{e}_{K_2} \cdot S_2^{K_1}\,,$$

соотношения (12) и (13), из равенств (10) и (11) получим

$${}_rS^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot S_1^{K_1} \cdot S_2^{K_2} \qquad (17)$$

и

$${}_lS^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot S_1^{K_1} \cdot S_2^{K_2}\,. \qquad (18)$$

Далее рассмотрим частные случаи умножения векторов действия. Вблизи единицы имеем
при $S_1^{K_1} \to S_1^0 = S_0$

$$
\begin{aligned}
{}_rS^K &= S_2^K\,, \qquad {}_rC^K{}_{0K_2} = \delta^K{}_{K_2}\,,\\
{}_lS^K &= S_2^K\,, \qquad {}_lC^K{}_{0K_2} = \delta^K{}_{K_2}\,;
\end{aligned}
$$

при $S_2^{K_2} \to S_2^0 = S_0$

$$
\begin{aligned}
{}_rS^K &= S_1^K\,, \qquad {}_rC^K{}_{K_10} = \delta^K{}_{K_1}\,,\\
{}_lS^K &= S_1^K\,, \qquad {}_lC^K{}_{K_10} = \delta^K{}_{K_1}\,.
\end{aligned}
$$

Кроме того, рассмотрим скалярное произведение базисных векторов

$$\mathbf{e}_{K_1} \cdot \mathbf{e}_{K_2} = g_{K_1K_2} \cdot \mathbf{e}_0\,.$$

Здесь $g_{K_1K_2}$ – метрический тензор в алгебре действия фундаментальных объектов. Отсюда

$${}_rC^0{}_{K_1K_2} = {}_lC^0{}_{K_2K_1} = g_{K_1K_2}\,.$$

2. Алгебры и группы линейных преобразований, ассоциированные с умножением контравариантных векторов действия

Умножение вектора $\mathbf{S}_1$ (справа или слева) на вектор $\mathbf{S}_2$ сводится к линейному преобразованию этого вектора. Действительно, введем матрицу линейного преобразования

$$
\begin{aligned}
{}_rl^K{}_{K_1} &= \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot S_2^{K_2} =\\
&= \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_10} \cdot S_2^0 + \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1\alpha} \cdot S_2^\alpha\,.
\end{aligned}
$$

Тогда выражение (17) запишется как линейное преобразование

$${}_rS^K = {}_rl^K{}_{K_1} \cdot S_1^{K_1}\,.$$

Будем рассматривать линейное преобразование ${}_rl^K{}_{K_1}$ как элемент алгебры, которую обозначим ${}_r\mathbb{L}'$, некоторой *непрерывной* группы, которую обозначим ${}_r\mathbb{G}'$. Назовем ${}_r\mathbb{L}'$ и ${}_r\mathbb{G}'$ соответственно правыми алгеброй и группой, *ассоциированными с правым умножением векторов действия.*[8] Преобразование (элемент) ${}_rL^K{}_{K_1}$ этой группы строится по элементу ${}_rl^K{}_{K_1}$ алгебры ${}_r\mathbb{L}'$ следующим образом:

$${}_rL^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp({}_rl^K{}_{K_1}) \quad \text{или}$$

$${}_rL^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp\left(\frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot S_2^{K_2}\right) \tag{19}$$

В малом элемент группы должен сводиться к элементу алгебры. В нашем случае имеем[9]

$${}_rdL^K{}_{K_1}\Big|_{\left(\substack{S^0=S_0\\ S^\alpha=0}\right)} = {}_rdl^K{}_{K_1} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot dS_2^{K_2}\,.$$

Также используем матрицу

$$
\begin{aligned}
{}_ll^K{}_{K_1} &= \frac{1}{S_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot S_2^{K_2} =\\
&= \frac{1}{S_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_10} \cdot S_2^0 + \frac{1}{S_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1\alpha} \cdot S_2^\alpha
\end{aligned}
$$

и запишем выражение (18) как линейное преобразование

$${}_lS^K = {}_ll^K{}_{K_1} \cdot S_1^{K_1}\,.$$

Аналогичным образом будем рассматривать линейное преобразование ${}_ll^K{}_{K_1}$ как элемент алгебры ${}_l\mathbb{L}'$ некоторой группы ${}_l\mathbb{G}'$. Назовем ${}_l\mathbb{L}'$ и ${}_l\mathbb{G}'$ соответственно левыми алгеброй и группой, *ассоциированными с левым умножением векторов.*[10] Преобразование (элемент) ${}_lL^K{}_{K_1}$ этой группы строится по элементу ${}_ll^K{}_{K_1}$ алгебры ${}_l\mathbb{L}'$ следующим образом:

$${}_lL^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp({}_ll^K{}_{K_1}) \quad \text{или}$$

$${}_lL^K{}_{K_1} = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp\left(\frac{1}{S_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot S_2^{K_2}\right)\,. \tag{20}$$

В малом элемент группы должен сводиться к элементу алгебры. В нашем случае имеем[11]

$${}_ldL^K{}_{K_1}\Big|_{\left(\substack{S^0=S_0\\ S^\alpha=0}\right)} = {}_ldl^K{}_{K_1} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot dS_2^{K_2}\,.$$

3. Обратный вектор

По определению обратный вектор $\mathbf{S}^{-1}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{e}_0\,, \tag{21}$$

$$\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S} = \mathbf{e}_0\,. \tag{22}$$

---

[8] К группе, подобной ${}_r\mathbb{G}'$, принадлежат группы электрического заряда и слабого заряда частиц (См. Глава 4.2. Раздел II.1 и Глава 4.3. Раздел II.1).

[9] При дифференцировании необходимо учесть, что ${}_rC^K{}_{K_10} = \delta^K{}_{K_1}$ и $\exp(\delta^K{}_{K_1}) = \exp(1) \cdot \delta^K{}_{K_1}$.

[10] К группе, подобной ${}_l\mathbb{G}'$, принадлежат группы нерелятивистского и релятивистского спина частиц (См. Глава 4.2. Раздел II.2 и Глава 4.3. Раздел II.2).

[11] При дифференцировании необходимо учесть, что ${}_lC^K{}_{K_10} = \delta^K{}_{K_1}$ и $\exp(\delta^K{}_{K_1}) = \exp(1) \cdot \delta^K{}_{K_1}$.

Из уравнения (21) следует

$$ {}_rC^0{}_{K_1K_2}\cdot(S^{-1})^{K_1}\cdot S^{K_2}=1\,, \tag{23}$$
$$ {}_rC^\alpha{}_{K_1K_2}\cdot(S^{-1})^{K_1}\cdot S^{K_2}=0 \tag{24}$$

или иначе

$$ {}_lC^0{}_{K_1K_2}\cdot(S^{-1})^{K_2}\cdot S^{K_1}=1\,, \tag{25}$$
$$ {}_lC^\alpha{}_{K_1K_2}\cdot(S^{-1})^{K_2}\cdot S^{K_1}=0\,. \tag{26}$$

В уравнениях (24) и (26) индекс α пробегает значения

$$\alpha\sim(k,k_1k_2,k_1k_2k_3\,,1324),$$

Из уравнения (22) следует

$$ {}_rC^0{}_{K_1K_2}\cdot(S^{-1})^{K_2}\cdot S^{K_1}=1\,, \tag{27}$$
$$ {}_rC^\alpha{}_{K_1K_2}\cdot(S^{-1})^{K_2}\cdot S^{K_1}=0 \tag{28}$$

или иначе

$$ {}_lC^0{}_{K_1K_2}\cdot(S^{-1})^{K_1}\cdot S^{K_2}=1\,, \tag{29}$$
$$ {}_lC^\alpha{}_{K_1K_2}\cdot(S^{-1})^{K_1}\cdot S^{K_2}=0\,. \tag{30}$$

Вычислим полусуммы уравнений (23), (29) и (24), (30)

$$\frac12\cdot({}_rC^0{}_{K_1K_2}+{}_lC^0{}_{K_1K_2})\cdot(S^{-1})^{K_1}\cdot S^{K_2}=1\,, \tag{31}$$
$$\frac12\cdot({}_rC^\alpha{}_{K_1K_2}+{}_lC^\alpha{}_{K_1K_2})\cdot(S^{-1})^{K_1}\cdot S^{K_2}=0 \tag{32}$$

и, кроме того, полусуммы уравнений (25), (27) и (26), (28)

$$\frac12\cdot({}_lC^0{}_{K_1K_2}+{}_rC^0{}_{K_1K_2})\cdot(S^{-1})^{K_2}\cdot S^{K_1}=1\,, \tag{33}$$
$$\frac12\cdot({}_lC^\alpha{}_{K_1K_2}+{}_rC^\alpha{}_{K_1K_2})\cdot(S^{-1})^{K_2}\cdot S^{K_1}=0 \tag{34}$$

Уравнение (33) сводится к уравнению (31). Для этого необходимо в выражении (33) сделать перестановку индексов и учесть, что

$$ {}_lC^0{}_{K_2K_1}={}_rC^0{}_{K_1K_2}\quad\text{и}$$
$$ {}_rC^0{}_{K_2K_1}={}_lC^0{}_{K_1K_2}\,.$$

Также уравнение (34) сводится к уравнению (32). Таким образом, координаты обратного вектора определяются следующей системой уравнений:

$$\frac12\cdot(g_{K_1K_2}+g_{K_2K_1})\cdot S^{K_2}\cdot(S^{-1})^{K_1}=1\,, \tag{35}$$
$$\frac12\cdot({}_rC^\alpha{}_{K_1K_2}+{}_lC^\alpha{}_{K_1K_2})\cdot S^{K_2}\cdot(S^{-1})^{K_1}=0 \tag{36}$$

Из выражения (10) следует, что обратный вектор правого произведения записывается через умножение обратных векторов так:

$$({}_r\mathbf{S})^{-1}=S_0\cdot\mathbf{S}_2^{-1}\circ\mathbf{S}_1^{-1}\,. \tag{37}$$

Действительно, вычисляя

$$({}_r\mathbf{S})^{-1}\circ{}_r\mathbf{S}\,,$$

получим

$$S_0\cdot\mathbf{S}_2^{-1}\circ(\mathbf{S}_1^{-1}\circ\frac{1}{S_0}\mathbf{S}_1)\circ\mathbf{S}_2=\mathbf{e}_0\,.$$

Аналогично из соотношения (11) следует, что обратный вектор левого произведения записывается через умножение обратных векторов так:

$$({}_l\mathbf{S})^{-1}=S_0\cdot\mathbf{S}_1^{-1}\circ\mathbf{S}_2^{-1}\,. \tag{38}$$

4. Дифференцирование в контравариантной универсальной алгебре действия $\mathbb{S}$

Дифференциал в алгебре $\mathbb{S}$ обозначим d. Базисные векторы $\mathbf{e}_K$ – величины постоянные в том смысле, что

$$d\mathbf{e}_K=0\,,$$

поэтому

$$d\mathbf{S}=\mathbf{e}_K\cdot dS^K\,.$$

Наличие закона умножения заставляет ввести *дифференциал по направлению.* Так для правого умножения

$$d_1\,{}_r\mathbf{S}=\frac{1}{S_0}d\mathbf{S}_1\circ\mathbf{S}_2\,. \tag{39}$$

Здесь дифференциал d_1 – дифференциал по направлению 1 означает приращение вектора ${}_r\mathbf{S}$ при приращении вектора $\mathbf{S}_1$. Соответственно,

$$d_2\,{}_r\mathbf{S}=\frac{1}{S_0}\mathbf{S}_1\circ d\mathbf{S}_2 \tag{40}$$

– дифференциал по направлению 2 означает приращение вектора ${}_r\mathbf{S}$ при приращении вектора $\mathbf{S}_2$.

Аналогичные соотношения имеют место для левого умножения

$$d_1\,{}_l\mathbf{S}=\frac{1}{S_0}\mathbf{S}_2\circ d\mathbf{S}_1\,, \tag{41}$$
$$d_2\,{}_l\mathbf{S}=\frac{1}{S_0}d\mathbf{S}_2\circ\mathbf{S}_1\,. \tag{42}$$

4.1. Уравнение структуры

Рассматривая второй дифференциал от закона умножения, договоримся, что сначала дифференцирование выполняется по вектору $\mathbf{S}_1$, а затем по вектору $\mathbf{S}_2$. Тогда имеем для правого умножения

$$d_2d_1\,{}_r\mathbf{S}=\frac{1}{S_0}d\mathbf{S}_1\circ d\mathbf{S}_2 \tag{43}$$

и для левого

$$d_2 d_1\, {}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d\mathbf{S}_2 \circ d\mathbf{S}_1\,. \tag{44}$$

Отсюда следует второй дифференциал от правого произведения координат векторов

$$d_2 d_1\, {}_r S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot dS_1^{K_1} \cdot dS_2^{K_2}\,, \tag{45}$$

а также второй дифференциал от левого произведения координат векторов

$$d_2 d_1\, {}_l S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot dS_1^{K_1} \cdot dS_2^{K_2}\,. \tag{46}$$

Вблизи единицы алгебры, в частности для $\mathbf{S}_2 \to S_0$, выражений из (39) и (41) имеем

$$d\mathbf{S}_1 = d_1\, {}_r\mathbf{S}\,, \tag{47}$$

$$d\mathbf{S}_2 = d_2\, {}_l\mathbf{S}\,. \tag{48}$$

Вблизи единицы алгебры, в частности для $\mathbf{S}_1 \to S_0$, извыражений (40) и (42) имеем

$$d\mathbf{S}_1 = d_1\, {}_l\mathbf{S}\,, \tag{49}$$

$$d\mathbf{S}_2 = d_2\, {}_r\mathbf{S}\,. \tag{50}$$

Используя соотношения (47) и (50) в соотношении (43), получим

$$d_2 d_1\, {}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d_1\, {}_r\mathbf{S} \circ d_2\, {}_r\mathbf{S}\,. \tag{51}$$

Это соотношение называется *правым уравнением структуры* контравариантной универсальной алгебры $\mathbb{S}$.

Используя соотношения (48) и (49) в соотношении (44), получим

$$d_2 d_1\, {}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d_2\, {}_l\mathbf{S} \circ d_1\, {}_l\mathbf{S}\,. \tag{52}$$

Это соотношение называется *левым уравнением структуры* контравариантной универсальной алгебры $\mathbb{S}$. По отношению к координатам векторов правое уравнение структуры имеет вид

$$d_2 d_1\, {}_r S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot d_1\, {}_r S^{K_1} \cdot d_2\, {}_r S^{K_2}\,. \tag{53}$$

По отношению к координатам векторов левое уравнение структуры имеет вид

$$d_2 d_1\, {}_l S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot d_1\, {}_l S^{K_1} \cdot d_2\, {}_l S^{K_2}\,. \tag{54}$$

Выведем уравнения структуры в общем случае (не вблизи единицы). Для этого из соотношения (39) выразим $d\mathbf{S}_1$. Имеем

$$d_1\, {}_r\mathbf{S} \circ \mathbf{S}_2^{-1} = \frac{1}{S_0} d\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_2^{-1}\,.$$

Отсюда

$$d_1\, {}_r\mathbf{S} \circ \mathbf{S}_2^{-1} = \frac{1}{S_0} \cdot d\mathbf{S}_1$$

и

$$d\mathbf{S}_1 = S_0 \cdot d_1\, {}_r\mathbf{S} \circ \mathbf{S}_2^{-1}\,.$$

Аналогично выводится

$$d\mathbf{S}_2 = S_0 \cdot \mathbf{S}_1^{-1} \circ d_2\, {}_r\mathbf{S}\,.$$

Подставляя полученные дифференциалы в соотношение (43), получим

$$d_2 d_1\, {}_r\mathbf{S} = S_0 \cdot d_1\, {}_r\mathbf{S} \circ \mathbf{S}_2^{-1} \circ \mathbf{S}_1^{-1} \circ d_2\, {}_r\mathbf{S}$$

и окончательно с использованием выражения (37)

$$d_2 d_1\, {}_r\mathbf{S} = d_1\, {}_r\mathbf{S} \circ {}_r\mathbf{S}^{-1} \circ d_2\, {}_r\mathbf{S} \tag{55}$$

Это соотношение представляет собой правое уравнение структуры в общем случае. Аналогично выводится левое уравнение структуры в общем случае

$$d_2 d_1\, {}_l\mathbf{S} = d_2\, {}_l\mathbf{S} \circ {}_l\mathbf{S}^{-1} \circ d_1\, {}_l\mathbf{S}\,. \tag{56}$$

4.2. *Правый и левый дифференциалы*

Правый дифференциал определим следующим образом:

$${}_r d\mathbf{S} = S_0 \cdot (\mathbf{S} + d\mathbf{S}) \circ \mathbf{S}^{-1} - S_0\,.$$

Отсюда

$${}_r d\mathbf{S} = S_0 \cdot d\mathbf{S} \circ \mathbf{S}^{-1}\,. \tag{57}$$

По отношению к координатам вектора правый дифференциал запишется в виде

$${}_r dS^K = S_0 \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \cdot dS^{K_1} = {}_r\Omega^K{}_{K_1} \cdot dS^{K_1}\,,$$

где введено обозначение

$${}_r\Omega^K{}_{K_1} = S_0 \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2}\,.$$

Левый дифференциал определим следующим образом:

$${}_l d\mathbf{S} = S_0 \cdot \mathbf{S}^{-1} \circ (\mathbf{S} + d\mathbf{S}) - S_0\,.$$

Отсюда

$${}_l d\mathbf{S} = S_0 \cdot \mathbf{S}^{-1} \circ d\mathbf{S}\,. \tag{58}$$

По отношению к координатам вектора левый дифференциал запишется в виде

$${}_l dS^K = S_0 \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \cdot dS^{K_1} = {}_l\Omega^K{}_{K_1} \cdot dS^{K_1}\,,$$

где введено обозначение

$$ {}_{l}\Omega^{K}{}_{K_1} = S_0 \cdot {}_{l}C^{K}{}_{K_1 K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \,. $$

Установим связь между правым и левым дифференциалами. Для этого продифференцируем (21), получим

$$ d\mathbf{S} \circ \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S} \circ d\mathbf{S}^{-1} = 0 \,. $$

Отсюда и из выражения (57)

$$ {}_{r}d\mathbf{S} = -\mathbf{S} \circ d\mathbf{S}^{-1} \,. $$

Сравнивая правую часть равенства с соотношением (58), получим

$$ {}_{r}d\mathbf{S} = -\,{}_{l}d\mathbf{S}^{-1} \,. $$

Аналогично устанавливается связь между левым и правым дифференциалами. Для этого продифференцируем (22), получим

$$ d\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1} d \circ \mathbf{S} = 0 \,. $$

Отсюда и из соотношения (58)

$$ {}_{l}d\mathbf{S} = -d\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S} \,. $$

Сравнивая правую часть равенства с (57), получим

$$ {}_{l}d\mathbf{S} = -\,{}_{r}d\mathbf{S}^{-1} \,. $$

Таким образом, рассматривая алгебраические свойства действия, необходимо привлекать два типа векторов – правые и левые – и их дифференциалы.

V. ТЕНЗОРНАЯ КОВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ

Алгебра действия фундаментальных антиобъектов основывается на универсальной ковариантной алгебре действия, которая, в свою очередь, опирается на тензорную ковариантную алгебру действия. Поэтому сначала рассмотрим тензорную ковариантную алгебру действия, затем от нее перейдем к универсальной ковариантной алгебре действия и далее обратимся к алгебре действия фундаментальных антиобъектов.

1. Образующее сопряженное пространство действия

В основе тензорной ковариантной алгебры действия лежит четырехмерное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, которое обозначим S^{*1}. Оно подобно (изоморфно) сопряженному пространству-времени специальной теории относительности (СТО). Вектор этого пространства $S^* \in S^{*1}$ запишем через базисные векторы следующим образом:

$$ S^* = S_k \cdot \mathbf{E}^k \,, $$

где S_k – координаты вектора S^*, а $\mathbf{E}^k$ – это базисные векторы сопряженного пространства-времени СТО. Здесь индекс k принимает значения 1, 2, 3, 4. $\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3$ – это базисные векторы сопряженного геометрического пространства, а $\mathbf{E}^4$ – базисный вектор сопряженного времени. Векторы и координаты пространства S^{*1} имеют размерность действия, то есть

$$ [S^*] = [S_k] = \text{Дж} \cdot \text{сек} \,. $$

Базисные векторы рассматриваются как безразмерные величины, определяющие только *направление* вектора.

Векторное пространство S^{*1} называется *образующим* пространством тензорной ковариантной алгебры действия. Базисные векторы $\mathbf{E}^k$ также называются *образующими.* В ряде случаев в качестве образующего пространства будем использовать подпространство, подобное геометрическому сопряженному подпространству СТО. Обозначим его S^{*1}_3. В этом случае вектор $S^* \in S^{*1}_3$ запишем через базисные векторы следующим образом:

$$ S^* = S_a \cdot \mathbf{E}^a \,. $$

Здесь индекс a принимает значения 1, 2, 3.

2. Тензорное произведение двух векторов образующего сопряженного пространства действия

Тензорное произведение векторов S^*_1 и S^*_2, принадлежащих образующему пространству S^{*1}, запишем следующим образом:

$$ \frac{1}{S_0} S^*_1 \otimes S^*_2 \,. $$

Здесь коэффициент S_0 имеет размерность длины и его назначение состоит в том, чтобы привести размерность тензорного произведения двух векторов к размерности одного вектора, то есть к действию.

Билинейное отображение векторов S^*_1 и S^*_2 *общего вида* запишем следующим образом:

$$ \frac{1}{S_0} F^*(S^*_1,\, S^*_2) \,. $$

По определению тензорное произведение двух векторов отождествляется с билинейным отображением этих векторов общего вида

$$ \frac{1}{S_0} S^*_1 \otimes S^*_2 \equiv \frac{1}{S_0} F^*(S^*_1,\, S^*_2) \,. $$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что билинейное отображение в конкретное векторное пространство, например

$$G^*(S_1^*,\, S_2^*)\,,$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G^*(S_1^*,\, S_2^*) = \frac{1}{S_0} L(S_1^* \otimes S_2^*)\,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$\frac{1}{S_0} F^*\left(S_1^*\,,\ S_2^*\right) = \frac{1}{S_0} F^*\left((S_1)_{k_1}\,\mathbf{E}^{k_1}\,,\ (S_2)_{k_2}\,\mathbf{E}^{k_2}\right) =$$
$$= \frac{1}{S_0}(S_1)_{k_1}\cdot(S_2)_{k_2}\cdot F^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{S_0} S_1 \otimes S_2 = \frac{1}{S_0}(S_1)_{k_1}\cdot(S_2)_{k_2}\cdot F^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Отсюда следует, что тензорное произведение двух векторов можно рассматривать как вектор, принадлежащий множеству векторов вида

$$\overset{2}{S}{}^* = S_{k_1k_2}\cdot\mathbf{E}^{k_1k_2}\,.$$

Здесь

$$\mathbf{E}^{k_1k_2} = \mathbf{E}^{k_1}\otimes\mathbf{E}^{k_2} = F^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Указанное множество векторов называется ковариантной тензорной степенью второго порядка пространства S^{*1} и обозначается $\overset{2}{\otimes}\ S^*$. Векторы $\mathbf{E}^{k_1k_2}$ рассматриваются как базисные векторы в $\overset{2}{\otimes}\ S^*$. Числа $S_{k_1k_2}$ представляют собой координаты вектора $\overset{2}{S}{}^*$, они имеют размерность действия.

3. Тензорное произведение n векторов образующего сопряженного пространства действия

Тензорное произведение n векторов $S_1^*,\ S_2^*,\ \ldots, S_n^*$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} S_1^*\otimes S_2^*\otimes\ldots\otimes S_n^*\,.$$

Здесь коэффициент S_0 имеет размерность действия, а назначение множителя

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}}$$

состоит в том, чтобы привести размерность тензорного произведения n векторов к размерности одного вектора, то есть к действию.

Полилинейное отображение общего вида n векторов $S_1^*,\ S_2^*\ ,\ \ldots, S_n^*$, принадлежащих образующему пространству, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} F^*(S_1^*,\, S_2^*,\ldots,\, S_n^*)\,.$$

По определению тензорное произведение n векторов отождествляется с полилинейным отображением общего вида этих векторов

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} S_1^*\otimes S_2^*\otimes\ldots\otimes S_n^* \equiv \frac{1}{(S_0)^{n-1}} F^*(S_1^*,\, S_2^*,\ldots,\, S_n^*)\,.$$

Формулировка "общего вида" означает, что отображение рассматривается безотносительно к конкретному векторному пространству, в которое осуществляется отображение. "Общность" тензорного произведения состоит в том, что полилинейное отображение в конкретное векторное пространство, например

$$G(S_1^*,\, S_2^*,\ldots,\, S_n^*)\,,$$

можно рассматривать как *линейное* отображение L тензорного произведения в указанное конкретное векторное пространство

$$G(S_1^*,\, S_2^*,\ldots,\, S_n^*) = \frac{1}{(S_0)^{n-1}} L(S_1^*\otimes S_2^*\otimes\ldots\otimes S_n^*)\,.$$

Вследствие полилинейности можно записать

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} F^*(S_1^*\,,\ S_2^*,\ldots,\, S_n^*) =$$
$$= \frac{1}{(S_0)^{n-1}} F^*\left((S_1)_{k_1}\,\mathbf{E}^{k_1},\ldots,(S_n)_{k_n}\,\mathbf{E}^{k_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{(S_0)^{n-1}}(S_1)_{k_1}\cdot\ldots\cdot(S_n)_{k_n}\cdot F^*(\mathbf{E}^{k_1},\ldots,\,\mathbf{E}^{k_n})\,.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(S_0)^{n-1}} S_1^*\otimes S_2^*\otimes\ldots\otimes S_n^* =$$
$$= \frac{1}{(S_0)^{n-1}}(S_1)_{k_1}\cdot\ldots\cdot(S_n)_{k_n}\cdot F^*(\mathbf{E}^{k_1},\ldots,\,\mathbf{E}^{k_n})\,.$$

Отсюда следует, что тензорное произведение n векторов можно рассматривать как вектор, принадлежащий множеству векторов вида

$$\overset{n}{S}{}^* = S_{k_1k_2\ldots k_n}\cdot\mathbf{E}^{k_1k_2\ldots k_n}\,.$$

Здесь

$$\mathbf{E}^{k_1k_2\ldots k_n} = \mathbf{E}^{k_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{E}^{k_n} = F^*(\mathbf{E}^{k_1},\ldots,\,\mathbf{E}^{k_n})\,.$$

Указанное множество векторов называется ковариантной тензорной степенью n-го порядка пространства S^{*1} и обозначается $\overset{n}{\otimes}\ S^*$. Векторы $\mathbf{E}^{k_1k_2\ldots k_n}$ рассматриваются как базисные векторы в $\overset{n}{\otimes}\ S^*$. Числа $S_{k_1k_2\ldots k_n}$ представляют собой координаты вектора $\overset{n}{S}{}^*$, они имеют размерность действия.

4. Тензорная ковариантная алгебра действия

Помимо пространств тензорных степеней порядка 2 и более введем пространство тензорной степени 0, полагая[12]

$$\overset{0}{\otimes} S^* = \mathbb{R} \cdot S_0 \,,$$

и пространство тензорной степени 1, полагая

$$\overset{1}{\otimes} S^* = S^{*1} \,.$$

Теперь рассмотрим векторное пространство, представленное суммой всех тензорных степеней. Это пространство обозначим $\otimes S^*$ и назовем *пространством ковариантных тензоров* действия. Таким образом,

$$\otimes S^* \ = \overset{0}{\otimes} S^* + \overset{1}{\otimes} S^* + \overset{2}{\otimes} S^* \ + \ldots$$

Пространство $\otimes S^*$ является не только векторным пространством[13], но и алгеброй, в которой умножение векторов представлено тензорным умножением и умножением тензоров на число. Поэтому $\otimes S^*$ называется также *тензорной ковариантной алгеброй* действия. Вектор тензорной ковариантной алгебры действия записывается следующим образом:

$$\mathbf{S}^* = S_0 \cdot \mathbf{E}^0 + S_{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_1} + S_{k_1 k_2} \cdot \mathbf{E}^{k_1 k_2} + \ldots .$$

Здесь $\mathbf{E}^0$ – действительная единица. Этот вектор удобно записать, используя *собирательный* индекс

$$K \sim \ 0 \,, \ k_1 \,, \ k_1 k_2 \,, \ k_1 k_2 k_3 \,, \ \ldots \,,$$

обобщенный базисный вектор

$$\mathbf{E}^K = \mathbf{E}^0, \, \mathbf{E}^{k_1}, \, \mathbf{E}^{k_1 k_2}, \ldots$$

и обобщенные координаты

$$S_K = S_0, \, S_{k_1}, \, S_{k_1 k_2}, \ldots ;$$

в компактном виде

$$\mathbf{S}^* = S_K \cdot \mathbf{E}^K .$$

Напомним, что векторы и координаты тензорной ковариантной алгебры действия имеют размерность действия.

Разложение ковариантных тензоров на симметрии здесь рассматриваться не будет, потому что это разложение выполняется так же, как и для контравариантных тензоров.

[12] Напомним, что $\mathbb{R}$ – это множество действительных чисел, а S_0 множитель размерности действия.

[13] Отметим, что векторное пространство ковариантных тензоров бесконечномерно.

VI. УНИВЕРСАЛЬНАЯ КОВАРИАНТНАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ

От тензорной ковариантной алгебры действия перейдем к универсальной ковариантной алгебре действия. Для этого наряду с тензорным произведением векторов образующего пространства S^{*1} будем рассматривать *скалярное* и *векторное* произведения векторов этого пространства.

1. Скалярное произведение векторов образующего сопряженного пространства действия

Скалярное произведение векторов

$$\frac{1}{S_0} S_1^* \cdot S_2^*$$

– это билинейное отображение

$$\frac{1}{S_0} F_0^* (S_1^* \,, \ S_2^*)$$

векторов в множество действительных чисел $\mathbb{R} \cdot S_0$

$$\frac{1}{S_0} S_1^* \cdot S_2^* \equiv \frac{1}{S_0} F_0^* (S_1^* \,, \ S_2^*) \in \mathbb{R} \cdot S_0 \,.$$

Вследствие билинейности можно записать

$$F_0^* (S_1^* \,, \ S_2^*) = F_0^* \left((S_1)_{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_1} \,, \ (S_2)_{k_2} \cdot \mathbf{E}^{k_2} \right) = \\ = (S_1)_{k_1} \cdot (S_2)_{k_2} \cdot F_0^* (\mathbf{E}^{k_1} \,, \ \mathbf{E}^{k_2}) \,.$$

Числовая величина

$$g^{k_1 k_2} = \mathbf{E}^{k_1} \cdot \mathbf{E}^{k_2} \equiv F_0^* (\mathbf{E}^{k_1} \,, \ \mathbf{E}^{k_2})$$

называется *контравариантным метрическим тензором*[14].

Попрежнему будем полагать, что скалярное произведение не зависит от порядка используемых сомножителей. Отсюда

$$g^{k_1 k_2} = g^{k_2 k_1} \,.$$

2. Векторное произведение векторов образующего сопряженного пространства действия

Векторное произведение векторов образующего пространства действия

$$\frac{1}{S_0} S_1^* \times S_2^*$$

[14] В отличие от метрического тензора $g_{k_1 k_2}$, который называется *ковариантным*.

– это билинейное отображение

$$\frac{1}{S_0}F_1^*(S_1^*\,,\ S_2^*)$$

векторов S_1^*, S_2^* в векторное пространство S^*:

$$\frac{1}{S_0}S_1^*\times S_2^*\equiv\frac{1}{S_0}F_1^*(S_1^*\,,\ S_2^*)\in S^*\,.$$

В силу билинейности

$$\frac{1}{S_0}S_1^*\times S_2^*=\frac{1}{S_0}(S_1)_{k_1}\cdot(S_2)_{k_2}\cdot F_1^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})\,.$$

Векторное произведение базисных векторов

$$\mathbf{E}^{k_1}\times\mathbf{E}^{k_2}=F_1^*(\mathbf{E}^{k_1}\,,\ \mathbf{E}^{k_2})$$

также является вектором образующего пространства S^{*1}. Поэтому

$$\mathbf{E}^{k_1}\times\mathbf{E}^{k_2}=C^{k_1k_2}{}_k\cdot\mathbf{E}^k\,,$$

где постоянные коэффициенты $C^{k_1k_2}{}_k$ – это координаты вектора $\mathbf{E}^{k_1}\times\mathbf{E}^{k_2}$.

3. Универсальное произведение векторов. Универсальная ковариантная алгебра действия

Произведение двух векторов образующего пространства S_1^* и S_2^*, составленное из скалярного, векторного и тензорного произведений, назовем *универсальным* и запишем следующим образом:

$$S_1^*\circ S_2^*=S_1^*\cdot S_2^*+S_1^*\times S_2^*+S_1^*\otimes S_2^*\,.$$

По отношению к базисным векторам универсальное произведение принимает вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{k_1}\circ\mathbf{E}^{k_2}&=\mathbf{E}^{k_1}\cdot\mathbf{E}^{k_2}+\mathbf{E}^{k_1}\times\mathbf{E}^{k_2}+\mathbf{E}^{k_1}\otimes\mathbf{E}^{k_2}=\\&=g^{k_1k_2}+C^{k_1k_2}{}_k\cdot\mathbf{E}^k+\mathbf{E}^{k_1k_2}\,.\end{aligned}\tag{59}$$

Алгебру, построенную на универсальном произведении, назовем *универсальной ковариантной* действия и будем обозначать $\mathbb{S}^*$. Ассоциативность универсального умножения для универсальной ковариантной алгебры действия $\mathbb{S}^*$ доказывается аналогично тому, как это было доказано для универсальной контравариантной алгебры пространства-времени $\mathbb{X}$ в Главе 1.2 Раздел III.3.1.

С универсальным умножением в обиход вводится набор числовых тензоров

$$\begin{aligned}&g^{k_1k_2}\,,\ C^{k_1k_2}{}_{k_3}\,,\\&g^{k_1k_2k_3}\,,\ C^{k_1k_2k_3}{}_{k_4}\,,\ C^{k_1k_2k_3}{}_{k_4k_5}\,,\\&g^{k_1k_2k_3k_4}\,,\ C^{k_1k_2k_3k_4}{}_{k_5}\,,\ C^{k_1k_2k_3k_4}{}_{k_5k_6}\,,\ C^{k_1k_2k_3k_4}{}_{k_5k_6k_7}\,,\\&\dots\end{aligned}$$

Конкретизация числовых тензоров связана с двумя действиями:

1) разложением числовых тензоров по симметриям;

2) введением условий, позволяющих рассматривать числовые тензоры как *единичные*, то есть таких, компоненты которых принимают значения либо $+1$, либо -1, либо 0.

Например, для *нормированных* базисных векторов образующего пространства $\mathbf{E}^1$, $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}^3$, $\mathbf{E}^4$ выполняются равенства

$$g^{11}=g^{22}=g^{33}=-g^{44}=1\,,$$

а для *ортогональных* базисных векторов имеем

$$g^{k_1k_2}=0\ \text{при}\ k_1\neq k_2\,.$$

Другой пример: в теории векторного поля[15]

$$C^{cb}{}_a=\varepsilon^{cba}\,,$$

где ε^{cba} - антисимметричный, единичный числовой тензор.

Вектор универсальной ковариантной алгебры действия $\mathbb{S}^*$ записывается так же, как вектор тензорной ковариантной алгебры действия $\otimes S^*$:

$$\mathbf{S}^*=S_0\cdot\mathbf{E}^0+S_{k_1}\cdot\mathbf{E}^{k_1}+S_{k_1k_2}\cdot\mathbf{E}^{k_1k_2}+\dots\,.\tag{60}$$

Этот вектор удобно записать, используя обобщенный базисный вектор

$$\mathbf{E}^K=\mathbf{E}^0,\,\mathbf{E}^{k_1},\,\mathbf{E}^{k_1k_2},\,\dots$$

и обобщенные координаты

$$S_K=S_0,\,S_{k_1},\,S_{k_1k_2},\,\dots$$

в компактном виде

$$\mathbf{S}^*=S_K\cdot\mathbf{E}^K\,.$$

Напомним, что базисные векторы $\mathbf{E}^K$ связаны с ковариантными базисными векторами $\mathbf{e}_I$ соотношением

$$\mathbf{E}^K\cdot\mathbf{e}_I=\delta^K{}_I\,.\tag{61}$$

VII. АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ АНТИОБЪЕКТОВ

Из универсальной ковариантной алгебры пространства-времени $\mathbb{S}^*$ выделим подалгебру, накладывая на произведение базисных векторов (59) следующие условия:

1) условие евклидовости, в которое включим два требования:

а) при $k_1=k_2$

$$\mathbf{E}^{k_1}\circ\mathbf{E}^{k_2}=\mathbf{E}^{k_1}\cdot\mathbf{E}^{k_2}\,,$$

---

[15] Индексы a ,b ,c , принимают значения 1 ,2 ,3 .

причем

$$\mathbf{E}^1\cdot\mathbf{E}^1=1\,,\ \mathbf{E}^2\cdot\mathbf{E}^2=1\,,\ \mathbf{E}^3\cdot\mathbf{E}^3=1\,,\ \mathbf{E}^4\cdot\mathbf{E}^4=-1\,.$$

б) при $k_1\neq k_2$

$$\mathbf{E}^{k_1}\circ\mathbf{E}^{k_2}=\mathbf{E}^{k_1}\otimes\mathbf{E}^{k_2}\,;$$

2) условие соседней перестановки
при $k_1\neq k_2$

$$\mathbf{E}^{k_1}\circ\mathbf{E}^{k_2}=\mathrm{sign}(k_1,k_2)\cdot\mathbf{E}^{k_2}\circ\mathbf{E}^{k_1}\,.$$

Здесь $\mathrm{sign}(k_1,k_2)$ – знак соседней перестановки, зависящий от номеров переставляемых базисных векторов[16].

Из вышеуказанных условий вытекает, что векторное произведение базисных векторов образующего пространства в подалгебре не рассматривается. Кроме того, из них следует, что произведение четного количества одинаковых базисных векторов образующего пространства сводится к базисному вектору $\mathbf{E}^0$. Например,

$$\mathbf{E}^{1111}=\mathbf{E}^1\circ\mathbf{E}^1\circ\mathbf{E}^1\circ\mathbf{E}^1=\mathbf{E}^0\,.$$

Совокупность подалгебр, снабженных умножением в соответствии с вышеуказанными условиями, назовем *алгеброй действия фундаментальных антиобъектов*. За алгеброй действия фундаментальных антиобъектов закрепим то же обозначение, что и за универсальной ковариантной алгеброй действия – $\mathbb{S}^*$.

1. Конечное число измерений алгебры действия фундаментальных антиобъектов

Условия соседней перестановки и евклидовости приводят к тому, что пространство подалгебры $\mathbb{S}^*$ имеет конечное число измерений (конечное число базисных векторов). Чтобы пояснить это, рассмотрим пространство тензоров порядка p – S^{*p}. Базисные векторы этого пространства имеют вид

$$\mathbf{E}^{i_1}\circ\mathbf{E}^{i_2}\circ\ldots\circ\mathbf{E}^{i_p}\,.$$

В это выражение не могут входить два одинаковых образующих базисных вектора. Если такое имеет место, то с помощью условия соседней транспозиции и условия евклидовости такой базисный вектор может быть сведен к базисному вектору, в произведении которого одинаковые образующие базисные векторы отсутствуют, то есть такой базисный вектор $\mathbf{E}^{i_1}\circ\mathbf{E}^{i_2}\circ\ldots\circ\mathbf{E}^{i_p}$ не является линейно независимым вектором и не является базисным вектором по определению.

Отсюда следует, что порядок p пространства тензоров S^{*p} не превышает число измерений образующего пространства n. А так как образующее пространство S^{*1} – это четырехмерное пространство, подобное сопряженному пространству-времени СТО, то $p\leq 4$. Таким образом, в крайнем случае

$$\mathbb{S}*=S^{*0}+S^{*1}+S^{*2}+S^{*3}+S^{*4}\,.$$

Если число измерений образующего пространства S^{*1} обозначить через n[17]

$$\dim S^{*1}=n\,,$$

то число измерений[18] пространства S^{*p} равно числу сочетаний из n элементов по p

$$\dim S^{*p}=\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{p!}=\mathrm{C}_n^p\,.$$

Отсюда следует что

$$\dim S^{*p}=\dim S^{*(n-p)}\,,\ \ \dim S^{*n}=1\,,\ \ \dim S^{*(n-1)}=n\,.$$

Алгебра действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$ в общем случае представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{S}^*=S^{*0}+S^{*1}+\ldots+S^{*n}\,.$$

Число измерений алгебры действия фундаментальных антиобъектов

$$N=\dim\mathbb{S}^*=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\ldots+\mathrm{C}_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

В нашем случае образующее пространство четырехмерно:

$$\dim S^1=4\,,$$

поэтому

$$\dim\mathbb{S}^*=2^4=16\,,$$

$$\dim S^{*2}=6\,,\quad \dim S^{*3}=4\,,\quad \dim S^{*4}=1\,.$$

Вектор пространства-времени (60) в нашем случае имеет вид

$$\mathbf{S}^*=S_0\cdot\mathbf{E}^0+S_i\cdot\mathbf{E}^i+S_{ij}\cdot\mathbf{E}^{ij}+S_{ijk}\cdot\mathbf{E}^{ijk}+S_{1324}\cdot\mathbf{E}^{1324}\,.$$

---

[16] Конкретное значение $\mathrm{sign}(k_1,k_2)$ определяет подалгебру универсальной ковариантной алгебры действия.

[17] Общий случай числа измерений рассматривается затем, чтобы при необходимости использовать образующее пространство с числом измерений, отличным от четырех. Например, когда образующее пространство действия подобно сопряженному геометрическому пространству, когда $n=3$.

[18] Выражение $\dim A$ означает *число измерений* векторного пространства A.

Будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$I\,,J\,,K\,,L\,,\sim(0,i,ij,ijk\,,1324),$$

$$\mathbf{S}^{*}=S_{I}\cdot\mathbf{E}^{I}\,.$$

Если образующее пространство представляет собой трехмерное пространство[19], то

$$N=\dim\mathbb{S}_{3}=2^{3}=8\,,$$

$$\dim S^{*2}=3\,,\quad \dim S^{*3}=1\,.$$

Вектор подалгебры действия фундаментальных антиобъектов (60) в этом случае имеет вид

$$\mathbf{S}^{*}=S_{0}\cdot\mathbf{E}^{0}+S_{a}\cdot\mathbf{E}^{a}+S_{ab}\cdot\mathbf{E}^{ab}+S_{123}\cdot\mathbf{E}^{123}\,.$$

Будем записывать это соотношение, используя собирательные индексы

$$A\,,B\,,C\,,D\,,\sim(0,a,ab,123),$$

$$\mathbf{S}^{*}=S_{A}\cdot\mathbf{E}^{A}\,.$$

VIII. УМНОЖЕНИЕ В АЛГЕБРЕ ДЕЙСТВИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ АНТИОБЪЕКТОВ

1. Левая и правая алгебры действия фундаментальных антиобъектов

Обратимся к умножению векторов в универсальной ковариантной алгебре действия $\mathbb{S}^{*}$. Пусть *сначала* рассматривается вектор $\mathbf{S}_{1}^{*}$, а *затем* вектор $\mathbf{S}_{2}^{*}$. С этой точки зрения вектор $\mathbf{S}_{1}^{*}$ будем называть *начальным*, а вектор $\mathbf{S}_{2}^{*}$ – *последующим*. Возможны два варианта умножения указанных векторов:

$$\mathbf{S}_{1}^{*}\circ\mathbf{S}_{2}^{*}\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *справа*, и

$$\mathbf{S}_{2}^{*}\circ\mathbf{S}_{1}^{*}\,,$$

когда последующий вектор умножается на начальный *слева*. В общем случае умножение векторов некоммутативно, поэтому

$$\mathbf{S}_{1}^{*}\circ\mathbf{S}_{2}^{*}\neq\mathbf{S}_{2}^{*}\circ\mathbf{S}_{1}^{*}\,.$$

[19] Иногда будем использовать обозначение $\mathbb{S}_{n}^{*}$ для алгебры действия фундаментальных антиобъектов, подчеркивая размерность n образующего пространства S^{*1}.

Введем обозначение для правого произведения

$$ {}_{r}\mathbf{S}^{*}=\frac{1}{S_{0}}\mathbf{S}_{1}^{*}\circ\mathbf{S}_{2}^{*}\,. \tag{62}$$

Здесь коэффициент S_0 имеет размерность действия и согласует размерности правой и левой частей уравнения. Левое произведение соответственно запишем так:

$$ {}_{l}\mathbf{S}^{*}=\frac{1}{S_{0}}\mathbf{S}_{2}^{*}\circ\mathbf{S}_{1}^{*}\,. \tag{63}$$

Алгебру, основанную на умножении (62), назовем *правой* и обозначим ${}_{r}\mathbb{S}^{*}$.

Алгебру, основанную на умножении (63), назовем *левой* и обозначим ${}_{l}\mathbb{S}^{*}$. Единицей алгебр является вектор, равный числу S_0.

Предыдущие построения повторим для умножения базисных векторов. Пусть базисные векторы $\mathbf{E}^{K_1}$ являются начальными, а базисные векторы $\mathbf{E}^{K_2}$ являются последующими. Тогда правое произведение базисных векторов запишем следующим образом:

$$\mathbf{E}^{K_{1}}\circ\mathbf{E}^{K_{2}}={}_{r}C^{K_{2}K_{1}}{}_{K}\cdot\mathbf{E}_{K}\,, \tag{64}$$

где ${}_{r}C^{K_{2}K_{1}}{}_{K}$ - *структурные постоянные* правой универсальной ковариантной алгебры ${}_{r}\mathbb{S}^{*}$.

Левое произведение базисных векторов соответственно запишем следующим образом:

$$\mathbf{E}^{K_{2}}\circ\mathbf{E}^{K_{1}}={}_{l}C^{K_{2}K_{1}}{}_{K}\cdot\mathbf{E}^{K}\,, \tag{65}$$

где ${}_{l}C^{K_{2}K_{1}}{}_{K}$ - *структурные постоянные* левой универсальной ковариантной алгебры ${}_{l}\mathbb{S}^{*}$.

Очевидно, что

$$ {}_{r}C^{K_{2}K_{1}}{}_{K}={}_{l}C^{K_{1}K_{2}}{}_{K}\,. \tag{66}$$

Для того, чтобы не возникала путанница между формулами (64) и (65), удобно ввести разное обозначение для базисных векторов левой и правой алгебр соответственно[20]:

$$\begin{aligned} {}_{l}\mathbf{E}^{K}\quad &- \quad \text{левые базисные векторы}\,,\\ {}_{r}\mathbf{E}^{K}\quad &- \quad \text{правые базисные векторы}\,. \end{aligned}$$

Тогда умножение левых базисных векторов задается структурными постоянными ${}_{l}C$

$$ {}_{l}\mathbf{E}^{K_{2}}\circ{}_{l}\mathbf{E}^{K_{1}}={}_{l}C^{K_{2}K_{1}}{}_{K}\cdot{}_{l}\mathbf{E}^{K}\,,$$

а умножение правых базисных векторов задается структурными постоянными ${}_{r}C$

$$ {}_{r}\mathbf{E}^{K_{1}}\circ{}_{r}\mathbf{E}^{K_{2}}={}_{r}C^{K_{2}K_{1}}{}_{K}\cdot{}_{r}\mathbf{E}^{K}\,.$$

[20] Такое различие теряет смысл, когда умножение векторов и соответственно алгебраические свойства множеств векторов не рассматриваются.

Учитывая

$$\mathbf{S}_1^* = (S_1)_{K_1} \cdot \mathbf{E}^{K_1}\,, \quad \mathbf{S}_2^* = (S_2)_{K_1} \cdot \mathbf{E}^{K_2}\,,$$

выражения (64) и (65), из уравнений (62) и (63) получим

$$_{r}S_K = \frac{1}{S_0} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot (S_1)_{K_1} \cdot {}_{r}C^{K_2K_1}{}_K \qquad (67)$$

и

$$_{l}S_K = \frac{1}{S_0} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot (S_1)_{K_1} \cdot {}_{l}C^{K_2K_1}{}_K\,. \qquad (68)$$

Формулы (67) и (68) задают умножение векторов по отношению к координатам векторов.

Далее рассмотрим частные случаи умножения векторов вблизи единицы алгебры. Имеем

при $(S_1)_{K_1} \to (S_1)_0 = S_0$

$$_{r}S_K = (S_2)_K\,, \qquad {}_{r}C^{K_2 0}{}_K = \delta^{K_2}{}_K\,,$$
$$_{l}S_K = (S_2)_K\,, \qquad {}_{l}C^{K_2 0}{}_K = \delta^{K_2}{}_K\,;$$

при $(S_2)_{K_2} \to (S_2)_0 = S_0$

$$_{r}S_K = (S_1)_K\,, \qquad {}_{r}C^{0K_1}{}_K = \delta^{K_1}{}_K\,,$$
$$_{l}S_K = (S_1)_K\,, \qquad {}_{l}C^{0K_1}{}_K = \delta^{K_1}{}_K\,.$$

2. Алгебра и группа линейных преобразований, ассоциированные с умножением ковариантных векторов действия

Умножение вектора $\mathbf{S}_1^*$ (справа или слева) на вектор $\mathbf{S}_2^*$ сводится к линейному преобразованию этого вектора. Действительно, введем матрицу линейного преобразования

$$_{r}l^{*K_1}{}_K = \frac{1}{S_0} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot {}_{r}C^{K_2K_1}{}_K =$$
$$= \frac{1}{S_0} \cdot (S_2)_0 \cdot {}_{r}C^{0K_1}{}_K + \frac{1}{S_0} \cdot (S_2)_\alpha \cdot {}_{r}C^{\alpha K_1}{}_K\,.$$

Тогда выражение (67) запишется как линейное преобразование

$$_{r}S_K = (S_1)_{K_1} \cdot {}_{r}l^{*K_1}{}_K\,.$$

Будем рассматривать линейное преобразование $_{r}l^{*K_1}{}_K$ как элемент алгебры, которую обозначим $_{r}\mathbb{L}^{*\prime}$, некоторой группы, которую, в свою очередь, обозначим $_{r}\mathbb{G}^{*\prime}$. Назовем $_{r}\mathbb{L}^{*\prime}$ и $_{r}\mathbb{G}^{*\prime}$ соответственно правыми алгеброй и группой, *ассоциированными с правым умножением ковариантных векторов действия* действия.[21] Преобразование (элемент) $_{r}L^{*K_1}{}_K$ этой группы строится по элементу $_{r}l^{*K_1}{}_K$ алгебры $_{r}\mathbb{L}^{*\prime}$ следующим образом:

$$_{r}L^{*K_1}{}_K = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp(\,{}_{r}l^{*K_1}{}_K)\,.$$

В малом элемент группы должен сводиться к элементу алгебры. В нашем случае имеем[22]

$$_{r}dL^{*K_1}{}_K\Big|_{\left(\substack{S_0=S_0\\ S_\alpha=0}\right)} = {}_{r}dl^{*K_1}{}_K = \frac{1}{S_0} \cdot d(S_2)_{K_2} \cdot {}_{r}C^{K_2K_1}{}_K\,.$$

Т акже используем матрицу

$$_{l}l^{*K_1}{}_K = \frac{1}{S_0} \cdot (S_2)_{K_2} \cdot {}_{l}C^{K_2K_1}{}_K =$$
$$= \frac{1}{S_0} \cdot (S_2)_0 \cdot {}_{l}C^{0K_1}{}_K + \frac{1}{S_0} \cdot (S_2)_\alpha \cdot {}_{l}C^{\alpha K_1}{}_K$$

и запишем выражение (68) как линейное преобразование

$$_{l}S_K = (S_1)_{K_1} \cdot {}_{l}l^{*K_1}{}_K\,.$$

Будем рассматривать линейное преобразование $_{l}l^{*K_1}{}_K$ как элемент алгебры, которую обозначим $_{l}\mathbb{L}^{*\prime}$, некоторой группы, которую обозначим $_{l}\mathbb{G}^{*\prime}$. Назовем $_{l}\mathbb{L}^{*\prime}$ и $_{l}\mathbb{G}^{*\prime}$ соответственно левыми алгеброй и группой, *ассоциированными с левым умножением ковариантных векторов действия.*[23] Преобразование (элемент) $_{l}L^{*K_1}{}_K$ этой группы строится по элементу $_{l}l^{*K_1}{}_K$ алгебры $_{l}\mathbb{L}^{*\prime}$ следующим образом:

$$_{l}L^{*K_1}{}_K = \frac{1}{\exp(1)} \cdot \exp(\,{}_{l}l^{*K_1}{}_K)\,.$$

В малом элемент группы должен сводиться к элементу алгебры. В нашем случае имеем[24]

$$_{l}dL^{*K_1}{}_K\Big|_{\left(\substack{S_0=S_0\\ S_\alpha=0}\right)} = {}_{l}dl^{*K_1}{}_K = \frac{1}{S_0} d(S_2)_{K_2} \cdot {}_{l}C^{K_2K_1}{}_K\,.$$

3. Скалярное произведение. Контравариантный метрический тензор

Условие соседней перестановки и условие евклидовости позволяют обобщить скалярное произведение в образующем пространстве до скалярного произведения в алгебре действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$.

Для $K_1 = K_2$

$$\mathbf{E}^{K_1} \circ \mathbf{E}^{K_2} = \mathbf{E}^{K_1} \cdot \mathbf{E}^{K_2} = g^{K_1K_2}\,.$$

Здесь $g^{K_1K_2}$ – *контравариантный метрический тензор* в алгебре действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$. Указанное скалярное произведение определяется через скалярные произведения образующих базисных векторов. Очевидно, что определенный таким

[21] К группе $_{r}\mathbb{L}^{*\prime}$ принадлежат группы электрического заряда и слабого заряда античастиц (См. Глава 4.2. Раздел II и Глава 4.3. Раздел II).

[22] При дифференцировании необходимо учесть, что $_{r}C^{0K_1}{}_K = \delta^{K_1}{}_K$ и $\exp(\delta^{K_1}{}_K) = \exp(1) \cdot \delta^{K_1}{}_K$.

[23] К группе $_{l}\mathbb{G}^{*\prime}$ принадлежат группы нерелятивистского и релятивистского спина античастиц (См. Глава 4.2. Раздел II и Глава 4.3. Раздел II).

[24] При дифференцировании необходимо учесть, что $_{l}C^{0K_1}{}_K = \delta^{K_1}{}_K$ и $\exp(\delta^{K_1}{}_K) = \exp(1) \cdot \delta^{K_1}{}_K$.

образом метрический тензор не зависит от порядка умножения базисных векторов, то есть

$$g^{K_1K_2} = g^{K_2K_1}\,.$$

Вместе с тем скалярное умножение является частным случаем универсального умножения. Отсюда для правой алгебры действия фундаментальных антиобъектов ${}_r\mathbb{S}^*$ из (64) для $K_1 = K_2$ имеем

$$\mathbf{E}^{K_1}\cdot\mathbf{E}^{K_2} = {}_rC^{K_2K_1}{}_0\cdot\mathbf{E}^0\,.$$

Отсюда

$$g^{K_1K_2} = {}_rC^{K_2K_1}{}_0\,.$$

Также для левой алгебры действия фундаментальных антиобъектов ${}_l\mathbb{S}^*$ из (65) для $K_1 = K_2$ имеем

$$\mathbf{E}^{K_2}\cdot\mathbf{E}^{K_1} = {}_lC^{K_2K_1}{}_0\cdot\mathbf{E}^0\,.$$

Отсюда

$$g^{K_2K_1} = {}_lC^{K_2K_1}{}_0\,.$$

Если учесть, что

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K = {}_lC^{K_1K_2}{}_K\,,$$

то получим: в правой и левой алгебрах действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$ имеет место один и тот же метрический тензор.

Установим еще одну связь между метрическим тензором и структурными постоянными подалгебры. Для этого воспользуемся ассоциативностью умножения в правой алгебре ${}_r\mathbb{S}^*$ по отношению к базисным векторам

$$(\,{}_r\mathbf{E}^{K_1}\circ{}_r\mathbf{E}^{K_2})\circ{}_r\mathbf{E}^{K_3} = {}_r\mathbf{E}^{K_1}\circ(\,{}_r\mathbf{E}^{K_2}\circ{}_r\mathbf{E}^{K_3})\,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (64),получим

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K\,(\,{}_r\mathbf{E}^{K}\circ{}_r\mathbf{E}^{K_3}) = (\,{}_r\mathbf{E}^{K_1}\circ{}_r\mathbf{E}^{K})\;{}_rC^{K_3K_2}{}_K\,.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (64), получим

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K\cdot{}_rC^{K_3K}{}_{K_4} = {}_rC^{KK_1}{}_{K_4}\cdot{}_rC^{K_3K_2}{}_K\,. \qquad (69)$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам K_4 и K_1. Получим

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K\cdot{}_rC^{K_3K}{}_{K_1} = {}_rC^{KK_1}{}_{K_1}\cdot{}_rC^{K_3K_2}{}_K\,. \qquad (70)$$

Так как произведение базисного вектора $\mathbf{E}^K$ на базисный вектор, отличный от $\mathbf{E}^0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^{0L}{}_M$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (70) имеет вид

$${}_rC^{K_2K_1}{}_K\cdot{}_rC^{K_3K}{}_{K_1} = {}_rC^{0K_1}{}_{K_1}\cdot{}_rC^{K_3K_2}{}_0\,.$$

Отсюда получим

$$g^{K_3K_2} = \frac{1}{N}\cdot{}_rC^{K_2K_1}{}_K\cdot{}_rC^{K_3K}{}_{K_1}\,,$$

где N–число измерений алгебры ${}_r\mathbb{S}^*$.

Аналогичное соотношение получим для структурных постоянных левой подалгебы ${}_l\mathbb{S}^*$. Для этого воспользуемся ассоциативностью умножения в левой алгебре ${}_l\mathbb{S}^*$ по отношению к базисным векторам

$$(\,{}_l\mathbf{E}^{K_1}\circ{}_l\mathbf{E}^{K_2})\circ{}_l\mathbf{E}^{K_3} = {}_l\mathbf{E}^{K_1}\circ(\,{}_l\mathbf{E}^{K_2}\circ{}_l\mathbf{E}^{K_3})\,.$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (65), получим

$${}_lC^{K_1K_2}{}_K\,(\,{}_l\mathbf{E}^{K}\circ{}_l\mathbf{E}^{K_3}) = (\,{}_l\mathbf{E}^{K_1}\circ{}_l\mathbf{E}^{K})\;{}_lC^{K_2K_3}{}_K\,.$$

Откуда, используя еще раз закон умножения базисных векторов (65), получим

$${}_lC^{K_1K_2}{}_K\cdot{}_lC^{KK_3}{}_{K_4} = {}_lC^{K_1K}{}_{K_4}\cdot{}_lC^{K_2K_3}{}_K$$

или иначе

$${}_lC^{K_1K}{}_{K_4}\cdot{}_lC^{K_2K_3}{}_K = {}_lC^{KK_3}{}_{K_4}\cdot{}_lC^{K_1K_2}{}_K\,. \qquad (71)$$

Выполним в этом уравнении свертку по индексам K_4 и K_1. Получим

$${}_lC^{K_1K}{}_{K_1}\cdot{}_lC^{K_2K_3}{}_K = {}_lC^{KK_3}{}_{K_1}\cdot{}_lC^{K_1K_2}{}_K\,. \qquad (72)$$

Так как произведение базисного вектора $\mathbf{E}^K$ на базисный вектор, отличный от $\mathbf{E}^0$, не проецируется на себя, то все структурные матрицы, за исключением $C^{L0}{}_M$, являются бесследовыми. Поэтому соотношение (72) имеет вид

$${}_lC^{K_10}{}_{K_1}\cdot{}_lC^{K_2K_3}{}_0 = {}_lC^{KK_3}{}_{K_1}\cdot{}_lC^{K_1K_2}{}_K\,.$$

Отсюда получим

$$g^{K_2K_3} = \frac{1}{N}\cdot{}_lC^{KK_3}{}_{K_1}\cdot{}_lC^{K_1K_2}{}_K\,,$$

где N–число измерений алгебры ${}_l\mathbb{S}^*$.

Скалярное произведение вектора действия фундаментальных антиобъектов на себя определяет его квадрат длины

$$\mathbf{S}^*\cdot\mathbf{S}^* = g^{IK}\,S_I\,S_K\,.$$

Алгебру действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$ необходимо подчинить условию: *квадрат длины вектора* $\mathbf{S}^*$ *равен нулю*[25]:

$$\mathbf{S}^*\cdot\mathbf{S}^* \equiv g^{IK}\,S_I\,S_K = 0\,.$$

По существу это условие позволяет рассматривать координаты S_0 как обобщение *интервала* образующего пространства действия.

---

[25] Пояснения к этому условию приведены в Главе 1.1 Раздел IV.5.

IX. БЕЗРАЗМЕРНАЯ АЛГЕБРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Базисные векторы $\mathbf{e}_I$ участвуют в построении как контравариантной алгебры действия фундаментальных объектов $\mathbb{S}$, так и контравариантной алгебры пространства-времени фундаментальных объектов $\mathbb{X}$. Принадлежность вектора или алгебре действия или алгебре пространства-времени определяется размерностью координат вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *контравариантной алгебре фундаментальных объектов.* Обозначим безразмерную алгебру фундаментальных объектов следующим образом: $(\mathbb{S}, \mathbb{X})$. Необходимо отметить, что умножение в контравариантной алгебре $(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ является некоммутативным, поэтому алгебра $(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ существует в двух модификациях: правой – ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ и левой – ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})$. Для правой контравариантной алгебры фундаментальных объектов ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ умножение базисных векторов имеет вид

$$ {}_r\mathbf{e}_K \circ {}_r\mathbf{e}_I = {}_r\mathbf{e}_L \cdot {}_rC^L{}_{KI} \,. $$

Для левой контравариантной алгебры фундаментальных объектов ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ умножение базисных векторов имеет вид

$$ {}_l\mathbf{e}_I \circ {}_l\mathbf{e}_K = {}_l\mathbf{e}_L \cdot {}_lC^L{}_{KI} \,. $$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$ C^L{}_{KI} \sim {}_rC^L{}_{KI} \,, \quad {}_lC^L{}_{KI} $$

участвуют в формировании оператора набла фундаментальных антиобъектов. Структурные постоянные ${}_rC^L{}_{KI}$ участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные ${}_lC^L{}_{KI}$ участвуют в формировании правого оператора набла.

X. БЕЗРАЗМЕРНАЯ АЛГЕБРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ АНТИОБЪЕКТОВ

Базисные векторы $\mathbf{E}^I$ участвуют в построении как ковариантной алгебры действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$, так и ковариантной алгебры пространства-времени фундаментальных антиобъектов $\mathbb{X}^*$. Принадлежность вектора или алгебре действия или алгебре пространства-времени фундаментальных антиобъектов определяется размерностью вектора. Поэтому, если не рассматривать размерность вектора или считать вектор безразмерным, то можно говорить вообще о *ковариантной алгебре фундаментальных антиобъектов.* Обозначим безразмерную алгебру фундаментальных антиобъектов следующим образом: $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$. Необходимо отметить, что умножение в ковариантной алгебре $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ является некоммутативным, поэтому алгебра $(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ существует в двух модификациях: правой – ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ и левой – ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$. Для правой ковариантной алгебры фундаментальных антиобъектов ${}_r(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ умножение базисных векторов имеет вид

$$ {}_r\mathbf{E}^K \circ {}_r\mathbf{E}^I = {}_rC^{IK}{}_L \cdot {}_r\mathbf{E}^L \,. $$

Для левой ковариантной алгебры фундаментальных антиобъектов ${}_l(\mathbb{S}, \mathbb{X})^*$ умножение базисных векторов имеет вид

$$ {}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K = {}_lC^{IK}{}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L \,. $$

Кроме того, необходимо отметить, что структурные постоянные

$$ C^{IK}{}_L \sim {}_rC^{IK}{}_L \,, \quad {}_lC^{IK}{}_L $$

участвуют в формировании оператора набла фундаментальных объектов. Структурные постоянные ${}_rC^{IK}{}_L$ участвуют в формировании левого оператора набла, а структурные постоянные ${}_lC^{IK}{}_L$ участвуют в формировании правого оператора набла.

XI. СКАЛЯРНОЕ ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА

Обратимся теперь к скалярному действию для фундаментального объекта. Сначала введем скалярную функцию, определяемую как *функцию Лагранжа*, которую обозначим

$$ \mathscr{L} \,. $$

Скалярное действие для фундаментального объекта определим как неопределенный интеграл от функции Лагранжа по некоторому "объему" $d\Omega$

$$ \mathscr{S} = \int \mathscr{L} \cdot d\Omega \,. \tag{73} $$

В дальнейшем для упрощения изложения элемент объема $d\Omega$, по которому выполняется интегрирование, и его трансформационные свойства не рассматриваются, и поэтому, в частности, не будем делать различие между функцией Лагранжа и лагранжевой плотностью.

В определении функции Лагранжа и скалярном действии участвуют две функциональные зависимости.

1. Функциональная зависимость вектора действия от вектора искривленного пространства-времени

$$ \mathbf{S}(\mathcal{Y}) \,. $$

2. Функциональная зависимость вектора искривленного пространства-времени от вектора системы отсчета

$$ \mathcal{Y}(\mathbf{x}) \,. $$

Будем рассматривать скалярное действие по мере усложнения этого понятия. Сначала дадим определение скалярного действия, не обращаясь к алгебраическим свойствам векторов действия и векторов искривленного пространства-времени.

1. Упрощенное скалярное действие

Введем два векторных оператора набла. Оператор набла в искривленном пространстве-времени – красный оператор –

$$\nabla = \frac{\partial}{D\mathcal{Y}}\,.$$

Оператор набла в системе отсчета – синий оператор –

$$\nabla = \frac{D}{\partial\mathbf{x}}\,.$$

С помощью оператора ∇ сформируем производную от функции $\mathbf{S}(\mathcal{Y})$

$$\nabla(\mathbf{S}) = \frac{\partial\mathbf{S}}{D\mathcal{Y}}\,. \tag{74}$$

С помощью оператора ∇ сформируем производную от функции $\mathcal{Y}(\mathbf{x})$

$$\nabla(\mathcal{Y}) = \frac{D\mathcal{Y}}{\partial\mathbf{x}}\,. \tag{75}$$

И теперь, используя производные (74) и (75), сформируем скалярную величину

$$\nabla(\mathbf{S})\cdot\nabla(\mathcal{Y}) = \frac{\partial\mathbf{S}}{D\mathcal{Y}}\cdot\frac{D\mathcal{Y}}{\partial\mathbf{x}}\,,$$

представляющую собой скалярное произведение как красных так и синих векторов, и отождествим эту величину с функцией Лагранжа, то есть положим

$$\mathscr{L} = \frac{\partial\mathbf{S}}{D\mathcal{Y}}\cdot\frac{D\mathcal{Y}}{\partial\mathbf{x}}\,. \tag{76}$$

Отсюда упрощенное скалярное действие для фундаментального объекта определяется следующим образом:

$$\mathscr{S} = \int\frac{\partial\mathbf{S}}{D\mathcal{Y}}\cdot\frac{D\mathcal{Y}}{\partial\mathbf{x}}\cdot d\Omega\,.$$

Выразим функцию Лагранжа через координаты векторов. Сначала обратимся к синим векторам. Подставим в (76) выражения

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_K\cdot S^K\,,\quad \nabla = \nabla_{K_1}\cdot\mathbf{E}^{K_1} = \frac{D}{\partial x^{K_1}}\cdot\mathbf{E}^{K_1}$$

и учтем, что

$$\mathbf{e}_K\cdot\mathbf{E}^{K_1} = \delta^{K_1}{}_K\,.$$

Получим

$$\mathscr{L} = \frac{\partial S^K}{D\mathcal{Y}}\cdot\frac{D\mathcal{Y}}{\partial x^K}\,. \tag{77}$$

Теперь обратимся к красным векторам. Согласно Разделу V Главы 2.4. вектор искривленного пространства-времени $\mathcal{Y}$ определяется соответствующим вектором движущегося пространства-времени, который, в свою очередь, определяется коэффициентами разложения по векторам системы отсчета. Таким образом, имеем соответствие

$$\mathcal{Y}\sim\mathbf{y}(x),\ \mathbf{l}(x),\ \mathbf{a}(x),$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}(x) = \mathbf{e}_I\cdot y^I(x)\,,\\
&\mathbf{l}(x) = \mathbf{I}^K{}_I\cdot l^I{}_K(x) = \mathbf{I}^K{}_I\cdot\frac{Dy^I(x)}{\partial x^K}\,,\\
&\mathbf{a}(x) = \mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I\cdot l^I{}_{K_1K_2}(x) = \mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I\cdot\frac{Dl^I{}_{K_1}(x)}{\partial x^{K_2}} =\\
&= \mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I\cdot\frac{D_2D_1y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\,.
\end{aligned}$$

Поэтому функцию Лагранжа (77) можно записать так

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = {}&\frac{\partial S^K(\mathbf{y},\mathbf{l},\mathbf{a})}{D\mathbf{y}}\cdot\frac{D\mathbf{y}}{\partial x^K} + \frac{\partial S^K(\mathbf{y},\mathbf{l},\mathbf{a})}{D\mathbf{l}}\cdot\frac{D\mathbf{l}}{\partial x^K} +\\
&+\frac{\partial S^K(\mathbf{y},\mathbf{l},\mathbf{a})}{D\mathbf{a}}\cdot\frac{D\mathbf{a}}{\partial x^K}\,.
\end{aligned}$$

После подстановки выражений векторов $\mathbf{y}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{a}$ через координаты, получим окончательно

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = {}&\frac{\partial S^K(y,l,a)}{Dy^I}\cdot\frac{Dy^I}{\partial x^K} + \frac{\partial S^K(y,l,a)}{Dl^I{}_{K_1}}\cdot\frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K} +\\
&+\frac{\partial S^K(y,l,a)}{Dl^I{}_{K_1K_2}}\cdot\frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\,.
\end{aligned} \tag{78}$$

На этом основании для упрощенного скалярного действия фудаментального объекта имеем

$$\begin{aligned}
\mathscr{S} = \int\Bigg(&\frac{\partial S^K(y,l,a)}{Dy^I}\cdot\frac{Dy^I}{\partial x^K} + \frac{\partial S^K(y,l,a)}{Dl^I{}_{K_1}}\cdot\frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K} +\\
&+\frac{\partial S^K(y,l,a)}{Dl^I{}_{K_1K_2}}\cdot\frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\Bigg)\,d\Omega\,.
\end{aligned} \tag{79}$$

2. Скалярное действие в общем случае

При построении скалярного действия для фундаментального объекта в общем случае необходимо учесть, что векторы действия фундаментального объекта составляют алгебру действия, а векторы искривленного пространства-времени составляют алгебру искривленного пространства-времени.

А именно, необходимо учесть что векторы действия существуют в двух модификациях[26]: левый вектор ${}_l\mathbf{S}$ с координатами ${}_lS^K$ и правый вектор ${}_r\mathbf{S}$ с координатами ${}_rS^K$. Для левого вектора действия имеет место левое уравнение структуры (52):

$$d_2 d_1\, {}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d_2\, {}_l\mathbf{S} \circ d_1\, {}_l\mathbf{S}\,.$$

или в координатной форме (54)

$$d_2 d_1\, {}_lS^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot d_1\, {}_lS^{K_1} \cdot d_2\, {}_lS^{K_2}\,.$$

Для правого вектора действия имеет место правое уравнение структуры (51):

$$d_2 d_1\, {}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d_1\, {}_r\mathbf{S} \circ d_2\, {}_r\mathbf{S}\,.$$

или в координатной форме (53)

$$d_2 d_1\, {}_rS^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot d_1\, {}_rS^{K_1} \cdot d_2\, {}_rS^{K_2}\,.$$

Кроме того необходимо учесть, что кинематические переменные $\mathbf{y}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{a}$ также существуют в двух модификациях: левые кинематические переменные ${}_l\mathbf{y}$, ${}_l\mathbf{l}$, ${}_l\mathbf{a}$ с координатами ${}_ly^I$, ${}_ll^I{}_K$, ${}_ll^I{}_{K_1K_2}$ соответственно и правые кинематические переменные ${}_r\mathbf{y}$, ${}_r\mathbf{l}$, ${}_r\mathbf{a}$ с координатами ${}_ry^I$, ${}_rl^I{}_K$, ${}_rl^I{}_{K_1K_2}$ соответственно.

Для учета алгебраических свойств векторов действия и векторов искривленного пространства-времени необходимо ввести *левую* функцию Лагранжа

$$\begin{aligned}{}_l\mathscr{L} = &\frac{\partial\, {}_lS^K({}_ly,\, {}_ll,\, {}_la)}{D\, {}_ly^I} \cdot \frac{D\, {}_ly^I}{\partial x^K} + \\ &+ \frac{\partial\, {}_lS^K({}_ly,\, {}_ll,\, {}_la)}{D\, {}_ll^I{}_{K_1}} \cdot \frac{D\, {}_ll^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \\ &+ \frac{\partial\, {}_lS^K({}_ly,\, {}_ll,\, {}_la)}{D\, {}_ll^I{}_{K_1K_2}} \cdot \frac{D\, {}_ll^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\end{aligned} \qquad (80)$$

и *правую* функцию Лагранжа

$$\begin{aligned}{}_r\mathscr{L} = &\frac{\partial\, {}_rS^K({}_ry,\, {}_rl,\, {}_ra)}{D\, {}_ry^I} \cdot \frac{D\, {}_ry^I}{\partial x^K} + \\ &+ \frac{\partial\, {}_rS^K({}_ry,\, {}_rl,\, {}_ra)}{D\, {}_rl^I{}_{K_1}} \cdot \frac{D\, {}_rl^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \\ &+ \frac{\partial\, {}_rS^K({}_ry,\, {}_rl,\, {}_ra)}{D\, {}_rl^I{}_{K_1K_2}} \cdot \frac{D\, {}_rl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\,.\end{aligned} \qquad (81)$$

Им соответствуют *левое* скалярное действие для фундаментального объекта

$${}_l\mathscr{S} = \int {}_l\mathscr{L} \cdot d\Omega \qquad (82)$$

и *правое* скалярное действие для фундаментального объекта

$${}_r\mathscr{S} = \int {}_r\mathscr{L} \cdot d\Omega\,. \qquad (83)$$

Скалярное действие для фундаментального объекта в общем случае определяется следующим образом:

$$\mathscr{S} = {}_l\mathscr{S} + {}_r\mathscr{S} = \int ({}_l\mathscr{L} + {}_r\mathscr{L}) \cdot d\Omega\,. \qquad (84)$$

XII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Пространство действия фундаментальных объектов $\mathbb{S}$ представляет собой совокупность контравариантных тензоров всех рангов, использующих в качестве образующего пространства четырехмерное пространство действия, подобное пространству-времени специальной теории относительности.

- Пространство действия фундаментальных объектов $\mathbb{S}$ является *универсальной контравариантной алгеброй*, так как на нем определено не только сложение контравариантных векторов действия, но и *универсальное* умножение этих векторов.

- Так как универсальное умножение является некоммутативным, то алгебра действия фундаментальных объектов $\mathbb{S}$ выступвет в двух модификациях: *левая* универсальная контравариантная алгебра действия ${}_l\mathbb{S}$ и *правая* универсальная контравариантная алгебра действия ${}_r\mathbb{S}$ – в зависимости от порядка умножения векторов.

- Дифференцирование закона умножения алгебры действия приводит к *уравнениям структуры*, которые объясняют квантование действия фундаментальных объектов.

- Пространство действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$ представляет собой совокупность ковариантных тензоров всех рангов, использующих в качестве образующего пространства сопряженное четырехмерное пространство действия, подобное сопряженному пространству-времени специальной теории относительности.

- Пространство действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$ является *универсальной ковариантной алгеброй*, так как на нем определено не только сложение ковариантных векторов действия, но и *универсальное* умножение этих векторов.

- Так как универсальное умножение является некоммутативным, то алгебра действия фундаментальных антиобъектов $\mathbb{S}^*$ выступает в двух

[26] См. Раздел V Главы 3.1.

модификациях: *левая* универсальная ковариантная алгебра действия ${}_l\mathbb{S}$ и *правая* универсальная ковариантная алгебра действия ${}_r\mathbb{S}$ – в зависимости от порядка умножения векторов.

Глава 3.2 Скалярное действие для фундаментального объекта. Принцип наименьшего действия

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой Главе алгебраические свойства множества векторов действия $\mathbb{S}$ не рассматриваются. Умножение векторов действия сводится к их скалярному умножению. Поэтому множество векторов действия $\mathbb{S}$ сводится к векторному пространству, и поэтому левые векторы действия не отличимы от правых, то есть

$$_l\mathbf{S} \equiv {}_r\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}\,.$$

Вектор действия рассматривается как функция векторов системы отсчета $\mathbb{X}$. В этой Главе алгебраические свойства множества векторов пространства-времени системы отсчета $\mathbb{X}$ также не рассматриваются. Умножение векторов пространства-времени сводится к их скалярному умножению. Поэтому множество векторов пространства-времени $\mathbb{X}$ сводится к векторному пространству, и поэтому левые векторы пространства-времени не отличимы от правых, то есть

$$_l\mathbf{x} \equiv {}_r\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}\,.$$

Таким образом, в этой Главе вектор действия фундаментального объекта рассматривается как функция координат векторов системы отсчета

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(x)\,.$$

II. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА

Вектор действия $\mathbf{S} = \mathbf{e}_K S^K$ призван описывать энергетические и динамические явления с участием фундаментального объекта, поэтому будем называть его *первичным динамическим параметром* фундаментального объекта.

1. Внешние динамические параметры фундаментального объекта

В этом Разделе полагаем, что фундаментальный объект находится в поле внешней симметрии (левом кинематическом поле). Напомним, что поле внешней симметрии (левое кинематическом поле) определяется левыми кинематическими переменными, которые представляют собой коэффициенты разложения координат универсальной контравариантной алгебры левого искривленного пространства-времени в ряд Тейлора по координатам системы отсчета (формула (21) Главы 2.4.):

$$\begin{aligned} {}_ly^I(x+dx) = {}_ly^I(x) + {}_l l^I{}_K \cdot dx^K + \\ + {}_l l^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \\ + {}_l l^I{}_{K_1K_2K_3} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} \cdot d_3x^{K_3} + \dots \end{aligned} \qquad (1)$$

Для удобства будем использовать переобозначение

$$_ly \to y\,, \quad _ll \to l$$

и записывать указанный ряд Тейлора в следующем виде:

$$\begin{aligned} y^I(x^K + dx^K) = y^I(x^K) + l^I{}_K \cdot dx^K + \\ + l^I{}_{K_1K_2} \cdot d_1x^{K_1} \cdot d_2x^{K_2} + \dots\,, \end{aligned}$$

На этом основании считаем, что вектор действия фундаментального объекта, находящегося в поле внешней симметрии, является функцией левых кинематических переменных[1]

$$y^I(x)\,, \quad l^I_K(x)\,, \quad l^I_{K_1K_2}(x)$$

и в результате вектор действия является сложной функцией от координат векторов системы отсчета

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}\left(y^I(x)\,,\ l^I_K(x)\,,\ l^I_{K_1K_2}(x)\right)$$

или в другой записи

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\left(y^I(x)\,,\ \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K}\,,\ \frac{D_2D_1y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)\,.$$

Координаты вектора x системы отсчета рассматриваются как независимые переменные, а кинематические переменные $y^I(x)$, $l^I_K(x)$, $l^I_{K_1K_2}(x)$, напротив, как зависимые переменные. Дифференциал по независимым переменным обозначен d, дифференциал по кинематическим переменным обозначен D. Запишем дифференциал $d\mathbf{S}$ следующим образом:

$$d\mathbf{S} = P_I(\mathbf{S})\cdot Dy^I + M^K{}_I(\mathbf{S})\cdot Dl^I{}_K + W^{K_2K_1}{}_I(\mathbf{S})\cdot Dl^I{}_{K_1K_2}\,.$$

Здесь использованы следующие обозначения для операторов дифференцирования

- $$P_I(\,) = \frac{\partial}{Dy^I}\,,$$

[1] Для целей физики ограничимся рассмотрением трех указанных коэффициентов разложения.

- $$M^K{}_I(\,) = \frac{\partial}{Dl^I{}_K}\,,$$

- $$W^{K_2K_1}{}_I(\,) = \frac{\partial}{Dl^I{}_{K_1K_2}}\,.$$

Введем величины, которые вместе с вектором действия $\mathbf{S}$ будем называть *динамическими параметрами* фундаментального объекта, точнее *внешними динамическими параметрами* фундаментального объекта:

- *импульс* фундаментального объекта
$$\mathbf{p}_I = -P_I(\mathbf{S}) = -\frac{\partial \mathbf{S}}{Dy^I}\,,$$

- *момент* фундаментального объекта
$$\mathbf{m}^K{}_I = -M^K{}_I(\mathbf{S}) = -\frac{\partial \mathbf{S}}{Dl^I{}_K}\,,$$

- *второй момент* фундаментального объекта
$$\mathbf{w}^{K_2K_1}{}_I = -W^{K_2K_1}{}_I(\mathbf{S}) = -\frac{\partial \mathbf{S}}{Dl^I{}_{K_1K_2}}\,.$$

В связи с этим оператор $-P_I(\,)$ будем называть *оператором импульса*, оператор $-M^K{}_I(\,)$ будем называть *оператором момента*, оператор $-W^{K_2K_1}{}_I(\,)$ будем называть *оператором второго момента*.

Если учесть, что

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot dS^K\,, \ \text{так как } d\mathbf{e}_K = 0\,,$$

то вышеуказанные динамические параметры выражаются через координаты вектора действия:

- *импульс* фундаментального объекта
$$\mathbf{p}_I = -\mathbf{e}_K \cdot P_I(S^K) = -\mathbf{e}_K\frac{\partial S^K}{Dy^I}\,,$$

- *момент* фундаментального объекта
$$\mathbf{m}^{K_1}{}_I = -\mathbf{e}_K \cdot M^{K_1}{}_I(S^K) = -\mathbf{e}_K\frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1}}\,,$$

- *второй момент* фундаментального объекта
$$\mathbf{w}^{K_2K_1}{}_I = -\mathbf{e}_K \cdot W^{K_2K_1}{}_I(S^K) = -\mathbf{e}_K\frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1K_2}}\,.$$

Введем обозначения для координат

- *импульса* фундаментального объекта
$$p^K{}_I = -P_I(S^K) = -\frac{\partial S^K}{Dy^I}\,,$$

- *момента* фундаментального объекта
$$m^{KK_1}{}_I = -M^{K_1}{}_I(S^K) = -\frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1}}\,,$$

- *второго момента* фундаментального объекта
$$w^{KK_2K_1}{}_I = -W^{K_2K_1}{}_I(S^K) = -\frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1K_2}}\,.$$

Произвольной функции от левых кинематических переменных соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = P_K(\,)\cdot Dy^K + M^K{}_I(\,)\cdot Dl^I{}_K + W^{K_2K_1}{}_I(\,)\cdot Dl^I{}_{K_1K_2}\,.$$

2. Внутренние динамические параметры фундаментального объекта

В этом Разделе полагаем, что фундаментальный объект находится в поле внутренней симметрии (правом кинематическом поле). Напомним, что поле внутренней симметрии (правое кинематическом поле) определяется правыми кинематическими переменными, которые представляют собой коэффициенты разложения координат универсальной контравариантной алгебры правого искривленного пространства-времени в ряд Тейлора по координатам системы отсчета (формула (63) Главы 2.4.):

$$\begin{aligned} {}_ry^I(x+dx) = {}_ry^I(x) + {}_rl^I{}_K\cdot dx^K + \\ + {}_rl^I{}_{K_1K_2}\cdot d_1x^{K_1}\cdot d_2x^{K_2} + \\ + {}_rl^I{}_{K_1K_2K_3}\cdot d_1x^{K_1}\cdot d_2x^{K_2}\cdot d_3x^{K_3} + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Для удобства будем использовать переобозначение

$${}_ry \to Y\,, \quad {}_rl \to L$$

и записывать указанный ряд Тейлора в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y^I(x^K + dx^K) = Y^I(x^K) + L^I{}_K\cdot dx^K + \\ + L^I{}_{K_1K_2}\cdot d_1x^{K_1}\cdot d_2x^{K_2} + \ldots\,, \end{aligned}$$

На этом основании считаем, что вектор действия фундаментального объекта, находящегося в поле внутренней симметрии, является функцией правых кинематических переменных[2]

$$Y^I(x)\,, \quad L^I_K(x)\,, \quad L^I_{K_1K_2}(x)$$

и в результате вектор действия является сложной функцией от координат векторов системы отсчета

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}\left(Y^I(x)\,,\ L^I_K(x)\,,\ L^I_{K_1K_2}(x)\right)$$

или в другой записи

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\left(Y^I(x)\,,\ \frac{DY^I(x)}{\partial x^K}\,,\ \frac{D_2D_1Y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)\,.$$

[2] Для целей физики ограничимся рассмотрением трех указанных коэффициентов разложения.

Координаты вектора x системы отсчета рассматриваются как независимые переменные, а кинематические переменные $Y^I(x)$, $L^I_K(x)$, $L^I_{K_1K_2}(x)$, напротив, как зависимые переменные. Дифференциал по независимым переменным обозначен d, дифференциал по кинематическим переменным обозначен D. Запишем дифференциал $d\mathbf{S}$ следующим образом:

$$d\mathbf{S} = Q_I(\mathbf{S}) \cdot DY^I + \\ + I^K{}_I(\mathbf{S}) \cdot DL^I{}_K + J^{K_2K_1}{}_I(\mathbf{S}) \cdot DL^I{}_{K_1K_2} \,.$$

Здесь использованы следующие обозначения для операторов дифференцирования:

- $$Q_I(\,) = \frac{\partial}{DY^I}\,,$$
- $$I^K{}_I(\,) = \frac{\partial}{DL^I{}_K}\,,$$
- $$J^{K_2K_1}{}_I(\,) = \frac{\partial}{DL^I{}_{K_1K_2}}\,.$$

Введем величины, которые вместе с вектором действия $\mathbf{S}$ будем называть *динамическими параметрами*, точнее *внутренними динамическими параметрами*:

- *заряд* фундаментального объекта
$$\mathbf{Q}_I = -Q_I(\mathbf{S}) = -\frac{\partial\mathbf{S}}{DY^I}\,,$$
- *ток* фундаментального объекта
$$\mathbf{I}^K{}_I = -I^K{}_I(\mathbf{S}) = -\frac{\partial\mathbf{S}}{DL^I{}_K}\,,$$
- *второй ток* фундаментального объекта
$$\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I = -J^{K_2K_1}{}_I(\mathbf{S}) = -\frac{\partial\mathbf{S}}{DL^I{}_{K_1K_2}}\,.$$

В связи с этим оператор $-Q_I(\,)$ будем называть *оператором заряда*, оператор $-I^K{}_I(\,)$ будем называть *оператором тока*, оператор $-J^{K_2K_1}{}_I(\,)$ будем называть *оператором второго тока*.

Если учесть, что

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot dS^K\,, \text{ так как } d\mathbf{e}_K = 0\,,$$

то вышеуказанные динамические параметры выражаются через координаты вектора действия

- *заряд* фундаментального объекта
$$\mathbf{Q}_I = -\mathbf{e}_K \cdot Q_I(S^K) = -\mathbf{e}_K\frac{\partial S^K}{DY^I}\,,$$
- *ток* фундаментального объекта
$$\mathbf{I}^{K_1}{}_I = -\mathbf{e}_K \cdot I^{K_1}{}_I(S^K) = -\mathbf{e}_K\frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1}}\,,$$
- *второй ток* фундаментального объекта
$$\mathbf{J}^{K_2K_1}{}_I = -\mathbf{e}_K \cdot J^{K_2K_1}{}_I(S^K) = -\mathbf{e}_K\frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1K_2}}\,.$$

Введем обозначения для координат

- *заряда* фундаментального объекта
$$Q^K{}_I = -Q_I(S^K) = -\frac{\partial S^K}{DY^I}\,,$$
- *тока* фундаментального объекта
$$I^{KK_1}{}_I = -I^{K_1}{}_I(S^K) = -\frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1}}\,,$$
- *второго тока* фундаментального объекта
$$J^{KK_2K_1}{}_I = -J^{K_2K_1}{}_I(S^K) = -\frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1K_2}}\,.$$

Произвольной функции от правых кинематических переменных соответствует операторное дифференциальное уравнение

$$d = Q_K(\,)\cdot DY^K + I^K{}_I(\,)\cdot DL^I{}_K + J^{K_2K_1}{}_I(\,)\cdot DL^I{}_{K_1K_2}\,.$$

III. СКАЛЯРНОЕ ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА

1. Скалярное действие для фундаментального объекта в поле внешней симметрии

Обратимся теперь к скалярному действию для фундаментального объекта, находящегося в поле внешней симметрии. Сначала введем скалярную функцию, определяемую как *левую функцию Лагранжа*

$${}_l\mathscr{L} = {}_l\mathscr{L}\left(y^I(x)\,,\ l^I_K(x)\,,\ l^I_{K_1K_2}(x)\right)$$

или иначе

$${}_l\mathscr{L} = {}_l\mathscr{L}\left(y^I(x)\,,\ \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K}\,,\ \frac{D_2D_1y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)\,. \qquad (3)$$

Скалярное действие для фундаментального объекта в поле внешней симметрии определяется как неопределенный интеграл от функции Лагранжа по некоторому "объему" $d\Omega$

$${}_l\mathscr{S} = \int {}_l\mathscr{L}\left(y^I(x)\,,\ \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K}\,,\ \frac{D_2D_1y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)d\Omega\,. \qquad (4)$$

В дальнейшем для упрощения изложения элемент объема $d\Omega$, по которому выполняется интегрирование, и его трансформационные свойства не рассматриваются, и поэтому не будем делать различие между функцией Лагранжа и лагранжевой плотностью.

В частном случае, когда пространство системы отсчета $\mathbb{X}$ сводится к пространству-времени специальной теории относительности,

$$x^K \to x^k, \text{ где индекс } k \text{ принимает значения } 1,2,3,4\,,$$
$$d\Omega \to d^4x = dx^1dx^2dx^3dx^4\,,$$

скалярное действие принимает вид

$$\imath\mathscr{S} = \int \imath\mathscr{L}\left(y^I(x)\,,\ \frac{Dy^I(x)}{\partial x^k}\,,\ \frac{D_2D_1y^I(x)}{\partial x^{k_2}\partial x^{k_1}}\right)d^4x\,. \quad (5)$$

Это выражение следует сравнить со скалярным действием, принятым в специальной теории относительности. Если величины, определяющие состояние физической системы, обозначить q, не конкретизируя их смысл, то действие в общем случае – это интеграл вида

$$\mathscr{S} = \int \mathscr{L}\left(q(x)\,,\ \frac{\partial q(x)}{\partial x^k}\right)d^4x\,, \quad (6)$$

Сравнение выражений (5) и (6) показывает три ключевых отличия вводимого нами скалярного действия:

1) функции q, определяющие состояние физической системы, представляют собой координаты искривленного пространства-времени,

2) производная $\frac{\partial}{\partial x^k}$ заменяется на искривленную производную,

3) лагранжиан зависит не только от производной первого порядка от функции, определяющей состояние физической системы, но и производной второго порядка от этой функции.

Связь между скалярным действием и вектором действия установим, исходя из следующего соотношения:

$$\imath\mathscr{L} = \frac{dS^K}{dx^K}\,,$$

и в развернутом виде

$$\imath\mathscr{L} = \imath\mathscr{L}\left(y^I(x)\,,\ \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K}\,,\ \frac{D_2D_1y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right) =$$
$$= \frac{dS^K\left(y^I(x)\,,\ \frac{Dy^I(x)}{\partial x^{K_1}}\,,\ \frac{D_2D_1y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)}{dx^K}\,. \quad (7)$$

Отсюда

$$\imath\mathscr{S} = \int \frac{dS^K\left(y^I(x)\,,\ \frac{Dy^I(x)}{\partial x^{K_1}}\,,\ \frac{D_2D_1y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)}{dx^K}d\Omega \quad (8)$$

или

$$\imath\mathscr{S} = \int\left(\frac{\partial S^K}{Dy^I}\frac{Dy^I(x)}{\partial x^K} + \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1}}\frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1K_2}}\frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\right)d\Omega\,. \quad (9)$$

Приведем другие записи скалярного действия:

$$\imath\mathscr{S} = \int\left(P_I(S^K)\frac{Dy^I(x)}{\partial x^K} + M^{K_1}{}_I(S^K)\frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \right.$$
$$\left. + W^{K_2K_1}{}_I(S^K)\frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\right)d\Omega \quad (10)$$

и

$$\imath\mathscr{S} = -\int\left(p^K{}_I\frac{Dy^I(x)}{\partial x^K} + m^{KK_1}{}_I\frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \right.$$
$$\left. + w^{KK_2K_1}{}_I\frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\right)d\Omega\,. \quad (11)$$

Иногда удобно использовать в записи скалярного действия векторы в безиндексной форме, выполняя замену

$$x^K \to x\,,\ \ y^I \to y\,,\ \ l^I{}_K \to l\,,$$
$$l^I{}_{K_1K_2} \to a\,,\ \ l^I{}_{K_1K_2K_3} \to b\,,$$
$$p^K{}_I \to p\,,\ \ m^{KK_1}{}_I \to m\,,\ \ w^{KK_2K_1}{}_I \to w\,,$$

$$\imath\mathscr{S} = -\int\left(p\cdot\frac{Dy}{\partial x} + m\cdot\frac{Dl}{\partial x} + w\cdot\frac{Da}{\partial x}\right)d\Omega \quad (12)$$

или

$$\imath\mathscr{S} = -\int(p\cdot l + m\cdot a + w\cdot b)\cdot d\Omega\,.$$

Отметим частный случай скалярного действия (8), когда рассматриваются только скалярные компоненты векторов:

$$S^K \to S^0\,,\quad x^K \to x^0\,,\quad d\Omega \to dx^0\,.$$

Тогда имеем

$$\mathscr{S} = \int\frac{dS^0}{dx^0}\cdot dx^0\,.$$

Дифференциал dx^0 – это длина линейного элемента системы отсчета. В приближении специальной теории относительности – это длина линейного элемента ds:

$$dx^0 \equiv ds\,.$$

Для релятивистской точки с массой m

$$\frac{dS^0}{dx^0} = -\mathrm{m}\cdot c$$

и скалярное действие (8) принимает известный вид

$$\mathscr{S} = -\int\mathrm{m}\cdot c\cdot ds\,.$$

2. Скалярное действие для фундаментального объекта в поле внутренней симметрии

Рассмотрим скалярное действие для фундаментального объекта, находящегося в поле внутренней симметрии. Для него функцию Лагранжа нужно переписать так:

$$ {}_r\mathscr{L} = {}_r\mathscr{L}\left(Y^I(x)\,,\ L^I_K(x)\,,\ L^I_{K_1K_2}(x)\right) $$

или иначе

$$ {}_r\mathscr{L} = {}_r\mathscr{L}\left(Y^I(x)\,,\ \frac{DY^I(x)}{\partial x^K}\,,\ \frac{D_2D_1Y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)\,. \tag{13} $$

Это выражение определим как *правую функцию Лагранжа.*

Скалярное действие для фундаментального объекта в поле внутренней симметрии определяется как неопределенный интеграл от правой функции Лагранжа по некоторому "объему" Ω

$$ {}_r\mathscr{S} = \int {}_r\mathscr{L}\left(Y^I(x)\,,\ \frac{DY^I(x)}{\partial x^K}\,,\ \frac{D_2D_1Y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right) d\Omega\,. \tag{14} $$

Как и прежде, для упрощения изложения элемент объема $d\Omega$, по которому выполняется интегрирование, и его трансформационные свойства не рассматриваются. Поэтому не будем делать различие между функцией Лагранжа и лагранжевой плотностью.

Связь между скалярным действием и вектором действия установим, исходя из следующего соотношения:

$$ {}_r\mathscr{L} = \frac{dS^K}{dx^K}\,, $$

и в развернутом виде

$$ {}_r\mathscr{L} = {}_r\mathscr{L}\left(Y^I(x)\,,\ \frac{DY^I(x)}{\partial x^K}\,,\ \frac{D_2D_1Y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right) = $$

$$ = \frac{dS^K\left(Y^I(x)\,,\ \dfrac{DY^I(x)}{\partial x^{K_1}}\,,\ \dfrac{D_2D_1Y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)}{dx^K}\,. \tag{15} $$

Отсюда

$$ {}_r\mathscr{S} = \int \frac{dS^K\left(Y^I(x)\,,\ \dfrac{DY^I(x)}{\partial x^{K_1}}\,,\ \dfrac{D_2D_1Y^I(x)}{\partial x^{K_2}\partial x^{K_1}}\right)}{dx^K} d\Omega \tag{16} $$

или

$$ {}_r\mathscr{S} = \int \left(\frac{\partial S^K}{DY^I}\frac{DY^I(x)}{\partial x^K} + \frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1}}\frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \right. $$

$$ \left. + \frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1K_2}}\frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\right) d\Omega\,. \tag{17} $$

Приведем другие записи скалярного действия:

$$ {}_r\mathscr{S} = \int \left(Q_I(S^K)\frac{DY^I(x)}{\partial x^K} + I^{K_1}{}_I(S^K)\frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \right. $$

$$ \left. + J^{K_2K_1}{}_I(S^K)\frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\right) d\Omega \tag{18} $$

и

$$ {}_r\mathscr{S} = -\int \left(Q^K{}_I\frac{DY^I(x)}{\partial x^K} + I^{KK_1}{}_I\frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \right. $$

$$ \left. + J^{KK_2K_1}{}_I\frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\right) d\Omega\,. \tag{19} $$

Будем также использовать в записи скалярного действия векторы в безиндексной форме, выполняя замену

$$ x^K \to x\,,\ \ Y^I \to Y\,,\ \ L^I{}_K \to L\,, $$
$$ L^I{}_{K_1K_2} \to A\,,\ \ l^I{}_{K_1K_2K_3} \to B\,, $$
$$ Q^K{}_I \to Q\,,\ \ I^{KK_1}{}_I \to I\,,\ \ J^{KK_2K_1}{}_I \to J\,, $$

$$ {}_r\mathscr{S} = -\int \left(Q\cdot\frac{DY}{\partial x} + I\cdot\frac{DL}{\partial x} + J\cdot\frac{DA}{\partial x}\right) d\Omega \tag{20} $$

или

$$ {}_r\mathscr{S} = -\int (Q\cdot L + I\cdot A + J\cdot B)\cdot d\Omega\,. $$

3. Принцип наименьшего действия

Замечательное свойство скалярного действия состоит в следующем.

1. Приравнивание нулю вариации действия при варьировании динамических параметров дает уравнения динамики параметров фундаментального объекта в кинематическом поле. [3] В частности:

1) Приравнивание нулю вариации действия ${}_l\mathscr{S}$ (11) при варьировании внешних динамических параметров дает уравнения динамики внешних динамических параметров (импульса, момента, второго момента) фундаментального объекта в поле внешней симметрии.

---

[3] В случае нерелятивистской механики, когда независимой переменной является время t, геометрические координаты x^a являются функциями времени

$$ x^K \to t\,,\, y^I(x) \to x^a(t)\,, $$

а скалярное действие представляет собой неопределенный интеграл

$$ \mathscr{S} = \int \mathscr{L}\left(x^a(t)\,,\ \frac{\partial x^a(t)}{\partial t}\right) dt\,, $$

принцип наименьшего действия формулируется следующим образом. Из всех мыслимых траекторий движения частицы на временном отрезке от t_1 до t_2 между фиксированными геометрическими точками $x^a(t_1)$ и $x^a(t_2)$ *действительная* траектория обладает тем свойством, что для нее *определенный* интеграл

$$ \mathscr{S}(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\left(x^a(t)\,,\ \frac{\partial x^a(t)}{\partial t}\right) dt = $$
$$ = \mathscr{S}(x^a(t_2),t_2) - \mathscr{S}(x^a(t_1),t_1) $$

принимает минимальное значение.

2) Приравнивание нулю вариации действия ${}_{r}\mathscr{S}$ (19) при варьировании внутренних динамических параметров дает уравнения динамики внутренних динамических параметров (заряда, тока, второго тока) фундаментального объекта в поле внутренней симметрии.

2. Приравнивание нулю вариации действия при варьировании кинематических переменных дает уравнения поля, создаваемого фундаментальным объектом. В частности:

1) Приравнивание нулю вариации действия ${}_{l}\mathscr{S}$ (11) при варьировании кинематических параметров l дает уравнения поля внешней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом. Источниками этого поля являются внешние динамические параметры фундаментального объекта – импульс и момент.

2) Приравнивание нулю вариации действия ${}_{r}\mathscr{S}$ (19) при варьировании кинематических переменных L дает уравнения поля внутренней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом. Источниками этого поля являются внутренние динамические параметры фундаментального объекта – заряд и ток.

Вот то направление, в котором необходимо исследовать введенные скалярные действия.

IV. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПАРАМЕТРОВ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОБЪЕКТА

1. Уравнения динамики внешних параметров фундаментального объекта

При выводе уравнений динамики внешних параметров фундаментального объекта исходим из скалярного действия в виде выражения (11)

$$
{}_{l}\mathscr{S} = -\int \left(p^{K}{}_{I}\frac{Dy^{I}(x)}{\partial x^{K}} + m^{KK_1}{}_{I}\frac{Dl^{I}{}_{K_1}}{\partial x^{K}} + \right.
$$
$$
\left. + \, w^{KK_2K_1}{}_{I}\frac{Dl^{I}{}_{K_1K_2}}{\partial x^{K}} \right) d\Omega\,.
$$

Для простоты будем использовать это соотношение в безиндексной форме

$$
{}_{l}\mathscr{S} = -\int \left(p\cdot\frac{Dy}{\partial x} + m\cdot\frac{Dl}{\partial x} + w\cdot\frac{Da}{\partial x}\right) d\Omega\,. \qquad (21)
$$

Здесь[4]

$$
p = -P(S)\,, \quad m = -M(S)\,, \quad w = -W(S)\,. \qquad (22)
$$

[4] В этих выражениях через S обозначен вектор S^{K}.

1.1. Уравнения динамики импульса фундаментального объекта

Уравнения динамики импульса установим из вариационного принципа, согласно которому вариация действия фундаментального объекта при вариации кинематической переменной y равна нулю, то есть исходным является уравнение

$$
\delta_y({}_{l}\mathscr{S}) = 0\,. \qquad (23)
$$

При этом нужно учесть, что вариация касается только динамических параметров фундаментального объекта. Таким образом

$$
\delta_y({}_{l}\mathscr{S}) = -\int \left(\delta_y p\cdot\frac{Dy}{\partial x} + \delta_y m\cdot\frac{Dl}{\partial x} + \delta_y w\cdot\frac{Da}{\partial x}\right) d\Omega\,.
$$

Учитывая выражение (22) и

$$
\delta_y(\;) = P(\;)\cdot\delta y\,,
$$

получим

$$
\delta_y({}_{l}\mathscr{S}) = \int \left(PP(S)\cdot\frac{Dy}{\partial x} + \right.
$$
$$
\left. + PM(S)\cdot\frac{Dl}{\partial x} + PW(S)\cdot\frac{Da}{\partial x}\right)\delta y\cdot d\Omega\,.
$$

Далее поменяем местами операторы дифференцирования в соответствии с

$$
PP = PP + [PP]\,, \quad PM = MP + [PM]\,,
$$
$$
PW = WP + [PW]
$$

и учтем, что

$$
PP(S)\cdot\frac{Dy}{\partial x} + MP(S)\cdot\frac{Dl}{\partial x} + WP(S)\cdot\frac{Da}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,.
$$

Получим

$$
\delta_y({}_{l}\mathscr{S}) = \int \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + [PP](S)\cdot\frac{Dy}{\partial x} + \right.
$$
$$
\left. + \, [PM](S)\cdot\frac{Dl}{\partial x} + [PW](S)\cdot\frac{Da}{\partial x}\right)\delta y\cdot d\Omega\,. \qquad (24)
$$

Исходя из вариационного принципа (23), получим уравнение динамики импульса фундаментального объекта

$$
\frac{\partial p}{\partial x} = [PP](S)\cdot\frac{Dy}{\partial x} + [PM](S)\cdot\frac{Dl}{\partial x} + [PW](S)\cdot\frac{Da}{\partial x}\,. \qquad (25)
$$

Таким образом, уравнение динамики импульса фундаментального объекта определяется перестановочными соотношениями соответствующих дифференциальных операторов. Указанные перестановочные соотношения выведены в Главе 6.2, а уравнение динамики импульса фундаментального объекта в развернутом виде приведено в Главе 6.4.

Представим правую часть уравнения (25) как вариационную производную

$$\frac{\delta p}{\partial x} = -[PP](S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} - [PM](S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} - [PW](S) \cdot \frac{Da}{\partial x}.$$

Тогда уравнение динамики импульса фундаментального объекта можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\delta p}{\partial x} = 0$$

или в индексной форме

$$\frac{Dp^K{}_I}{\partial x^K} = 0. \tag{26}$$

Записанное таким образом уравнение динамики импульса имеет форму закона сохранения. Поэтому будем называть уравнение динамики импульса, записанное в указанном виде, *законом сохранения импульса фундаментального объекта.*

1.2. Уравнения динамики момента фундаментального объекта

Уравнения динамики момента установим из вариационного принципа, согласно которому вариация действия фундаментального объекта при вариации кинематической переменной l равна нулю, то есть исходным является уравнение

$$\delta_l(\iota\mathscr{S}) = 0. \tag{27}$$

При этом нужно учесть, что вариация касается только динамических параметров фундаментального объекта. Таким образом,

$$\delta_l(\iota\mathscr{S}) = -\int \left(\delta_l p \cdot \frac{Dy}{\partial x} + \delta_l m \cdot \frac{Dl}{\partial x} + \delta_l w \cdot \frac{Da}{\partial x} \right) d\Omega.$$

Учитывая выражение (22) и

$$\delta_l(\ ) = M(\ ) \cdot \delta l,$$

получим

$$\delta_l(\iota\mathscr{S}) = \int \left(MP(S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + MM(S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} + MW(S) \cdot \frac{Da}{\partial x} \right) \delta l \cdot d\Omega.$$

Далее поменяем местами операторы дифференцирования в соответствии с

$$MP = PM + [MP], \quad MM = MM + [MM],$$
$$MW = WM + [MW]$$

и учтем, что

$$PM(S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} + MM(S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} + WM(S) \cdot \frac{Da}{\partial x} = -\frac{\partial m}{\partial x}.$$

Получим

$$\delta_l(\iota\mathscr{S}) = \int \left(-\frac{\partial m}{\partial x} + [MP](S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + [MM](S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} + [MW](S) \cdot \frac{Da}{\partial x} \right) \delta l \cdot d\Omega. \tag{28}$$

Исходя из вариационного принципа (27), получим уравнение динамики момента фундаментального объекта

$$\frac{\partial m}{\partial x} = [MP](S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} + [MM](S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} + [MW](S) \cdot \frac{Da}{\partial x}. \tag{29}$$

Таким образом, уравнение динамики момента фундаментального объекта определяется перестановочными соотношениями соответствующих дифференциальных операторов. Указанные перестановочные соотношения выведены в Главе 6.2, а уравнение динамики момента фундаментального объекта в развернутом виде приведено в Главе 6.4.

Представим правую часть уравнения (29) как вариационную производную

$$\frac{\delta m}{\partial x} = -[MP](S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} - [MM](S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} - [MW](S) \cdot \frac{Da}{\partial x}.$$

Тогда уравнение динамики момента фундаментального объекта можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\delta m}{\partial x} = 0$$

или в индексной форме

$$\frac{Dm^{KK_1}{}_I}{\partial x^K} = 0. \tag{30}$$

Записанное таким образом уравнение динамики момента имеет форму закона сохранения. Поэтому будем называть уравнение динамики момента, записанное в указанном виде, *законом сохранения момета фундаментального объекта.*

1.3. Уравнения динамики второго момента фундаментального объекта

Уравнения динамики второго момента установим из вариационного принципа, согласно которому вариация действия фундаментального объекта при вариации кинематической переменной a равна нулю, то есть исходным является уравнение

$$\delta_a(\iota\mathscr{S}) = 0. \tag{31}$$

При этом нужно учесть, что вариация касается только динамических параметров фундаментального объекта. Таким образом,

$$\delta_a({}_l\mathscr{S}) = -\int \left(\delta_a p \cdot \frac{Dy}{\partial x} + \delta_a m \cdot \frac{Dl}{\partial x} + \delta_a w \cdot \frac{Da}{\partial x}\right) d\Omega\,.$$

Учитывая выражение (22) и

$$\delta_a(\ ) = W(\ ) \cdot \delta a\,,$$

получим

$$\delta_a({}_l\mathscr{S}) = \int \left(WP(S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + WM(S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} + WW(S) \cdot \frac{Da}{\partial x}\right) \delta a \cdot d\Omega\,.$$

Далее поменяем местами операторы дифференцирования в соответствии с

$$WP = PW + [WP]\,, \quad WM = MW + [WM]\,,$$
$$WW = WW + [WW]$$

и учтем, что

$$PW(S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} + MW(S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} + WW(S) \cdot \frac{Da}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}\,.$$

Получим

$$\delta_a({}_l\mathscr{S}) = \int \left(-\frac{\partial w}{\partial x} + [WP](S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + [WM](S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} + [WW](S) \cdot \frac{Da}{\partial x}\right) \delta a \cdot d\Omega\,. \tag{32}$$

Исходя из вариационного принципа (31), получим уравнение динамики второго момента фундаментального объекта

$$\frac{\partial w}{\partial x} = [WP](S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} + [WM](S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} + [WW](S) \cdot \frac{Da}{\partial x}\,. \tag{33}$$

Таким образом, уравнение динамики второго момента фундаментального объекта определяется перестановочными соотношениями соответствующих дифференциальных операторов. Указанные перестановочные соотношения выведены в Главе 6.2, а уравнение динамики второго момента фундаментального объекта в развернутом виде приведено в Главе 6.4.

Представим правую часть уравнения (33) как вариационную производную

$$\frac{\delta w}{\partial x} = -[WP](S) \cdot \frac{Dy}{\partial x} - [WM](S) \cdot \frac{Dl}{\partial x} - [WW](S) \cdot \frac{Da}{\partial x}\,.$$

Тогда уравнение динамики второго момента фундаментального объекта можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\delta w}{\partial x} = 0$$

или в индексной форме

$$\frac{Dw^{KK_2K_1}{}_I}{\partial x^K} = 0\,. \tag{34}$$

Записанное таким образом уравнение динамики второго момента имеет форму закона сохранения. Поэтому будем называть уравнение динамики второго момента, записанное в указанном виде, *законом сохранения второго момета фундаментального объекта.*

2. Уравнения динамики внутренних параметров фундаментального объекта

При выводе уравнений динамики внутренних параметров фундаментального объекта исходим из скалярного действия в виде выражения (19)

$${}_r\mathscr{S} = -\int \left(Q^K{}_I \frac{DY^I(x)}{\partial x^K} + I^{KK_1}{}_I \frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \right.$$
$$\left. + J^{KK_2K_1}{}_I \frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\right) d\Omega\,.$$

Для простоты будем использовать это соотношение в безиндексной форме

$${}_r\mathscr{S} = -\int \left(Q \cdot \frac{DY}{\partial x} + I \cdot \frac{DL}{\partial x} + J \cdot \frac{DA}{\partial x}\right) d\Omega\,. \tag{35}$$

Здесь[5]

$$Q = -Q(S)\,, \quad I = -I(S)\,, \quad J = -J(S)\,. \tag{36}$$

2.1. Уравнения динамики заряда фундаментального объекта

Уравнения динамики заряда установим из вариационного принципа, согласно которому вариация действия фундаментального объекта при вариации правой кинематической переменной Y равна нулю, то есть исходным является уравнение

$$\delta_Y({}_r\mathscr{S}) = 0\,. \tag{37}$$

При этом нужно учесть, что вариация касается только внутренних динамических параметров фундаментального объекта. Таким образом,

$$\delta_Y({}_r\mathscr{S}) = -\int \left(\delta_Y Q \cdot \frac{DY}{\partial x} + \delta_Y I \cdot \frac{DL}{\partial x} + \delta_Y J \cdot \frac{DA}{\partial x}\right) d\Omega\,.$$

Учитывая выражение (33) и

$$\delta_Y(\ ) = Q(\ ) \cdot \delta Y\,,$$

[5] В этих выражениях через S обозначен вектор S^K.

получим

$$\delta_Y({}_r\mathscr{S}) = \int \left(QQ(S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + QI(S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + QJ(S) \cdot \frac{DA}{\partial x} \right) \delta Y \cdot d\Omega \,.$$

Далее поменяем местами операторы дифференцирования в соответствии с

$$QQ = QQ + [QQ]\,, \quad QI = IQ + [QI]\,,$$
$$QJ = JQ + [QJ]$$

и учтем, что

$$QQ(S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + IQ(S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + JQ(S) \cdot \frac{DA}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \,.$$

Получим

$$\delta_Y({}_r\mathscr{S}) = \int \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} + [QQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + [QI](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + [QI](S) \cdot \frac{DA}{\partial x} \right) \delta Y \cdot d\Omega \,. \tag{38}$$

Исходя из вариационного принципа (37), получим уравнение динамики заряда фундаментального объекта

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = [QQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + [QI](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + [QJ](S) \cdot \frac{DA}{\partial x} \,. \tag{39}$$

Таким образом, уравнение динамики заряда фундаментального объекта определяется перестановочными соотношениями соответствующих дифференциальных операторов. Указанные перестановочные соотношения выведены в Главе 6.2, а уравнение динамики заряда фундаментального объекта в развернутом виде приведено в Главе 6.4.

Представим правую часть уравнения (39) как вариационную производную

$$\frac{\delta Q}{\partial x} = -[QQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} - [QI](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} - [QJ](S) \cdot \frac{DA}{\partial x} \,.$$

Тогда уравнение динамики заряда фундаментального объекта можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\delta Q}{\partial x} = 0$$

или в индексной форме

$$\frac{DQ^K{}_I}{\partial x^K} = 0 \,. \tag{40}$$

Записанное таким образом уравнение динамики заряда имеет форму закона сохранения. Поэтому будем называть уравнение динамики заряда, записанное в указанном виде, *законом сохранения заряда фундаментального объекта.*

2.2. Уравнения динамики тока фундаментального объекта

Уравнения динамики тока установим из вариационного принципа, согласно которому вариация действия фундаментального объекта при вариации кинематической переменной L равна нулю, то есть, исходным является уравнение

$$\delta_L({}_r\mathscr{S}) = 0 \,. \tag{41}$$

При этом нужно учесть, что вариация касается только динамических параметров фундаментального объекта. Таким образом,

$$\delta_L({}_r\mathscr{S}) = -\int \left(\delta_L Q \cdot \frac{DY}{\partial x} + \delta_L I \cdot \frac{DL}{\partial x} + \delta_L J \cdot \frac{DA}{\partial x} \right) d\Omega \,.$$

Учитывая выражение (36) и

$$\delta_L(\ ) = I(\ ) \cdot \delta L \,,$$

получим

$$\delta_L({}_r\mathscr{S}) = \int \left(IQ(S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + II(S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + IJ(S) \cdot \frac{DA}{\partial x} \right) \delta L \cdot d\Omega \,.$$

Далее поменяем местами операторы дифференцирования в соответствии с

$$IQ = QI + [IQ]\,, \quad II = II + [II]\,,$$
$$IJ = JI + [IJ]$$

и учтем, что

$$QI(S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + II(S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + JI(S) \cdot \frac{DA}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial x} \,.$$

Получим

$$\delta_L({}_r\mathscr{S}) = \int \left(-\frac{\partial I}{\partial x} + [IQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + [II](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + [IJ](S) \cdot \frac{DA}{\partial x} \right) \delta L \cdot d\Omega \,. \tag{42}$$

Исходя из вариационного принципа (41), получим уравнение динамики тока фундаментального объекта

$$\frac{\partial I}{\partial x} = [IQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + [II](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + [IJ](S) \cdot \frac{DA}{\partial x} \,. \tag{43}$$

Таким образом, уравнение динамики тока фундаментального объекта определяется перестановочными соотношениями соответствующих дифференциальных операторов. Указанные перестановочные соотношения выведены в Главе 6.2, а уравнение динамики тока фундаментального объекта в развернутом виде приведено в Главе 6.4.

Представим правую часть уравнения (43) как вариационную производную

$$\frac{\delta I}{\partial x} = -[IQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} - [II](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} - [IJ](S) \cdot \frac{DA}{\partial x}\,.$$

Тогда уравнение динамики тока фундаментального объекта можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\delta I}{\partial x} = 0$$

или в индексной форме

$$\frac{DI^{KK_1}{}_I}{\partial x^K} = 0\,. \tag{44}$$

Записанное таким образом уравнение динамики тока имеет форму закона сохранения. Поэтому будем называть уравнение динамики тока, записанное в указанном виде, *законом сохранения тока фундаментального объекта.*

2.3. *Уравнения динамики второго тока фундаментального объекта*

Уравнения динамики второго тока установим из вариационного принципа, согласно которому вариация действия фундаментального объекта при вариации кинематической переменной A равна нулю, то есть исходным является уравнение

$$\delta_A({}_r\mathscr{S}) = 0\,. \tag{45}$$

При этом нужно учесть, что вариация касается только динамических параметров фундаментального объекта. Таким образом,

$$\delta_A({}_r\mathscr{S}) = -\int \left(\delta_A Q \frac{DY}{\partial x} + \delta_A I \frac{DL}{\partial x} + \delta_A J \frac{DA}{\partial x}\right) d\Omega\,.$$

Учитывая выражение (36) и

$$\delta_A(\ ) = J(\ ) \cdot \delta A\,,$$

получим

$$\delta_A({}_r\mathscr{S}) = \int \left(JQ(S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + JI(S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + JJ(S) \cdot \frac{DA}{\partial x}\right) \delta A \cdot d\Omega\,.$$

Далее поменяем местами операторы дифференцирования в соответствии с

$$JQ = QJ + [JQ]\,, \quad JI = IJ + [JI]\,,$$
$$JJ = JJ + [JJ]$$

и учтем, что

$$QJ(S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + IJ(S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + JJ(S) \cdot \frac{DA}{\partial x} = -\frac{\partial J}{\partial x}\,.$$

Получим

$$\delta_A({}_r\mathscr{S}) = \int \left(-\frac{\partial J}{\partial x} + [JQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + [JI](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + [JJ](S) \cdot \frac{DA}{\partial x}\right) \delta A \cdot d\Omega\,. \tag{46}$$

Исходя из вариационного принципа (45), получим уравнение динамики второго тока фундаментального объекта

$$\frac{\partial J}{\partial x} = [JQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} + [JI](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} + [JJ](S) \cdot \frac{DA}{\partial x}\,. \tag{47}$$

Таким образом, уравнение динамики второго тока фундаментального объекта определяется перестановочными соотношениями соответствующих дифференциальных операторов. Указанные перестановочные соотношения выведены в Главе 6.2, а уравнение динамики второго тока фундаментального объекта в развернутом виде приведено в Главе 6.4.

Представим правую часть уравнения (47) как вариационную производную

$$\frac{\delta J}{\partial x} = -[JQ](S) \cdot \frac{DY}{\partial x} - [JI](S) \cdot \frac{DL}{\partial x} - [JJ](S) \cdot \frac{DA}{\partial x}\,.$$

Тогда уравнение динамики второго тока фундаментального объекта можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\delta J}{\partial x} = 0$$

или в индексной форме

$$\frac{DJ^{KK_2K_1}{}_I}{\partial x^K} = 0\,. \tag{48}$$

Записанное таким образом уравнение динамики второго момента имеет форму закона сохранения. Поэтому будем называть уравнение динамики второго момента, записанное в указанном виде, *законом сохранения второго момета фундаментального объекта.*

V. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ КАК ИСТОЧНИК ПОЛЯ

1. Фундаментальный объект как источник поля внешней симметрии

Чтобы рассмотреть фундаментальный объект как источник поля, будем придерживаться следующих представлений и терминологии.

Поле создается источником. Источник 1 создает поле 1. Источник 2 создает поле 2. Источник 1 взаимодействует с полем 2, создаваемым источником 2. Источник 2 взаимодействует с полем 1, создаваемым источником 1. Поле 2 взаимодействует как с *источником 1, так и с полем 1, создаваемым источником 1.*

Привлечем указанные представления при рассмотрении скалярного действия (9):

$$ {}_l\mathscr{S} = \int \left(\frac{\partial S^K}{Dy^I} \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K} + \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1}} \frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \right. $$
$$ \left. + \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1K_2}} \frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K} \right) \cdot d\Omega \, . $$

В этом выражении внешние динамические параметры фундаментального объекта

$$ p^K{}_I = -\frac{\partial S^K}{Dy^I} \, , \; m^{KK_1}{}_I = -\frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1}} \, , $$
$$ w^{KK_2K_1}{}_I = -\frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1K_2}} $$

будем рассматривать как параметры источника поля внешней симметрии. Для того чтобы эти параметры отличать друг от друга, можно ввести, например, следующую терминологию. В последовательности слева направо – это параметры источника первого, второго и третьего уровней.

В этом же выражении величины

$$ \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K} \, , \quad \frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K} \, , \quad \frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K} $$

или

$$ l^I_K \, , \quad l^I_{K_1K} \, , \quad l^I_{K_1K_2K} \tag{49} $$

рассматриваются соответственно как первые, вторые и третьи переменные поля внешней симметрии. Например, в теории гравитации первые переменные поля – это метрический тензор, вторые переменные поля – это коэффициенты связности, а третьи переменные поля – это тензор кривизны.

Далее будем полагать, что подинтегральное выражение в соотношении (9) (функция Лагранжа) описывает *взаимодействие* источника 1, которым является рассматриваемый фундаментальный объект 1, с полем 2. Источником поля 2 служит *другой* фундаментальный объект 2, который явно не участвует в формировании скалярного действия.

С этой точки зрения скалярное действие следует записать так:

$$ {}_l\mathscr{S} = \int \left(\frac{\partial S^K}{Dy^I}(1) \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K}(2) + \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1}}(1) \frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K}(2) + \right. $$
$$ \left. + \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1K_2}}(1) \frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}(2) \right) d\Omega \, . \tag{50} $$

Далее учтем, что поле 2 взаимодействует как с фундаментальным объектом 1, так и с полем 1, создаваемым этим фундаментальным объектом. Поэтому параметры 1, взаимодействующие с полем 2, должны содержать два слагаемых, одно из которых – это параметр фундаментального объекта 1, а другое – это переменная поля 1. На этом основании в выражении для скалярного действия следует сделать замену:

для параметров первого уровня, взаимодействующих с полем 2,

$$ \frac{\partial S^K}{Dy^I}(1) \to \frac{\partial S^K}{Dy^I}(1) - C_1 \cdot l^K{}_I(1) \, , \tag{51} $$

для параметров второго уровня, взаимодействующих с полем 2,

$$ \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1}}(1) \to \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1}}(1) - C_2 \cdot l^{KK_1}{}_I(1) \, , \tag{52} $$

для параметров третьего уровня, взаимодействующих с полем 2,

$$ \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1K_2}}(1) \to \frac{\partial S^K}{Dl^I{}_{K_1K_2}}(1) - C_3 \cdot l^{KK_2K_1}{}_I(1) \, . \tag{53} $$

Переменные поля внешней симметрии

$$ l^K{}_I \, , \quad l^{KK_1}{}_I \, , \quad l^{KK_2K_1}{}_I $$

– это коэффициенты разложения правой универсальной ковариантной алгебры ${}_r\mathbb{X}^{*'}$ искривленного пространства-времени в ряд Тейлора по координатам ковариантной системы отсчета:

$$ y_I(x_K + dx_K) = y_I(x_K) + dx_K \cdot l^K{}_I + $$
$$ + d_2x_{K_2} \cdot d_1x_{K_1} \cdot l^{K_2K_1}{}_I + \ldots \, . $$

Они являются величинми, сопряженными по отношению к переменным поля внешней симметрии (49). В частности, например, [6]

$$ l^K{}_I = (g_{II_1} \cdot l^{I_1}{}_{K_1} \cdot g^{K_1K})^t \, . $$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 характеризуют взаимодействие поля 1 и поля 2.

Таким образом, скалярное действие для фундаментального объекта 1 и поля 1, взаимодействующих с полем 2, нужно записать так[7]:

$$ {}_l\mathscr{S} = -\int \left(\left(p^K{}_I(1) + C_1 \cdot l^K{}_I(1)\right) \frac{Dy^I(x)}{\partial x^K}(2) + \right. $$
$$ + \left(m^{KK_1}{}_I(1) + C_2 \cdot l^{KK_1}{}_I(1)\right) \frac{Dl^I{}_{K_1}}{\partial x^K}(2) + $$
$$ \left. + \left(w^{KK_2K_1}{}_I(1) + C_3 \cdot l^{KK_2K_1}{}_I(1)\right) \frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}(2) \right) d\Omega \, . \tag{54} $$

---

[6] Здесь символом t обозначена операция транспонирования.

[7] Заметим, что рассматриваемое скалярное действие не содержит слагаемые, ответственные за взаимодействие фундаментального объекта 1 с собственным полем 1.

Приравнивание нулю вариации действия ${}_l\mathscr{S}$ (54) при варьировании первых переменных поля $l^I{}_{K_1}(2)$ дает первое уравнение поля внешней симметрии. Источником этого поля является импульс фундаментального объекта. Приравнивание нулю вариации действия ${}_l\mathscr{S}$ (54) при варьировании вторых переменных поля $l^I{}_{K_1K_2}(2)$ дает второе уравнение поля внешней симметрии. Источником этого поля является момент фундаментального объекта. Вот то направление, в котором необходимо исследовать введенное скалярное действие (54).

При выводе уравнений поля внешней симметрии необходимо учитывать, что на импульс $p^K{}_I$, момент $m^{KK_1}{}_I$ и второй момент $w^{KK_2K_1}{}_I$ наложены условия (40), (44), (48), которые названы законами сохранения:

закон сохранения импульса

$$\frac{Dp^K{}_I}{\partial x^K} = 0\,, \tag{55}$$

закон сохранения момента

$$\frac{Dm^{KK_1}{}_I}{\partial x^K} = 0\,, \tag{56}$$

закон сохранения второго момента

$$\frac{Dw^{KK_2K_1}{}_I}{\partial x^K} = 0\,. \tag{57}$$

2. Фундаментальный объект как источник поля внутренней симметрии

Привлечем указанные представления при рассмотрении скалярного действия для фундаментального объекта в поле внутренней симметрии (17):

$$\begin{aligned}{}_r\mathscr{S} = \int \Bigg(&\frac{\partial S^K}{DY^I}\frac{DY^I(x)}{\partial x^K} + \frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1}}\frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K} + \\ &+ \frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1K_2}}\frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}\Bigg)\cdot d\Omega\,.\end{aligned}$$

В этом выражении внутренние динамические параметры фундаментального объекта

$$Q^K{}_I = -\frac{\partial S^K}{DY^I}\,, \quad I^{KK_1}{}_I = -\frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1}}\,,$$
$$J^{KK_2K_1}{}_I = -\frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1K_2}}$$

будем рассматривать как параметры источника поля внутренней симметрии. Для того чтобы эти параметры отличать друг от друга, можно ввести, например, следующую терминологию. В последовательности слева направо – это параметры источника поля внутренней симметрии первого, второго и третьего уровней.

В этом же выражении величины

$$\frac{DY^I(x)}{\partial x^K}\,, \quad \frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K}\,, \quad \frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}$$

или

$$L^I_K\,, \quad L^I_{K_1K}\,, \quad L^I_{K_1K_2K} \tag{58}$$

рассматриваются соответственно как первые, вторые и третьи переменные поля внутренней симметрии. Например, в теории электромагнетизма первые переменные поля – это фаза, вторые переменные поля – это потенциал, а третьи переменные поля – это тензор электромагнитного поля.

Как и в предыдущем Разделе будем полагать, что подинтегральное выражение в (17) (правая функция Лагранжа) описывает *взаимодействие* источника 1, которым является рассматриваемый фундаментальный объект 1, с полем 2. Источником поля 2 служит *другой* фундаментальный объект 2, который явно не участвует в формировании скалярного действия.

С этой точки зрения скалярное действие следует записать так:

$$\begin{aligned}{}_r\mathscr{S} = \int \Bigg(&\frac{\partial S^K}{DY^I}(1)\frac{DY^I(x)}{\partial x^K}(2) + \frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1}}(1)\frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K}(2) + \\ &+ \frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1K_2}}(1)\frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}(2)\Bigg) d\Omega\,.\end{aligned} \tag{59}$$

Далее учтем, что поле 2 взаимодействует как с фундаментальным объектом 1, так и с полем 1, создаваемым этим фундаментальным объектом. Поэтому параметры 1, взаимодействующие с полем 2, должны содержать два слагаемых, одно из которых – это параметр фундаментального объекта 1, а другое – это переменная поля 1. На этом основании в выражении для скалярного действия следует сделать замену:

для параметров первого уровня, взаимодействующих с полем 2,

$$\frac{\partial S^K}{DY^I}(1) \to \frac{\partial S^K}{DY^I}(1) - K_1\cdot L^K{}_I(1)\,, \tag{60}$$

для параметров второго уровня, взаимодействующих с полем 2,

$$\frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1}}(1) \to \frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1}}(1) - K_2\cdot L^{KK_1}{}_I(1)\,, \tag{61}$$

для параметров третьего уровня, взаимодействующих с полем 2,

$$\frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1K_2}}(1) \to \frac{\partial S^K}{DL^I{}_{K_1K_2}}(1) - K_3\cdot L^{KK_2K_1}{}_I(1)\,. \tag{62}$$

Переменные поля внутренней симметрии

$$L^K{}_I\,, \quad L^{KK_1}{}_I\,, \quad L^{KK_2K_1}{}_I$$

– это коэффициенты разложения левой универсальной ковариантной алгебры ${}_{l}\mathbb{X}^{*'}$ искривленного пространства-времени в ряд Тейлора по координатам ковариантной системы отсчета:

$$Y_I(x_K + dx_K) = Y_I(x_K) + dx_K \cdot L^K{}_I + \\ + d_2x_{K_2} \cdot d_1x_{K_1} \cdot L^{K_2K_1}{}_I + \ldots .$$

Они являются величинми, сопряженными по отношению к переменным поля внутренней симметрии (58). В частности, например, [8]

$$L^K{}_I = (g_{II_1} \cdot L^{I_1}{}_{K_1} \cdot g^{K_1K})^t .$$

Коэффициенты K_1, K_2, K_3 характеризуют взаимодействие поля 1 и поля 2.

Таким образом, скалярное действие для фундаментального объекта 1 и поля 1, взаимодействующих с полем 2, нужно записать так[9]:

$${}_r\mathscr{S} = -\int \Bigg(\left(Q^K{}_I(1) + K_1 \cdot L^K{}_I(1)\right) \frac{DY^I(x)}{\partial x^K}(2) + \\ + \left(I^{KK_1}{}_I(1) + K_2 \cdot L^{KK_1}{}_I(1)\right) \frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K}(2) + \\ + \left(J^{KK_2K_1}{}_I(1) + K_3 \cdot L^{KK_2K_1}{}_I(1)\right) \frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}(2) \Bigg) d\Omega . \tag{63}$$

Приравнивание нулю вариации действия ${}_r\mathscr{S}$ (63) при варьировании первых переменных поля $L^I{}_{K_1}(2)$ дает первое уравнение поля внутренней симметрии. Источником этого поля является заряд фундаментального объекта. Приравнивание нулю вариации действия ${}_r\mathscr{S}$ (63) при варьировании вторых переменных поля $L^I{}_{K_1K_2}(2)$ дает второе уравнение поля внутренней симметрии. Источником этого поля является ток фундаментального объекта. Вот то направление, в котором необходимо исследовать введенное скалярное действие (63).

При выводе уравнений поля внутренней симметрии необходимо учитывать, что на заряд $Q^K{}_I$, ток $I^{KK_1}{}_I$ и второй ток $J^{KK_2K_1}{}_I$ наложены условия (40), (44), (48), которые названы законами сохранения:

закон сохранения заряда

$$\frac{DQ^K{}_I}{\partial x^K} = 0 , \tag{64}$$

закон сохранения тока

$$\frac{DI^{KK_1}{}_I}{\partial x^K} = 0 , \tag{65}$$

закон сохранения второго тока

$$\frac{DJ^{KK_2K_1}{}_I}{\partial x^K} = 0 . \tag{66}$$

[8] Здесь символом t обозначена операция транспонирования.

[9] Заметим, что рассматриваемое скалярное действие не содержит слагаемые, ответственные за взаимодействие фундаментального объекта 1 с собственным полем 1.

VI. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ

1. Первое уравнение поля внутренней симметрии

Теперь обратимся к выводу первого уравнения поля внутренней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом и полем, на основании принципа наименьшего действия. Для этого скалярное действие (63) перепишем следующим образом:

$${}_r\mathscr{S} = -\int \Bigg(\left(Q^{K_1}{}_I(1) + K_1 \cdot L^{K_1}{}_I(1)\right) \cdot L^I{}_{K_1}(2) + \\ + \left(I^{KK_1}{}_I(1) + K_2 \cdot L^{KK_1}{}_I(1)\right) \frac{DL^I{}_{K_1}}{\partial x^K}(2) + \\ + \left(J^{KK_2K_1}{}_I(1) + K_3 \cdot L^{KK_2K_1}{}_I(1)\right) \frac{DL^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}(2) \Bigg) d\Omega \tag{67}$$

и рассмотрим его вариацию при вариации переменных поля $L^I{}_{K_1}(2)$. Для вариации правой функции Лагранжа ${}_r\mathscr{L}$ с обратным знаком имеем

$$-\delta_1({}_r\mathscr{L}) = \left(Q^{K_1}{}_I(1) + K_1 \cdot L^{K_1}{}_I(1)\right) \cdot \delta L^I{}_{K_1}(2) + \\ + \left(I^{KK_1}{}_I(1) + K_2 \cdot L^{KK_1}{}_I(1)\right) \frac{D}{\partial x^K} \delta L^I{}_{K_1}(2) .$$

Второе слагаемое запишем так:

$$\frac{D}{\partial x^K} \left(\left(I^{KK_1}{}_I(1) + K_2 \cdot L^{KK_1}{}_I(1)\right) \cdot \delta L^I{}_{K_1}(2) \right) - \\ - \frac{D}{\partial x^K} \left(I^{KK_1}{}_I(1) + K_2 \cdot L^{KK_1}{}_I(1)\right) \cdot \delta L^I{}_{K_1}(2) .$$

Используя теорему Гаусса и вариационный принцип, получим первое уравнение поля внутренней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом,

$$\frac{D}{\partial x^K} \left(I^{KK_1}{}_I + K_2 \cdot L^{KK_1}{}_I\right) = Q^{K_1}{}_I + K_1 \cdot L^{K_1}{}_I .$$

Все величины, входящие в это уравнение, относятся к полю 1, поэтому соответствующее указание опущено. Учитывая закон сохранения тока (65), получим

$$\frac{D}{\partial x^K} \left(L^{KK_1}{}_I\right) = \frac{1}{K_2} (Q^{K_1}{}_I + K_1 \cdot L^{K_1}{}_I) . \tag{68}$$

Преобразуем это уравнение, умножив его на $L^I{}_{K_2}$:

$$\frac{D}{\partial x^K} \left(L^{KK_1}{}_I\right) L^I{}_{K_2} = \frac{1}{K_2} (Q^{K_1}{}_{K_2} + K_1 \cdot L^{K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_2}) . \tag{69}$$

Здесь введено обозначение

$$Q^{K_1}{}_{K_2} = Q^{K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_2} .$$

Преобразуем левую часть уравнения (69) следующим образом:

$$\frac{D}{\partial x^K}\left(L^{KK_1}{}_I\right)L^I{}_{K_2} = \\ \frac{D}{\partial x^K}\left(L^{KK_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_2}\right) - L^{KK_1}{}_I \frac{D}{\partial x^K}\left(L^I{}_{K_2}\right) .$$

Первое слагаемое в правой части – это искривленная производная от величины, принадлежащей системе отсчета. Поэтому искривленную производную нужно заменить на частную производную в системе отсчета, то есть это слагаемое должно быть записано так:

$$\frac{\partial}{\partial x^K}\left(L^{KK_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_2}\right) .$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части, при этом учтем, что

$$L^I{}_{K_3} \cdot \tilde{L}^{K_3}{}_{I_1} = \delta^I{}_{I_1} .$$

В результате второе слагаемое принимает вид

$$L^{KK_1}{}_I L^I{}_{K_3} \cdot \tilde{L}^{K_3}{}_{I_1} \frac{D}{\partial x^K}\left(L^{I_1}{}_{K_2}\right) = \\ \left(L^{KK_1}{}_I L^I{}_{K_3}\right) \cdot \left(\tilde{L}^{K_3}{}_{I_1} \cdot L^{I_1}{}_{K_2 K}\right) = .$$

Далее учтем, что

$$L^{KK_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_2} = A^{KK_1}{}_{K_2}$$

– это ковариантный потенциал поля внутренней симметрии, а

$$\tilde{L}^{K_3}{}_{I_1} \cdot L^{I_1}{}_{K_2 K} = A^{K_3}{}_{K_2 K}$$

– это контравариантный потенциал поля внутренней симметрии.

По отношению к потенциалам первое уравнение поля внутренней симметрии (69) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x^K} A^{KK_1}{}_{K_2} - A^{KK_1}{}_{K_3} \cdot A^{K_3}{}_{K_2 K} = \\ = \frac{1}{K_2}\left(Q^{K_1}{}_{K_2} + K_1 \cdot L^{K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_2}\right) . \qquad (70)$$

Записанное уравнение соответствует группе и алгебре внутренней симметрии самого общего вида. Его можно переписать, если речь идет о подгруппе и подалгебре. При этом нужно перейти от потенциалов общего вида к потенциалам частного поля и от тензора заряда к заряду частного вида. Для контравариантных потенциалов этот переход выполняется в соответствии с соотношением

$$A^{K_3}{}_{K_2 K} = {}_rC^{K_3}{}_{K_2\alpha} \cdot A^\alpha{}_K . \qquad (71)$$

Здесь $A^\alpha{}_K$ – контравариантные потенциалы частного поля внутренней симметрии, ${}_rC^{K_3}{}_{K_2\alpha}$ – матрицы представления базисных векторов в контравариантной подалгебре внутренней симметрии, индекс α нумерует параметры подалгебры.

Для ковариантных потенциалов этот переход выполняется в соответствии с соотношением

$$A^{KK_1}{}_{K_2} = A^K{}_\alpha \cdot {}_rC^{\alpha K_1}{}_{K_2} . \qquad (72)$$

Здесь $A^K{}_\alpha$ – ковариантные потенциалы частного поля внутренней симметрии, ${}_rC^{\alpha K_1}{}_{K_2}$ – матрицы представления базисных векторов в ковариантной подалгебре внутренней симметрии, индекс α нумерует параметры подалгебры. Матрицы представления удовлетворяют закону умножения

$${}_rC^{K_1}{}_{K_3\alpha} \cdot {}_rC^{K_3}{}_{K_2\beta} = {}_rC^{K_1}{}_{K_2\gamma} \cdot {}_rC^\gamma{}_{\alpha\beta} , \qquad (73)$$

а также

$${}_rC^{\beta K_1}{}_{K_3} \cdot {}_rC^{K_3}{}_{K_2\gamma} = {}_rC^{\alpha K_1}{}_{K_2} \cdot {}_rC^\beta{}_{\gamma\alpha} , \qquad (74)$$

где ${}_rC^\beta{}_{\gamma\alpha}$ – структурные постоянные контравариантной подалгебры внутренней симметрии. В частном случае выражение (74) дает

$$\delta^{K_1}{}_{K_2} = {}_rC^{\beta K_1}{}_{K_3} \cdot {}_rC^{K_3}{}_{K_2\beta} = {}_rC^{\alpha K_1}{}_{K_2} \cdot {}_rC^\beta{}_{\beta\alpha} . \qquad (75)$$

Переход от тензора заряда к заряду частного вида выполняется в соответствии с соотношением

$$Q^{K_1}{}_{K_2} = Q_\alpha \cdot {}_rC^{\alpha K_1}{}_{K_2} . \qquad (76)$$

Используя соотношения (71), (72), (74), (75) и (76), из выражения (70) получим первое уравнение поля внутренней симметрии частного вида

$$\frac{\partial}{\partial x^K} A^K{}_\alpha - {}_rC^\beta{}_{\gamma\alpha} \cdot A^K{}_\beta \cdot A^\gamma{}_K = \frac{1}{K_2}(Q_\alpha + K_1 \cdot L_\alpha) . \qquad (77)$$

Применим это уравнение к электромагнитному полю. Группой электромагнитного взаимодействия является одномерная группа правых поворотов в плоскости 12. Поэтому

$$\alpha = 12 , \qquad {}_rC^\beta{}_{\gamma\alpha} = 0 ,$$

и первое уравнение электромагнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^K} A^K{}_{12} = \frac{1}{K_2} Q_{12} .$$

Его нужно рассматривать как обобщение калибровки Лоренца

$$A^k{}_{,k} = 0 .$$

2. Второе уравнение поля внутренней симметрии

Теперь обратимся к выводу второго уравнения поля внутренней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом, на основании принципа наименьшего действия. Для этого скалярное действие (63) перепишем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
{}_r\mathscr{S} = -\int \Big(& \big(Q^{K_1}{}_I(1) + K_1 \cdot L^{K_1}{}_I(1)\big) \cdot L^I{}_{K_1}(2) + \\
& + \big(I^{K_2K_1}{}_I(1) + K_2 \cdot L^{K_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot L^I{}_{K_1K_2}(2) + \\
& + \big(J^{KK_2K_1}{}_I(1) + K_3 \cdot L^{KK_2K_1}{}_I(1)\big) \times \\
& \times \frac{D}{\partial x^K} L^I{}_{K_1K_2}(2) \Big) \, d\Omega \,.
\end{aligned} \tag{78}
$$

и рассмотрим его вариацию при вариации переменных поля $L^I{}_{K_1K_2}(2)$. Для вариации правой функции Лагранжа ${}_r\mathscr{L}$ с обратным знаком имеем

$$
\begin{aligned}
-\delta_2({}_r\mathscr{L}) = & \big(I^{K_2K_1}{}_I(1) + K_2 \cdot L^{K_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot \delta L^I{}_{K_1K_2}(2) + \\
& + \big(J^{KK_2K_1}{}_I(1) + K_3 \cdot L^{KK_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot \frac{D}{\partial x^K} \delta L^I{}_{K_1K_2}(2) \,.
\end{aligned}
$$

Второе слагаемое запишем так:

$$
\begin{aligned}
& \frac{D}{\partial x^K}\Big(\big(J^{KK_2K_1}{}_I(1) + K_3 \cdot L^{KK_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot \delta L^I{}_{K_1K_2}(2)\Big) - \\
& - \frac{D}{\partial x^K}\big(J^{KK_2K_1}{}_I(1) + K_3 \cdot L^{KK_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot \delta L^I{}_{K_1K_2}(2) \,.
\end{aligned}
$$

Используя теорему Гаусса и вариационный принцип, получим второе уравнение поля внутренней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом:

$$
\begin{aligned}
& \frac{D}{\partial x^K}\big(J^{KK_2K_1}{}_I + K_3 \cdot L^{KK_2K_1}{}_I\big) = \\
& = I^{K_2K_1}{}_I + K_2 \cdot L^{K_2K_1}{}_I \,.
\end{aligned}
$$

Все величины, входящие в это уравнение, относятся к полю 1, поэтому соответствующее указание опущено. Учитывая закон сохранения второго тока (66), получим

$$
\frac{D}{\partial x^K}\big(L^{KK_2K_1}{}_I\big) = \frac{1}{K_3}\big(I^{K_2K_1}{}_I + K_2 \cdot L^{K_2K_1}{}_I\big) \,. \tag{79}
$$

Преобразуем это уравнение, умножив его на $L^I{}_{K_3}$:

$$
\begin{aligned}
& \frac{D}{\partial x^K}\big(L^{KK_2K_1}{}_I\big) \cdot L^I{}_{K_3} = \\
& = \frac{1}{K_3}\left(I^{K_2K_1}{}_{K_3} + K_2 \cdot L^{K_2K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_3}\right) \,.
\end{aligned} \tag{80}
$$

Здесь введено обозначение

$$
I^{K_2K_1}{}_{K_3} = I^{K_2K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_3} \,.
$$

Преобразуем левую часть уравнения (80) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
& \frac{D}{\partial x^K}\big(L^{KK_2K_1}{}_I\big) \cdot L^I{}_{K_3} = \\
& \frac{D}{\partial x^K}\big(L^{KK_2K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_3}\big) - L^{KK_2K_1}{}_I \frac{D}{\partial x^K}\left(L^I{}_{K_3}\right) \,.
\end{aligned}
$$

Первое слагаемое в правой части – это искривленная производная от величины, принадлежащей системе отсчета. Поэтому искривленную производную нужно заменить на частную производную в системе отсчета, то есть это слагаемое должно быть записано так:

$$
\frac{\partial}{\partial x^K}\left(L^{KK_2K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_3}\right) \,.
$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части; при этом учтем, что

$$
L^I{}_{K_4} \cdot \tilde{L}^{K_4}{}_{I_1} = \delta^I{}_{I_1} \,.
$$

В результате второе слагаемое принимает вид

$$
\begin{aligned}
& L^{KK_2K_1}{}_I \cdot \left(L^I{}_{K_4} \cdot \tilde{L}^{K_4}{}_{I_1}\right) \frac{D}{\partial x^K}\left(L^{I_1}{}_{K_3}\right) = \\
& \left(L^{KK_2K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_4}\right) \cdot \left(\tilde{L}^{K_4}{}_{I_1} \cdot L^{I_1}{}_{K_3K}\right) \,.
\end{aligned}
$$

Далее учтем, что

$$
L^{KK_2K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_3} = F^{KK_2K_1}{}_{K_3}
$$

– это ковариантный объект поля внутренней симметрии[10],

$$
\tilde{L}^{K_4}{}_{I_1} \cdot L^{I_1}{}_{K_3K} = A^{K_4}{}_{K_3K}
$$

– это контравариантный потенциал поля внутренней симметрии, а

$$
L^{K_2K_1}{}_I \cdot L^I{}_{K_3} = A^{K_2K_1}{}_{K_3}
$$

– это ковариантный потенциал поля внутренней симметрии.

По отношению к объекту поля второе уравнение поля внутренней симметрии (79) приобретает вид

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^K} F^{KK_2K_1}{}_{K_3} - F^{KK_2K_1}{}_{K_4} \cdot A^{K_4}{}_{K_3K} = \\
& = \frac{1}{K_3}\left(I^{K_2K_1}{}_{K_3} + K_2 \cdot A^{K_2K_1}{}_{K_3}\right) \,.
\end{aligned} \tag{81}
$$

Записанное уравнение соответствует группе и алгебре внутренней симметрии самого общего вида. Его можно переписать, если речь идет о подгруппе и подалгебре. При этом нужно перейти от объекта поля и потенциалов общего вида к объекту поля и потенциалам частного вида, а также от тока общего вида к частному току. Для объекта поля этот переход выполняется в соответствии с соотношением

$$
F^{KK_2K_1}{}_{K_3} = F^{KK_2}{}_{\alpha} \cdot {}_rC^{\alpha K_1}{}_{K_2} \,. \tag{82}
$$

---

[10] В случае, если $F^{KK_2K_1}{}_{K_3}$ антисимметричен по индексам KK_2, величина $F^{[KK_2]K_1}{}_{K_3}$ называется тензором поля внутренней симметрии.

Для контравариантных потенциалов этот переход выполняется в соответствии с соотношением (71). Для ковариантных потенциалов этот переход выполняется в соответствии с соотношением (72). Переход от тока общего вида к частному току выполняется в соответствии с соотношением

$$I^{K_2K_1}{}_{K_3} = I^{K_2}{}_{\alpha} \cdot {}_{r}C^{\alpha K_1}{}_{K_3}\,. \tag{83}$$

Используя соотношения (71), (72), (82), (83), из выражения (81) получим второе уравнение частного поля внутренней симметрии

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial x^K}F^{KK_2}{}_{\alpha} - {}_{r}C^{\beta}{}_{\gamma\alpha}\cdot F^{KK_2}{}_{\beta}\cdot A^{\gamma}{}_{K} = \\ \tfrac{1}{K_3}(I^{K_2}{}_{\alpha} + K_2\cdot A^{K_2}{}_{\alpha})\,.\end{gathered} \tag{84}$$

В случае $K_2 = 0$ и $F^{KK_2}{}_{\alpha} = F^{[KK_2]}{}_{\alpha}$ это уравнение сводится к уравнению Янга-Миллса для безмассового поля, обусловленного группой внутренней симметрии:

$$\frac{\partial}{\partial x^K}F^{[KK_2]}{}_{\alpha} - {}_{r}C^{\beta}{}_{\gamma\alpha}\cdot F^{KK_2}{}_{\beta}\cdot A^{\gamma}{}_{K} = \frac{1}{K_3}I^{K_2}{}_{\alpha}\,. \tag{85}$$

Применим это уравнение к электромагнитному полю. Группой электромагнитного взаимодействия является одномерная группа правых поворотов в плоскости 12. Поэтому

$$\alpha = 12\,, \qquad {}_{r}C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} = 0\,,$$

и второе уравнение электромагнитного поля принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x^K}F^{[KK_2]}{}_{12} = \frac{1}{K_3}I^{K_2}{}_{12}\,.$$

При $K \to k$ и $K_3 = \varepsilon_0\cdot c$ имеем уравнение Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial x^k}F^{[kk_2]} = \frac{1}{\varepsilon_0\cdot c}I^{k_2}\,.$$

Здесь ε_0 – диэлектрическая постоянная, c – скорость света.

VII. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ВНЕШНЕЙ СИММЕТРИИ

1. Первое уравнение поля внешней симметрии

Теперь обратимся к выводу первого уравнения поля внешней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом, на основании принципа наименьшего действия. Для этого скалярное действие (54) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned}{}_{l}\mathscr{S} = -\int \Big(&\big(p^{K_1}{}_{I}(1) + C_1\cdot l^{K_1}{}_{I}(1)\big)\cdot l^{I}{}_{K_1}(2) + \\ &+ \big(m^{KK_1}{}_{I}(1) + C_2\cdot l^{KK_1}{}_{I}(1)\big)\,\frac{Dl^{I}{}_{K_1}}{\partial x^K}(2) + \\ &+ \big(w^{KK_2K_1}{}_{I}(1) + C_3\cdot l^{KK_2K_1}{}_{I}(1)\big)\,\frac{Dl^{I}{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}(2)\Big)\,d\Omega\end{aligned} \tag{86}$$

и рассмотрим его вариацию при вариации переменных поля $l^{I}{}_{K_1}(2)$. Для вариации левой функции Лагранжа ${}_{l}\mathscr{L}$ с обратным знаком имеем

$$\begin{aligned}-\delta_1({}_{l}\mathscr{L}) = &\big(p^{K_1}{}_{I}(1) + C_1\cdot l^{K_1}{}_{I}(1)\big)\cdot\delta l^{I}{}_{K_1}(2) + \\ &+ \big(m^{KK_1}{}_{I}(1) + C_2\cdot l^{KK_1}{}_{I}(1)\big)\cdot\frac{D}{\partial x^K}\delta l^{I}{}_{K_1}(2)\,.\end{aligned}$$

Второе слагаемое запишем так:

$$\begin{aligned}&\frac{D}{\partial x^K}\Big(\big(m^{KK_1}{}_{I}(1) + C_2\cdot l^{KK_1}{}_{I}(1)\big)\cdot\delta l^{I}{}_{K_1}(2)\Big) - \\ &-\frac{D}{\partial x^K}\big(m^{KK_1}{}_{I}(1) + C_2\cdot l^{KK_1}{}_{I}(1)\big)\cdot\delta l^{I}{}_{K_1}(2)\,.\end{aligned}$$

Используя теорему Гаусса и вариационный принцип, получим первое уравнение поля внешней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом:

$$\frac{D}{\partial x^K}\big(m^{KK_1}{}_{I} + C_2\cdot l^{KK_1}{}_{I}\big) = p^{K_1}{}_{I} + C_1\cdot l^{K_1}{}_{I}\,.$$

Все величины, входящие в это уравнение, относятся к полю 1, поэтому соответствующее указание опущено. Учитывая закон сохранения момента (56), получим

$$\frac{D}{\partial x^K}\big(l^{KK_1}{}_{I}\big) = \frac{1}{C_2}(p^{K_1}{}_{I} + C_1\cdot l^{K_1}{}_{I})\,. \tag{87}$$

Преобразуем это уравнение, умножив его на $l^{I}{}_{K_2}$,

$$\frac{D}{\partial x^K}\big(l^{KK_1}{}_{I}\big)\,l^{I}{}_{K_2} = \frac{1}{C_2}(T^{K_1}{}_{K_2} + C_1\cdot l^{K_1}{}_{I}\cdot l^{I}{}_{K_2})\,. \tag{88}$$

Здесь введено обозначение

$$T^{K_1}{}_{K_2} = p^{K_1}{}_{I}\cdot l^{I}{}_{K_2}.$$

Эту величину назовем тензором энергии-импульса фундаментального объекта. Преобразуем левую часть уравнения (88) следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{D}{\partial x^K}\big(l^{KK_1}{}_{I}\big)\,l^{I}{}_{K_2} = \\ &= \frac{D}{\partial x^K}\big(l^{KK_1}{}_{I}\cdot l^{I}{}_{K_2}\big) - l^{KK_1}{}_{I}\frac{D}{\partial x^K}\big(l^{I}{}_{K_2}\big)\,.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части – это искривленная производная от величины, принадлежащей системе отсчета. Поэтому искривленную производную нужно заменить на частную производную в системе отсчета, то есть это слагаемое должно быть записано так:

$$\frac{\partial}{\partial x^K}\big(l^{KK_1}{}_{I}\cdot l^{I}{}_{K_2}\big)\,.$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части, при этом учтем, что

$$l^{I}{}_{K_3}\cdot\tilde{l}^{K_3}{}_{I_1} = \delta^{I}{}_{I_1}\,.$$

В результате второе слагаемое принимает вид

$$l^{KK_1}{}_I \left(l^I{}_{K_3} \cdot \tilde{l}^{K_3}{}_{I_1}\right) \frac{D}{\partial x^K} \left(l^{I_1}{}_{K_2}\right) = \\ = \left(l^{KK_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_3}\right) \cdot \left(\tilde{l}^{K_3}{}_{I_1} \cdot l^{I_1}{}_{K_2K}\right) .$$

Далее учтем, что

$$l^{KK_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_2} = \Gamma^{KK_1}{}_{K_2}$$

– это ковариантные коэффициенты связности поля внешней симметрии, а

$$\tilde{l}^{K_3}{}_{I_1} \cdot l^{I_1}{}_{K_2K} = \Gamma^{K_3}{}_{K_2K}$$

– это контравариантные коэффициенты связности поля внешней симметрии.

По отношению к коэффициентам связности первое уравнение поля внешней симметрии (88) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x^K}\Gamma^{KK_1}{}_{K_2} - \Gamma^{KK_1}{}_{K_3} \cdot \Gamma^{K_3}{}_{K_2K} = \\ = \frac{1}{C_2}(T^{K_1}{}_{K_2} + C_1 \cdot l^{K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_2}) . \qquad (89)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x^K}\Gamma^{KK_1}{}_{K_2} - \Gamma^{KK_1}{}_{K_3} \cdot \Gamma^{K_3}{}_{K_2K} = R^{KK_1}{}_{K_2K}$$

– это свернутый объект кривизны, используя который перепишем первое уравнение:

$$R^{KK_1}{}_{K_2K} = \frac{1}{C_2}(T^{K_1}{}_{K_2} + C_1 \cdot l^{K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_2}) .$$

Проекция этого уравнения на четырехмерное пространство-время ($K \to k$)

$$R^{kk_1}{}_{k_2k} = \frac{1}{C_2}(T^{k_1}{}_{k_2} + C_1 \cdot l^{k_1}{}_I \cdot l^I{}_{k_2}) \qquad (90)$$

по своей структуре совпадает с уравнением Эйнштейна для гравитационного поля.[11] Сравнение выражения (90) с уравнением Эйнштейна позволяет предположить, что

$$\frac{1}{C_2} = \chi \equiv \frac{2G}{C^4}\,, \quad \text{где}$$

$$G = 80 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} \ - \ \text{гравитационная постоянная}\,.$$

Уравнение (89) соответствует группе и алгебре внешней симметрии самого общего вида. Его можно переписать, если речь идет о подгруппе и подалгебре внешней симметрии. При этом нужно перейти от коэффициентов связности общего вида к коэффициентам связности частного поля и от тензора энергии-импульса к энергии-импульсу частного вида. Для контравариантных коэффициентов связности этот переход выполняется в соответствии с соотношением

$$\Gamma^{K_3}{}_{K_2K} = {}_\iota C^{K_3}{}_{K_2\alpha} \cdot \Gamma^\alpha{}_K\,. \qquad (91)$$

Здесь $\Gamma^\alpha{}_K$ – контравариантные коэффициенты связности частного поля внешней симметрии, ${}_\iota C^{K_3}{}_{K_2\alpha}$ – матрицы представления базисных векторов в контравариантной подалгебре внешней симметрии, индекс α нумерует параметры подалгебры.

Для ковариантных коэффициентов связности этот переход выполняется в соответствии с соотношением

$$\Gamma^{KK_1}{}_{K_2} = \Gamma^K{}_\alpha \cdot {}_\iota C^{\alpha K_1}{}_{K_2}\,. \qquad (92)$$

Здесь $\Gamma^K{}_\alpha$ – ковариантные коэффициенты связности частного поля внешней симметрии, ${}_\iota C^{\alpha K_1}{}_{K_2}$ – матрицы представления базисных векторов в ковариантной подалгебре внешней симметрии, индекс α нумерует параметры подалгебры. Матрицы представления удовлетворяют закону умножения

$${}_\iota C^{K_1}{}_{K_3\alpha} \cdot {}_\iota C^{K_3}{}_{K_2\beta} = {}_\iota C^{K_1}{}_{K_2\gamma} \cdot {}_\iota C^\gamma{}_{\alpha\beta}\,, \qquad (93)$$

а также

$${}_\iota C^{\beta K_1}{}_{K_3} \cdot {}_\iota C^{K_3}{}_{K_2\gamma} = {}_\iota C^{\alpha K_1}{}_{K_2} \cdot {}_\iota C^\beta{}_{\gamma\alpha}\,, \qquad (94)$$

где ${}_\iota C^\beta{}_{\gamma\alpha}$ – структурные постоянные контравариантной подалгебры внешней симметрии. В частном случае выражение (94) дает

$$\delta^{K_1}{}_{K_2} = {}_\iota C^{\beta K_1}{}_{K_3} \cdot {}_\iota C^{K_3}{}_{K_2\beta} = {}_\iota C^{\alpha K_1}{}_{K_2} \cdot {}_\iota C^\beta{}_{\beta\alpha}\,. \qquad (95)$$

Переход от тензора энергии-импульса к энергии-импульсу частного вида выполняется в соответствии с соотношением

$$T^{K_1}{}_{K_2} = T_\alpha \cdot {}_\iota C^{\alpha K_1}{}_{K_2}\,. \qquad (96)$$

Используя соотношения (91), (92), (94), (95) и (96), из выражения (89) получим первое уравнение частного поля внешней симметрии

$$\frac{\partial}{\partial x^K}\Gamma^K{}_\alpha - {}_\iota C^\beta{}_{\gamma\alpha} \cdot \Gamma^K{}_\beta \cdot \Gamma^\gamma{}_K = \frac{1}{C_2}(T_\alpha + C_1 \cdot {}_\iota C^\beta{}_{\beta\alpha})\,. \qquad (97)$$

При α, принимающем значения 21, 13, 32, это уравнение относится к полю, источником которого является трехмерный спин.

2. Второе уравнение поля внешней симметрии

Теперь обратимся к выводу второго уравнения поля внешней симметрии, создаваемого фундаментальным

[11] В приведенном уравнении отсутствует слагаемое, пропорциональное скалярной кривизне. Это связано с тем, что по предварительной договоренности трансформационные свойства элемента объема $d\Omega$ не рассматриваются.

объектом, на основании принципа наименьшего действия. Для этого скалярное действие (54) перепишем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
{}_l\mathscr{S} = -\int \Big(&\big(p^{K_1}{}_I(1) + C_1 \cdot l^{K_1}{}_I(1)\big) \cdot l^I{}_{K_1}(2) + \\
&+ \big(m^{K_2K_1}{}_I(1) + C_2 \cdot l^{K_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot l^I{}_{K_1K_2}(2) + \\
&+ \big(w^{KK_2K_1}{}_I(1) + C_3 \cdot l^{KK_2K_1}{}_I(1)\big) \frac{Dl^I{}_{K_1K_2}}{\partial x^K}(2)\Big) d\Omega
\end{aligned}
\tag{98}
$$

и рассмотрим его вариацию при вариации переменных поля $l^I{}_{K_1K_2}(2)$. Для вариации левой функции Лагранжа ${}_l\mathscr{L}$ с обратным знаком имеем

$$
\begin{aligned}
-\delta_2({}_l\mathscr{L}) &= \big(m^{K_2K_1}{}_I(1) + C_2 \cdot l^{K_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot \delta l^I{}_{K_1K_2}(2) + \\
&+ \big(w^{KK_2K_1}{}_I(1) + C_3 \cdot l^{KK_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot \frac{D}{\partial x^K}\delta l^I{}_{K_1K_2}(2)\,.
\end{aligned}
$$

Второе слагаемое запишем так:

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{\partial x^K}\Big(\big(w^{KK_2K_1}{}_I(1) + C_3 \cdot l^{KK_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot \delta l^I{}_{K_1K_2}(2)\Big) - \\
&-\frac{D}{\partial x^K}\big(w^{KK_2K_1}{}_I(1) + C_3 \cdot l^{KK_2K_1}{}_I(1)\big) \cdot \delta l^I{}_{K_1K_2}(2)\,.
\end{aligned}
$$

Используя теорему Гаусса и вариационный принцип, получим второе уравнение поля внешней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{\partial x^K}\big(w^{KK_2K_1}{}_I + C_3 \cdot l^{KK_2K_1}{}_I\big) = \\
&= m^{K_2K_1}{}_I + C_2 \cdot l^{K_2K_1}{}_I\,.
\end{aligned}
$$

Все величины, входящие в это уравнение, относятся к полю 1, поэтому соответствующее указание опущено. Учитывая закон сохранения тока (57), получим

$$
\frac{D}{\partial x^K}\big(l^{KK_2K_1}{}_I\big) = \frac{1}{C_3}(m^{K_2K_1}{}_I + C_2 \cdot l^{K_2K_1}{}_I)\,. \tag{99}
$$

Преобразуем это уравнение, умножив его на $l^I{}_{K_3}$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{\partial x^K}\big(l^{KK_2K_1}{}_I\big) \cdot l^I{}_{K_3} = \\
&= \frac{1}{C_3}\big(m^{K_2K_1}{}_{K_3} + C_2 \cdot l^{K_2K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_3}\big)\,.
\end{aligned}
\tag{100}
$$

Здесь введено обозначение

$$
m^{K_2K_1}{}_{K_3} = m^{K_2K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_3}\,.
$$

Преобразуем левую часть уравнения (100) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{D}{\partial x^K}\big(l^{KK_2K_1}{}_I\big) \cdot l^I{}_{K_3} = \\
&= \frac{D}{\partial x^K}\big(l^{KK_2K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_3}\big) - l^{KK_2K_1}{}_I\frac{D}{\partial x^K}\big(l^I{}_{K_3}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части – это искривленная производная то величины, принадлежащей системе отсчета. Поэтому искривленную производную нужно заменить на частную производную в системе отсчета, то есть, это слагаемое должно быть записано так:

$$
\frac{\partial}{\partial x^K}\big(l^{KK_2K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_3}\big)\,.
$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части, при этом учтем, что

$$
l^I{}_{K_4} \cdot \tilde{l}^{K_4}{}_{I_1} = \delta^I{}_{I_1}\,.
$$

В результате второе слагаемое принимает вид

$$
\begin{aligned}
&l^{KK_2K_1}{}_I \cdot \Big(l^I{}_{K_4} \cdot \tilde{l}^{K_4}{}_{I_1}\Big)\frac{D}{\partial x^K}\big(l^{I_1}{}_{K_3}\big) = \\
&= \big(l^{KK_2K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_4}\big) \cdot \Big(\tilde{l}^{K_4}{}_{I_1} \cdot l^{I_1}{}_{K_3K}\Big) = \,.
\end{aligned}
$$

Далее учтем, что

$$
l^{KK_2K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_3} = R^{KK_2K_1}{}_{K_3}
$$

– это ковариантный объект кривизны поля внешней симметрии[12],

$$
\tilde{l}^{K_4}{}_{I_1} \cdot l^{I_1}{}_{K_3K} = \Gamma^{K_4}{}_{K_3K}
$$

– это контравариантные коэффициенты связности поля внешней симметрии, а

$$
l^{K_2K_1}{}_I \cdot l^I{}_{K_3} = \Gamma^{K_2K_1}{}_{K_3}
$$

– это ковариантные коэффициенты связности поля внешней симметрии.

По отношению к объекту кривизны второе уравнение поля внешней симметрии (98) приобретает вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^K}R^{KK_2K_1}{}_{K_3} - R^{KK_2K_1}{}_{K_4} \cdot \Gamma^{K_4}{}_{K_3K} = \\
&= \frac{1}{C_3}\big(m^{K_2K_1}{}_{K_3} + C_2 \cdot \Gamma^{K_2K_1}{}_{K_3}\big)\,.
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Записанное уравнение соответствует группе и алгебре внешней симметрии самого общего вида. Его можно переписать, если речь идет о подгруппе и подалгебре. При этом нужно перейти от объекта кривизны и коэффициентов связности общего вида к объекту кривизны и коэффициентам связности частного вида, а также от момента общего вида к частному моменту. Для объекта кривизны этот переход выполняется в соответствии с соотношением

$$
R^{KK_2K_1}{}_{K_3} = R^{KK_2}{}_{\alpha} \cdot {}_lC^{\alpha K_1}{}_{K_2}\,. \tag{102}
$$

---

[12] В случае, если $R^{KK_2K_1}{}_{K_3}$ антисимметричен по индексам KK_2 величина $R^{[KK_2]K_1}{}_{K_3}$ представляет собой тензор кривизны поля внешней симметрии.

Для контравариантных коэффициентов связности этот переход выполняется в соответствии с соотношением (91). Для ковариантных коэффициентов связности этот переход выполняется в соответствии с соотношением (92). Переход от момента общего вида к частному моменту выполняется в соответствии с соотношением

$$m^{K_2 K_1}{}_{K_3} = m^{K_2}{}_{\alpha} \cdot {}_{l}C^{\alpha K_1}{}_{K_3} \,. \qquad (103)$$

Используя соотношения (91), (92), (102), (103), из выражения (101) получим второе уравнение частного поля внешней симметрии

$$\frac{\partial}{\partial x^K} R^{KK_2}{}_{\alpha} - {}_{l}C^{\beta}{}_{\gamma\alpha} \cdot R^{KK_2}{}_{\beta} \cdot \Gamma^{\gamma}{}_{K} = \frac{1}{C_3}(m^{K_2}{}_{\alpha} + C_2 \cdot \Gamma^{K_2}{}_{\alpha}) \,. \qquad (104)$$

VIII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Отличия вводимого скалярного действия состоят в следующем:

  1) функции, определяющие состояние физической системы, представляют собой координаты искривленного пространства-времени,

  2) производная $\frac{\partial}{\partial x^k}$ заменяется на искривленную производную,

  3) лагранжиан зависит не только от производной первого порядка от функции, определяющей состояние физической физической системы, но и производной второго порядка от этой функции.

- Приравнивание нулю вариации действия при варьировании динамических параметров дает уравнения динамики параметров фундаментального объекта в кинематическом поле.

  1. Приравнивание нулю вариации действия при варьировании внешних динамических параметров дает уравнения динамики внешних динамических параметров (импульса, момента, второго момента) фундаментального объекта в поле внешней симметрии.

  2. Приравнивание нулю вариации действия при варьировании внутренних динамических параметров дает уравнения динамики внутренних динамических параметров (заряда, тока, второго тока) фундаментального объекта в поле внутренней симметрии.

- Приравнивание нулю вариации действия при варьировании кинематических переменных дает уравнения поля, создаваемого фундаментальным объектом.

  1. Приравнивание нулю вариации действия при варьировании кинематических переменных l дает уравнения поля внешней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом. Источниками этого поля являются внешние динамические параметры фундаментального объекта – импульс и момент.

  2. Приравнивание нулю вариации действия при варьировании кинематических переменных L дает уравнения поля внутренней симметрии, создаваемого фундаментальным объектом. Источниками этого поля являются внутренние динамические параметры фундаментального объекта – заряд и ток.

IX. ПРИЛОЖЕНИЕ. ВАРЬИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В этом Приложении излагается новый подход к операции варьирования, которая рассматривается как специальное частное дифференцирование. В Части 6 настоящей монографии указанный подход используется для вывода уравнений динамики.

1. Вариация функции

Как при варьировании, так и при дифференцировании ключевым объектом является *функциональная зависимость.* Не теряя общности, запишем ее в следующем виде – $x(t)$. *Функция* x в общем случае может быть многокомпонентной величиной (x^k), *аргумент* в общем случае также является многокомпонентной величиной (t^l).

Можно представить себе два пути изменения функции.

1. Изменение функции при преобразовании аргумента. Преобразование аргумента запишем так

$$t \to t' \,.$$

Ему соответствует переход к значению функции $x(t')$. При

$$t \to t + dt$$
$$x(t') - x(t) = x(t + dt) - x(t) \approx \frac{dx}{dt} \cdot dt = dx \,.$$

Здесь dx – дифференциал функции.

2. Изменение функции *без преобразования* аргумента – *преобразование функции.* Функцию x', измененную таким образом, назовем *преобразованной.* Преобразование функции запишем так

$$x \to x' \,.$$

С указанным изменением функции связана операция варьирования.

$$x' - x \approx \delta x - \text{вариация функции} \,.$$

Варьирование становится определенным, если преобразование $x \to x'$ задать в виде специальной функциональной зависимости

$$x' = \mathcal{X}(t, x) \tag{105}$$

при условии

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} = \delta \text{ или в индексной форме } \frac{\partial \mathcal{X}^k}{\partial x^{k_1}} = \delta^k{}_{k_1} .$$

Из функциональной зависимости (105) имеем

$$x' \approx x + \delta x = \frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial x} \cdot x .$$

Отсюда получим выражение для вариации функции

$$\delta x = \frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial t} \cdot dt .$$

В индексной форме вариация функции приобретает следующий вид:

$$\delta x^k = \frac{\partial \mathcal{X}^k(t,x)}{\partial t^l} \cdot dt^l .$$

Если ввести обозначение

$$\frac{\partial \mathcal{X}^k(t,x)}{\partial t^l} = x^k{}_l ,$$

то можно записать

$$\delta x^k = x^k{}_l \cdot dt^l \quad \text{и} \quad x^k{}_l = \frac{\delta x^k}{\partial t^l} .$$

Таким образом, варьирование сводится к специальному частному дифференцированию преобразования функции.

3. Можно представить, что изменение функциональной зависимости происходит двумя путями: имеет место и преобразование функции и преобразование аргумента. Это преобразование запишем так

$$x(t) \to x'(t') .$$

Представим его в виде последовательности преобразований

$$x(t) \xrightarrow{1} x(t') \overset{2}{\rightsquigarrow} x'(t') ,$$

где обозначение $\xrightarrow{1}$ отражает преобразование аргумента, а $\overset{2}{\rightsquigarrow}$ – преобразование функции. Отсюда

$$x'(t') - x(t) = x'(t') - x(t') + x(t') - x(t) .$$

Здесь

$$x'(t') - x(t') \approx \delta x , \quad x(t') - x(t) \approx dx .$$

Бесконечномалое приращение $x'(t') - x(t')$ обозначим Dx. Напомним, что в Разделе IX Главы 2.2 дифференциал D назван *искривленным.* Таким образом, имеем

$$Dx = \delta x + dx . \tag{106}$$

Это же соотношение получим, дифференцируя по t преобразование (105), записанное следующим образом:

$$x'^k(t) = \mathcal{X}^k(t, x(t)) .$$

Имеем

$$dx'^k(t) = \frac{\partial \mathcal{X}^k(t,x)}{\partial t^l} \cdot dt^l + \frac{\partial \mathcal{X}^k(t,x)}{\partial x^{k_1}} \cdot dx^{k_1} .$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \mathcal{X}^k(t,x)}{\partial t^l} \cdot dt^l = \delta x^k \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathcal{X}^k(t,x)}{\partial x^{k_1}} \cdot dx^{k_1} = dx^k ,$$

и полагая

$$dx'^k = Dx^k ,$$

получим соотношение (106) в индексной форме

$$Dx^k = \delta x^k + dx^k .$$

2. Вариация производной функции

Покажем, что преобразование функции позволяет найти преобразование и вариацию ее производной. Обозначим производную функции $x(t)$ так:

$$v(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} .$$

С одной стороны, в общем случае, преобразование функции $v(t)$ имеет вид

$$v'(t) = \mathcal{V}(t, v(t)) , \tag{107}$$

с другой стороны, из соотношения

$$dx' = \frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial t} \cdot dt + dx$$

имеем

$$v'(t) = \frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial t} + v(t) . \tag{108}$$

К этому преобразованию сводится преобразование (107), если функция $v(t)$ является производной. Вычислим дифференциал от преобразований (107) и (108). Получим соответственно

$$dv'(t) = \frac{\partial \mathcal{V}(t,v)}{\partial t} \cdot dt + dv$$

и

$$dv'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial t}\right)\cdot dt + dv\,.$$

Из сравнения полученных соотношений следует

$$\delta v = \frac{\partial \mathcal{V}(t,v)}{\partial t}\cdot dt = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial t}\right)\cdot dt\,.$$

А отсюда получим соотношение для преобразования производной функции

$$\frac{\partial \mathcal{V}(t,v)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial t}\right)\,.$$

В заключение этого Раздела выведем правило перестановки оператора производной и вариации. Напомним, что в вариационном исчислении используется правило, позволяющее переставлять вариацию и оператор производной

$$\delta\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\delta\,. \tag{109}$$

Имеем два выражения. С одной стороны,

$$\frac{\partial}{\partial t}dx' = \frac{\partial}{\partial t}\delta x + \frac{\partial}{\partial t}dx$$

или

$$d\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\delta x + d\frac{\partial x}{\partial t}\,. \tag{110}$$

С другой стороны,

$$dv' = \delta v + dv$$

или

$$d\frac{\partial x'}{\partial t} = \delta\frac{\partial x}{\partial t} + d\frac{\partial x}{\partial t}\,. \tag{111}$$

Сравнение выражений (110) и (111) дает перестановочное соотношение (109) для нашего случая

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta x = \delta\frac{\partial x}{\partial t}\,.$$

3. Вариация сложной функции

В предыдущем Разделе аргумент t является независимой переменной, то есть величиной, которая не является функцией каких-либо величин. В этом случае преобразование аргумента задается следующим соотношением

$$t' = t + C\,.$$

Отсюда следует, что

1) при $t' = t + dt$

$$dt = const \quad \text{и, следовательно,} \quad ddt = 0;$$

2) вариация $\delta t = 0$.

Ситуация усложняется, если аргумент не является независимой величиной.

Прежде, чем перейти к вариации сложной функции, выполним некоторые переобозначения. Они необходимы для того, чтобы вводимые далее обозначения совпадали с теми обозначениями, которые были введены в Главе 2.2.

3.1. *Переобозначения дифференциалов*

Итак, далее воспользуемся следующими переобозначениями:

$$d \to \hat{d}\,, \quad \delta \to \hat{\delta}\,, \quad D \to d\,.$$

Например, в новых обозначениях соотношение (106) запишется так:

$$dx = \hat{\delta}x + \hat{d}x\,.$$

Попрежнему исходим из следующих функциональных зависимостей:

$$x^k(t^l)\,, \quad x'^k = \mathcal{X}^k(t, x(t))\,.$$

После дифференцирования преобразования функции имеем

$$\frac{\hat{\partial}x'^k(t)}{\hat{\partial}t^l}\hat{d}t^l = \frac{\hat{\partial}\mathcal{X}^k(t,x)}{\hat{\partial}t^l}\hat{d}t^l + \frac{\hat{\partial}x^k(t)}{\hat{\partial}t^l}\hat{d}t^l\,.$$

или

$$\hat{d}x'^k(t) = \frac{\hat{\partial}\mathcal{X}^k(t,x)}{\hat{\partial}t^l}\hat{d}t^l + \hat{d}x^k\,,$$

Учтем, что

$$\hat{d}x'^k(t) = \frac{\hat{\partial}x'^k(t)}{\hat{\partial}t^l}\hat{d}t^l = dx^k(t)\,,$$

$$\hat{d}\mathcal{X}^k(t) = \frac{\hat{\partial}\mathcal{X}^k(t,x)}{\hat{\partial}t^l}\hat{d}t^l = \hat{\delta}^k(t)\,,$$

получим

$$dx^k = \hat{\delta}x^k + \hat{d}x^k\,.$$

Введем обозначения

$$v^k{}_l = \frac{\hat{\partial}x^k(t)}{\hat{\partial}t^l}\,, \quad x^k{}_l = \frac{\hat{\delta}x^k(t)}{\hat{\partial}t^l} = \frac{\hat{\partial}\mathcal{X}^k(t,x)}{\hat{\partial}t^l}\,, \quad x^k{}_{,l} = \frac{\hat{\partial}x^k(t)}{\hat{\partial}t^l}\,,$$

для них имеем

$$v^k{}_l = x^k{}_l + x^k{}_{,l}\,.$$

3.2. Правила варьирования и дифференцирования сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $y^i(x^k)$, где аргумент сам является функцией $x^k(t^l)$. Для нее специальная функциональная зависимость запишется так:

$$y'^i(x) = \mathcal{Y}^i(x, y(x))\,.$$

Дифференцируя эту зависимость по x, получим

$$\frac{\partial y'^i(x)}{\partial x^k}dx^k = \frac{\partial \mathcal{Y}^i(x,y)}{\partial x^k}dx^k + \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^k}dx^k\,.$$

или

$$dy'^i(x) = d\mathcal{Y}^i(x,y) + dy^i\,.$$

Введем искривленный дифференциал и вариацию функции $y^i(x)$ в соответствии с выражениями

$$Dy^i(x) = dy'^i(x)\,, \quad \delta y^i(x) = d\mathcal{Y}^i(x,y)\,,$$

учитывая которые, получим

$$Dy^i(x) = \delta y^i(x) + dy^i(x)\,.$$

Введем следующие обозначения

$$l^i{}_k = \frac{Dy^i(x)}{\partial x^k},\;\; y^i{}_k = \frac{\partial \mathcal{Y}^i(x,y)}{\partial x^k},\;\; y^i{}_{,k} = \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^k}\,,$$

используя их, запишем вариацию и дифференциалы

$$\delta y^i(x) = \frac{\partial \mathcal{Y}^i(x,y)}{\partial x^k}dx^k = y^i{}_k \cdot dx^k\,,$$
$$dy^i(x) = \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^k}dx^k = y^i{}_{,k} \cdot dx^k\,,$$
$$Dy^i(x) = \frac{Dy^i(x)}{\partial x^k}dx^k = l^i{}_k \cdot dx^k\,.$$

Далее учтем, что обыкновенный дифференциал аргумента x тождественен искривленному дифференциалу функции $x(t)$, то есть

$$dx^k \equiv \hat{D}x^k\,,$$

или

$$dx^k = \hat{\delta}x^k + \hat{d}x^k\,.$$

В результате получим

$$\delta y^i = y^i{}_k \cdot (\hat{\delta}x^k + \hat{d}x^k) = y^i{}_k \cdot (x^k{}_l + x^k{}_{,l}) \cdot \hat{d}t^l\,,$$
$$dy^i = y^i{}_{,k} \cdot (\hat{\delta}x^k + \hat{d}x^k) = y^i{}_{,k} \cdot (x^k{}_l + x^k{}_{,l}) \cdot \hat{d}t^l\,,$$
$$Dy^i = (y^i{}_k + y^i{}_{,k}) \cdot (x^k{}_l + x^k{}_{,l}) \cdot \hat{d}t^l\,.$$

Отсюда следуют правила дифференцирования и варьирования сложной функции

$$\delta y^i = y^i{}_k \cdot v^k{}_l \cdot \hat{d}t^l\,,$$
$$dy^i = y^i{}_{,k} \cdot v^k{}_l \cdot \hat{d}t^l\,,$$
$$Dy^i = l^i{}_k \cdot v^k{}_l \cdot \hat{d}t^l\,.$$

3.3. Частные случаи

Рассмотрим следующие частные случаи правил варьирования и дифференцирования сложной функции.

1. Вариация функции $\delta y^i = 0$, или $y^i{}_k = 0$. Именно этот случай варьирования и дифференцирования сложной функции используется в современной теоретической физике. При этом нужно отличать вариацию функции δy^i, которая в рассматриваемом случае равна нулю, от вариации фунции *при вариации аргумента* $\hat{\delta}y^i = y^i{}_{,k} \cdot \hat{\delta}x^k$.

В рассматриваемом случае вышеуказанные правила дифференцирования и варьирования сложной функции сводятся к одному[13]

$$dy^i = y^i{}_{,k} \cdot v^k{}_l \cdot \hat{d}t^l\,.$$

Это правило удобно разбить на два, если записать его в следующем виде

$$\hat{\delta}y^i + \hat{d}y^i = y^i{}_{,k} \cdot (\hat{\delta}x^k(t) + \hat{d}x^k(t))\,.$$

Получим

$$\hat{\delta}y^i = y^i{}_{,k} \cdot \hat{\delta}x^k(t)\,,$$
$$\hat{d}y^i = y^i{}_{,k} \cdot \hat{d}x^k(t) = y^i{}_{,k} \cdot x^k{}_{,l} \cdot \hat{d}t^l\,.$$

Первое соотношение – это правило вычисления вариации функции при вариации аргумента. Второе соотношение – это обычное правило дифференцирования сложной функции.

2. Вариация аргумента $\delta x^k = 0$, или $x^k{}_l = 0$. В рассматриваемом случае правила дифференцирования и варьирования сложной функции, указанные в предыдущем Разделе, сводятся к следующим правилам[14]

$$\delta y^i = y^i{}_k \cdot dx^k = y^i{}_k \cdot x^k{}_{,l} \cdot dt^l\,,$$
$$dy^i = y^i{}_{,k} \cdot dx^k = y^i{}_{,k} \cdot x^k{}_{,l} \cdot dt^l\,,$$
$$Dy^i = (y^i{}_k + y^i{}_{,k}) \cdot x^k{}_{,l} \cdot dt^l = l^i{}_k \cdot dx^k\,.$$

Рассматриваемому случаю варьирования и дифференцирования сложной функции соответствует искривленное дифференцирование, рассмотренное в Разделе II.1 Главы 2.2.

3. Вариация функции $\delta y^i = 0$, или $y^i{}_k = 0$ и вариация аргумента $\delta x^k = 0$, или $x^k{}_l = 0$. В рассматриваемом случае правила дифференцирования и варьирования сложной функции, указанные в предыдущем

---

[13] Нужно иметь в виду, что в рассматриваемом случае

$$Dy^i = dy^i\,.$$

[14] Нужно иметь в виду, что в рассматриваемом случае обыкновенные дифференциалы d и $\hat{d}$ тождественны

$$d \equiv \hat{d}\,.$$

Разделе, сводятся к единственному правилу[15]

$$dy^i = y^i{}_{,k} \cdot dx^k = y^i{}_{,k} \cdot x^k{}_{,l} \cdot dt^l\,,$$

которое представляет собой обычное правило дифференцирования сложной функции.

3.4. Обобщение

Введем понятие *сложность* функции.

0. Функцию $x(t)$, аргументом которой является независимая величина, назовем функцией *нулевой* сложности. Преобразование этой функции определяется специальной функциональной зависимостью

$$x'(t) = \mathcal{X}(t, x(t))\,,$$

дифференцирование которой дает сумму дифференциалов

$$dx' = \frac{\partial \mathcal{X}(t,x)}{\partial t} \cdot dt + dx\,,$$

или

$$dx' = d\mathcal{X}(t,x) + dx\,,$$

или

$$Dx = \delta x + dx$$

Искривленный дифференциал D, вариацию δ и обыкновенный дифференциал d назовем дифференциальными *операторами нулевой сложности.*

1. Функцию $x_1(x)$, аргументом которой является функция $x(t)$, назовем функцией *первой* сложности. Преобразование этой функции определяется специальной функциональной зависимостью

$$x'_1(x) = \mathcal{X}_1(x, x_1(x))\,,$$

дифференцирование которой дает сумму дифференциалов

$$d_1 x'_1 = \frac{\partial_1 \mathcal{X}_1(x, x_1)}{\partial_1 x} \cdot d_1 x + d_1 x_1\,,$$

или

$$d_1 x'_1 = d_1 \mathcal{X}_1(x, x_1) + d_1 x_1\,,$$

или

$$D_1 x_1 = \delta_1 x_1 + d_1 x_1$$

Искривленный дифференциал D_1, вариацию δ_1 и обыкновенный дифференциал d_1 назовем дифференциальными *операторами первой сложности.*

Обыкновенный дифференциал первой сложности d_1 тождественен искривленному дифференциалу нулевой сложности D

$$d_1 \equiv D = \delta + d\,.$$

2. Функцию $x_2(x_1)$, аргументом которой является функция первой сложности $x_1(x)$, назовем функцией *второй* сложности. Преобразование этой функции определяется специальной функциональной зависимостью

$$x'_2(x_1) = \mathcal{X}_2(x_1, x_2(x_1))\,,$$

дифференцирование которой дает сумму дифференциалов

$$d_2 x'_2 = \frac{\partial_2 \mathcal{X}_2(x_1, x_2)}{\partial_2 x_1} \cdot d_2 x_1 + d_2 x_2\,,$$

или

$$d_2 x'_2 = d_2 \mathcal{X}_2(x_1, x_2) + d_2 x_2\,,$$

или

$$D_2 x_2 = \delta_2 x_2 + d_2 x_2$$

Искривленный дифференциал D_2, вариацию δ_2 и обыкновенный дифференциал d_2 назовем дифференциальными *операторами второй сложности.*

Обыкновенный дифференциал второй сложности d_2 тождественен искривленному дифференциалу первой сложности D_1

$$d_2 \equiv D_1 = \delta_1 + d_1\,.$$

Преобразование функций более высокой сложности рассматривается аналогичным образом. Причем обыкновенный дифференциал n-ой сложности d_n тождественен искривленному дифференциалу $(n-1)$-ой сложности D_{n-1}

$$d_n \equiv D_{n-1} = \delta_{n-1} + d_{n-1}\,.$$

Заметим, что, если варьирование не рассматривается, то

$$\delta_n = 0, \quad \text{для} \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, ...$$

и

$$d_n \equiv d_{n-1} \equiv ... \equiv d_1 \equiv d\,,$$

то есть при дифференцировании сложной функции мы имеем дело с единственным дифференциалом.

---

[15] Нужно иметь в виду, что в рассматриваемом случае все дифференциалы сводятся к одному d

$$d \equiv D \equiv \hat{d}\,.$$

Глава 3.3 Объяснение квантовых явлений с участием фундаментальных объектов

I. СИСТЕМООБРАЗУЮЩИЙ ПОСТУЛАТ

Выдвинем постулат, который будем развивать дальше: квантовые явления, то есть дискретность динамических параметров физических объектов, обусловлены тем, что множество векторов действия физических объектов составляет алгебру, то есть на множестве векторов действия, помимо операций сложения и умножения на число, имеет место операция умножения. Множество векторов действия наделяется статусом *физического* поля.

II. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Квантовые явления как таковые, а также теория, приспособленная для их описания, остаются загадочными по сей день, несмотря на столетние усилия физиков, направленные на развитие этой области знания.

Прежде всего остается неясным, как объяснить или в чем заключается *причина* столь необыкновенного явления, как дискретность значений *физических величин.*[1]

Под объяснением или причиной мы здесь понимаем ответ на следующий вопрос: существуют ли какие-либо общие представления, из которых следовала бы указанная дискретность. Сейчас неясно, нужно ли вообще ставить вопрос о поиске причины, не рациональнее ли основываться на квантовых явлениях как на заданности. Именно по этому пути идет сегодняшняя квантовая теория. Дискретность значений физических величин заложена в ней как постулат.

Вследствие того, что современная квантовая теория не объясняет квантовые явления, не рассматривает причину квантовых явлений, она не может описать эти явления детерминистским образом, то есть через последовательность предопределяющих друг друга событий. Вследствие этого теоретический объект, которым пользуется квантовая теория для описания состояния частиц, участвующих в квантовом процессе, – волновая функция – получил статистическую интерпретацию. Такую ситуацию нужно считать временной и существующей до тех пор, пока не решен вопрос о причине квантовых явлений. Так же как теория теплоты получила основания в молекулярно-кинетической теории, так и статистическая квантовая теория должна получить основания в детерминистской квантовой теории.

Далее остановимся на *действии* и *волновой функции* – понятиях современной физики, существенных для нашего изложения.

III. СКАЛЯРНОЕ ДЕЙСТВИЕ И КЛАССИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Развитие теоретической физики привело к утверждению, что существует некоторая скалярная функция координат $S(x)$, используя которую в соответствии с некоторыми правилами, можно описать энергетические и динамические явления. Эта функция называется *действием.* Для нас важно отметить, что действие является действительной скалярной величиной, то есть пространство действия есть одномерное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Остановимся на действии для нерелятивистской частицы (материальной точки). Положение частицы в геометрическом пространстве и времени определяется четырьмя координатами, включающими три геометрические координаты x^a и время t. Три функциональные зависимости $x^a(t)$ определяют *траекторию* частицы.

Полагают, что действие является непрерывной функцией координат

$$S(x^m) = S(x^a, t) = S(x^a(t), t).$$

Кроме того, действие рассматривается как неопределенный интеграл

$$S = \int dS\,, \tag{1}$$

В выражении полного дифференциала

$$dS = \frac{dS(x^a(t), t)}{dt} \cdot dt$$

полная производная от действия обозначается

$$L = \frac{dS(x^a(t), t)}{dt}$$

и называется *функцией Лагранжа.* Из предположения о том, что движение частицы определяется ее координатами и скоростью, следует общий вид функции Лагранжа

$$L = L\Big(x^a(t),\, \frac{dx^a(t)}{dt},\, t\Big).$$

---

[1] В этой Главе и далее термин *физические величины* означает как динамические параметры, так и кинематические переменные, рассмотренные в предыдущих Разделах.

Таким образом, действие для нерелятивистской частицы определяется следующим образом:

$$S = \int L\Big(x^a(t),\, \frac{dx^a(t)}{dt},\, t\Big)dt\,. \tag{2}$$

Функция Лагранжа *конструируется*, исходя из *принципа наименьшего действия.* Для "правильно" сконструированной функции Лагранжа и, следовательно, для "правильно" сконструированного действия выполняется *принцип наименьшего действия.* Этот принцип можно сформулировать следующим образом: из всех мыслимых траекторий движения частицы на временном отрезке от t_1 до t_2 между фиксированными геометрическими точками $x^a(t_1)$ и $x^a(t_2)$ *действительная* траектория обладает тем свойством, что для нее *определенный* интеграл

$$\begin{aligned} S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} &= \int\limits_{t_1}^{t_2} L\Big(x^a(t),\, \frac{dx^a(t)}{dt},\, t\Big)dt = \\ &= S(x^a(t_2),t_2) - S(x^a(t_1),t_1) \end{aligned} \tag{3}$$

принимает минимальное значение[2].

Для частицы, движущейся в статическом потенциальном поле, "правильная" функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{m}{2}\cdot\Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) - U(x^a)\,.$$

Здесь $x_a = \delta_{ab}\cdot x^b$, индексы a и b принимают значения $1,2,3$, по повторяющимся верхнему и нижнему индексам выполняется суммирование. Первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию частицы, а второе слагаемое – ее потенциальную энергию, взятую с обратным знаком. Соответствено "правильное" действие для частицы, движущейся в статическом потенциальном поле, принимает вид

$$S = \int\Big(\frac{m}{2}\cdot\Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) - U(x^a)\Big)\cdot dt\,, \tag{4}$$

Технически принцип наименьшего действия реализуется следующим образом. Изменим траекторию (геометрические координаты) частицы $x^a(t)$ на временном отрезке от t_1 до t_2 между фиксированными геометрическими точками $x^a(t_1)$ и $x^a(t_2)$ на бесконечно малую величину – *вариацию* координат – $\delta x^a(t)$[3]:

$$x^a(t) \quad\rightarrow\quad x^a(t) + \delta x^a(t)\,.$$

Это приведет к изменению значения действия на указанном временном интервале на вариацию значения действия

$$S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} \quad\rightarrow\quad S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \delta S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Минимум значения действия, требуемый принципом наименьшего действия, достигается при

$$\delta S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,. \tag{5}$$

Пусть существуют условия, накладываемые на траекторию частицы, для которых выполняется соотношение (5), тогда эти условия и определят *действительную* траекторию движения частицы.

Обратимся теперь к движению частицы в статическом потенциальном поле. *Действительная* траектория движения частицы в этом случае определяется вторым законом Ньютона

$$m\cdot\frac{d^2x_a}{dt^2} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\,. \tag{6}$$

Отсюда условия, при которых для действия (4) выполняется соотношение (5), должны совпадать с равенством (6). Покажем это. Имеем

$$\begin{aligned} &S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \delta S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{m}{2}\cdot\Big(\frac{(dx^a+d\delta x^a)}{dt}\frac{(dx_a+d\delta x_a)}{dt}\Big) - U(x^a+\delta x^a)\Big)\cdot dt = \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{m}{2}\cdot\Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) + m\cdot\frac{dx_a}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(\delta x^a) - \\ &-U(x^a) - \frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\cdot\delta x^a\Big)\cdot dt = \\ &= S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(m\cdot\frac{dx_a}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(\delta x^a) - \frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\cdot\delta x^a\Big)\cdot dt. \end{aligned}$$

Выполним интегрирование первого слагаемого в подинтегральном выражении по частям. Получим

$$\begin{aligned} &S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \delta S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} + m\cdot\frac{dx_a}{dt}\cdot(\delta x^a)\big|_{t_1}^{t_2} - \\ &- \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(m\cdot\frac{d^2x_a}{dt^2} + \frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\Big)\cdot\delta x^a\cdot dt\,. \end{aligned}$$

Учтем, что рассматриваемые траектории находятся между фиксированными геометрическими точками $x^a(t_1)$ и $x^a(t_2)$, то есть вариация траекторий в этих точках отсутствует:

$$\delta x^a(t_1) = 0\,,\quad \delta x^a(t_2) = 0\,.$$

[2] Принцип наименьшего действия удобен при решении главной задачи теоретической физики: поиска уравнений физики (уравнений движения и поля). Конструирование функции Лагранжа, а затем вывод уравнений физики с помощью принципа наименьшего действия является более определенной задачей, чем произвольное конструирование уравнений физики.

[3] Вариацию координат $\delta x^a(t)$ следует отличать от дифференциала координат $dx^a(t) = \frac{dx^a(t)}{dt}\cdot dt$ – изменения координат, вызванного изменением времени.

В результате имеем

$$S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \delta S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} = S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \\ - \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(m\cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\Big)\cdot \delta x^a \cdot dt\,.$$

Отсюда следует, что

$$\delta S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} = - \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(m\cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\Big)\cdot \delta x^a \cdot dt\,. \quad (7)$$

Таким образом, выполнение принципа наименьшего действия

$$\delta S(x^a(t),t)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

эквивалентно выполнению второго закона Ньютона

$$m\cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \frac{\partial U(x)}{\partial x^a} = 0\,.$$

Далее выясним связь между импульсом и энергией частицы с одной стороны и действием с другой. Для этого воспользуемся выражением для дифференциала действия

$$dS = L\cdot dt = \Big(\frac{m}{2}\cdot \Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) - U(x^a)\Big)\cdot dt\,.$$

В выражениии в скобках добавим и вычтем одно и тоже слагаемое

$$dS = \Big(\frac{m}{2}\cdot \Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) + \frac{m}{2}\cdot \Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) - \\ - \frac{m}{2}\cdot \Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) - U(x^a)\Big)\cdot dt\,.$$

После группировки слагаемых имеем

$$dS = m\cdot \frac{dx_a}{dt}\cdot dx^a - \Big(\frac{m}{2}\cdot \Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) + U(x^a)\Big)\cdot dt\,.$$

Если учесть, что

$$m\cdot \frac{dx_a}{dt} = p_a \ - \ \text{импульс частицы}\,,$$

а

$$\frac{m}{2}\cdot \Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt^2}\Big) + U(x^a) = E \ - \ \text{энергия частицы}\,,$$

получим[4]

$$dS = p_a\cdot dx^a - E\cdot dt\,. \quad (8)$$

Сравнивая это соотношение с выражением для полного дифференциала

$$dS = \frac{\partial S(x,t)}{\partial x^a}\cdot dx^a + \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\cdot dt\,,$$

получим

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x^a} = p_a\,, \quad \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = -E\,.$$

Заметим следующее. Обычно соответствие оператора физической величине считается прерогативой квантовой теории. Однако уже в классическом нерелятивистском случае мы видим это соответствие: импульсу p_a соответствует оператор

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\,,$$

энергии E соответствует оператор

$$-\frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Указанные операторы применяются к скалярной функции – нерелятивистскому действию $S(x)$.

Напомним, что действие для материальной релятивистской свободной частицы имеет вид[5]

$$S = -m\,c\int ds\,, \quad (9)$$

где m – масса частицы, c – скорость света, s – длина вектора в четырехмерном пространстве-времени.

---

[4] Энергия частицы, выраженная через импульс, обозначается H и называется функцией Гамильтона

$$H(p,x) = \frac{p^a\cdot p_a}{2m} + U(x^a)\,.$$

[5] Здесь имеет место неясность, вызванная тем, что классическое действие и релятивистское действие обозначены одинаково, в то время как их нужно отличать друг от друга. Удобно обозначить классическое действие S_∞, имея в виду, что в этом случае скорость света следует считать бесконечно большой, а за релятивистским действием сохранить обозначение S. Тогда классические импульс и энергия записываются так:

$$p_{\infty a} = \frac{\partial S_\infty}{\partial x^a}\,, \qquad E_\infty = -\frac{\partial S_\infty}{\partial t}\,,$$

а релятивистские импульс и энергия записываются так:

$$p_a = -\frac{\partial S}{\partial x^a}\,, \qquad E = -\frac{\partial S}{\partial t}\,.$$

При этом нужно учесть, что

$$S = -m\,c^2\cdot t + S_\infty\,.$$

Отсюда следуют уравнения взаимосвязи

$$p_a = -p_{\infty a}\,, \qquad E = m\,c^2 + E_\infty\,.$$

Они позволяют, например, получить из релятивистского соотношения между импульсом и энергией

$$(m\,c)^2 = -p^2 + \frac{E^2}{c^2}$$

классическое соотношение

$$p_\infty^2 = 2\,m\,E_\infty\,.$$

Производная от действия по координате пространства-времени, взятая с обратным знаком, в релятивистском случае определяется как 4-*импульс*

$$p_m = -\frac{\partial S(x)}{\partial x^m}\,. \tag{10}$$

Таким образом, и в релятивистском случае 4-импульсу p_m соответствует оператор

$$-\frac{\partial}{\partial x^m}\,,$$

применяемый к скалярной функции – релятивистскому действию $S(x)$.

IV. КВАНТОВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ

Чертой, характерной для квантовой теории, является соответствие импульсу p_a оператора

$$\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial x^a}\,,$$

а также соответствие энергии E оператора

$$-\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Эти операторы применяются к многокомпонентной (векторной) величине – волновой функции $\psi(x)$. Наличие множителя

$$\frac{\hbar}{i}\,,$$

отличающего эти операторы от классических операторов импульса и энергии, представляется загадочным.

Ключевым для квантовой теории является постулат, выражаемый следующим суждением: значения физической величины есть собственные значения оператора, поставленного в соответствие этой физической величине. Этот постулат будем называть *квантовым*. По отношению к импульсу и энергии квантовые постулаты в теории Шредингера имеют вид

$$\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^a} = p_a\,\psi\,, \quad \frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -E\,\psi\,. \tag{11}$$

Учитывая соотношение (8)

$$dS = p_a\,dx^a - E\,dt\,,$$

получим квантовый постулат в следующем виде:

$$d\psi = \frac{i}{\hbar}\,dS\cdot\psi\,. \tag{12}$$

Отсюда следует, что в частном случае волновая функция записывается так:

$$\psi = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,S\right)\,.$$

Важно отметить, что волновая функция является многокомпонентной величиной. В теории Шредингера волновая функция является одномерной (скалярной) величиной над полем комплексных чисел. В теории Паули волновая функция является двумерной векторной величиной над полем комплексных чисел. В теории Дирака волновая функция записывается в виде столбца из четырех компонент, каждая из которых является комплексной функцией:

$$\begin{aligned}
\psi^1 &= \varphi^1 + i\,\chi^1\,,\\
\psi^2 &= \varphi^2 + i\,\chi^2\,,\\
\psi^3 &= \varphi^3 + i\,\chi^3\,,\\
\psi^4 &= \varphi^4 + i\,\chi^4\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, в теории Дирака волновая функция является четырехмерной векторной величиной над полем комплексных чисел.

Для непредвзятого исследователя выглядит загадочной особенность квантовой теории, состоящая в использовании комплексных чисел и функций.

Волновой функции дается вероятностная интерпретация, которая встречает возражения у ряда исследователей. С нашей точки зрения главный вопрос связан не тем, насколько удачна интерпретация волновой функции, а с тем, почему вообще необходима интерпретация. Ничего подобного нет в других областях физики. Нельзя представить себе, что, например, теория гравитации Ньютона требует какой-либо интерпретации для основных используемых в ней величин за исключением той, которая есть следствие начального понимания их сущности. Возникает впечатление, что необходимость в интерпретации волновой функции указывает на отсутствие начального этапа в построении квантовой теории.

V. НАВОДЯЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Квантовые постулаты (11), рассмотренные в предыдущем Разделе, на первый взгляд кажутся искусственными и необъяснимыми. Однако для их введения есть простые наводящие соображения, которые и рассмотрим в этом Разделе. Эти соображения никак не связаны с физикой квантовых явлений, а скорее являются математико-методическими. Вероятно, именно этими математико-методическими соображениями воспользовался Шредингер при формулировке квантовых постулатов и выводе волнового уравнения квантовой механики.

Предварительно напомним следующее.

1. М. Планк объяснил излучение абсолютно черного тела тем, что энергия излучения состоит из целого числа порций (квантов)

$$E = n\cdot E_k\,. \tag{13}$$

Здесь n – натуральное число – число порций (квантов), а E_k – энергия одной порции (кванта). Причем

$$E_k = \hbar \cdot \omega\,.$$

Здесь $\hbar$ – постоянная Планка, а ω – циклическая частота излучения.

2. Л. де Бройль предположил, что телу с энергией E и импульсом p соответствует волна с циклической частотой ω и волновым числом κ

$$\psi(\kappa \cdot x - \omega \cdot t)\,.$$

Причем[6]

$$\frac{E}{\hbar} = n \cdot \omega \tag{14}$$

и

$$\frac{p}{\hbar} = n \cdot \kappa\,. \tag{15}$$

Обратимся теперь к квантовым постулатам. Для того, чтобы сделать ясными соображения Шредингера, приведшие к формулировке волнового уравнения квантовой механики, рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + a^2\psi = 0\,. \tag{16}$$

Это уравнение имеет частное решение

$$\psi = A \cdot \sin(n \cdot \omega t)$$

при условии

$$a^2 = n^2 \cdot \omega^2\,.$$

Отождествляя это соотношение с квадратом выражения (14), получим

$$a^2 = \frac{E^2}{\hbar^2}\,.$$

Таким образом, уравнение (16), переписанное следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2}\psi\,, \tag{17}$$

– приводит к значениям энергии, удовлетворяющим соотношению де Бройля (14). Если учесть, что от уравнения (17) можно перейти к уравнению первого порядка[7]

$$\frac{d\psi}{dt} = -i \cdot \frac{E}{\hbar}\psi\,,$$

то также можно сказать, что выполнение этого соотношения приводит к квантованию энергии в соответствии с соотношением де Бройля (14). Переписав последнее соотношение в следующем виде:

$$\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{d\psi}{dt} = -E\psi\,, \tag{18}$$

– замечаем, что мы получили один из квантовых постулатов.

Аналогично к квантовому условию Л. де Бройля (15) придем, если рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + a^2\psi = 0\,. \tag{19}$$

Это уравнение имеет частное решение

$$\psi = A \cdot \sin(n \cdot \kappa \cdot x)$$

при условии

$$a^2 = n^2 \cdot \kappa^2\,.$$

Отождествляя это соотношение с квадратом выражения (15), получим

$$a^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}\,.$$

Таким образом, уравнение (19), переписанное следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi\,, \tag{20}$$

– приводит к значениям импульса, удовлетворяющим соотношению де Бройля (15). Если учесть, что от уравнения (20) можно перейти к уравнению первого порядка[8]

$$\frac{d\psi}{dx} = i \cdot \frac{p}{\hbar}\psi\,,$$

то также можно сказать, что выполнение этого соотношения приводит к квантованию импульса в соответствии с соотношением де Бройля (15). Переписав последнее соотношение в следующем виде:

$$\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{d\psi}{dx} = p\psi\,, \tag{21}$$

– получаем другой из квантовых постулатов.

Полученные квантовые постулаты и выражение для энергии частицы

$$\frac{m \cdot v^2}{2} + U = E$$

[6] Первое соотношение повторяет соотношение Планка (13), однако имеет другой, в отличие от планковского, смысл, так как относится к частоте некоторой гипотетической волны.

[7] Уравнение со знаком (+) в правой части не рассматривается как не имеющее физического смысла.

[8] Уравнение со знаком (–) в правой части не рассматривается как не имеющее физического смысла.

или

$$\frac{p^2}{2m} + U = E$$

позволяют получить уравнение Шредингера для волны де Бройля. Действительно, умножим последнее выражение для энергии тела на волновую функцию ψ

$$\frac{p^2}{2m} \cdot \psi + U \cdot \psi = E \cdot \psi\,,$$

а затем воспользуемся квантовыми постулатами (18) и (21). Получим уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^a \partial x_a} + U \cdot \psi = i\hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}\,.$$

Из сказанного в этом Разделе важно следующее.

1. Квантовые постулаты *подобраны* так, чтобы дискретные значения циклической частоты ω и волнового числа κ, возникающие в задачах на собственные значения (16) и (19), удовлетворяли соотношениям де Бройля.

2. Основы квантовой механики не содержат определений, касающихся смысла волновой функции.

VI. ЧТО ЗНАЧИТ: ОБЪЯСНИТЬ КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ ИЛИ УСТАНОВИТЬ ПРИЧИНУ КВАНТОВЫХ ЯВЛЕНИЙ

Зададимся следующим вопросом: существуют ли какие-либо общие представления, из которых следовала бы дискретность значений физических величин? Если ответ утвердительный, то такие представления будем называть *причиной* квантовых явлений или объяснением квантовых явлений. Сегодняшняя квантовая теория вопрос о причине квантовых явлений не рассматривает. Дискретность значений физических величин заложена в ней в виде квантового постулата.

Если, тем не менее, считать постановку задачи поиска причины квантовых явлений правомерной, то из предыдущего следует, что мы должны получить квантовый постулат как *следствие* каких-то общих представлений, то есть, мы должны, исходя из неких общих представлений, обнаружить, что каким-то физическим величинам по некоторому алгоритму ставятся в соответствие операторы. Далее мы должны из этих же представлений прийти к задаче на собственные значения для операторов физических величин. Если такое удастся сделать, то мы будем считать, что указанные некие общие представления лежат в основе объяснения (являются причиной) квантовых явлений. Точнее, нужно сказать так: указанные представления должны быть положены в основу понимания квантовых явлений.

VII. ДЕЙСТВИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА

Мы приходим к объяснению квантовых явлений с участием фундаментальных объектов, делая два принципиальных обобщения.

Первое. Пусть действие является не скалярной величиной, как это принято в классической и квантовой физике, а векторной[9]. Пространство *векторов действия* $\mathbf{S}$ обозначим $\mathbb{S}$. Будем полагать, что пространство $\mathbb{S}$ определено над полем действительных чисел и имеет размерность N. Базисные векторы в пространстве $\mathbb{S}$ обозначим $\mathbf{e}_K$, здесь индекс K пробегает значения от 1 до N. Вектор действия $\mathbf{S} \in \mathbb{S}$ записываются через базисные векторы так:

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot S^K\,,$$

где S^K – координаты вектора действия. Они наделены размерностью действия – Дж·сек .

Второе. Множество векторов действия является алгеброй, то есть на множестве векторов действия имеет место не только закон сложения векторов и закон умножения векторов на число, но и закон *умножения векторов*.

Умножение векторов в общем случае некоммутативно. Отсюда следует необходимость рассматривать два типа умножения – правое и левое – и соответственно две разновидности алгебры действия фундаментальных объектов – правую и левую.

1. Правая алгебра действия фундаментальных объектов

Правая алгебра действия фундаментальных объектов обозначается ${}_r\mathbb{S}$. Для векторов этой алгебры оговорено правое произведение

$${}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2\,, \tag{22}$$

где на векторах, участвующих в умножении установлен порядок. $\mathbf{S}_1$ – начальный вектор, $\mathbf{S}_2$ – последующий вектор, и последующий вектор $\mathbf{S}_2$ умножается на начальный вектор $\mathbf{S}_1$ справа. В выражении (22) коэффициент S_0 имеет размерность действия и согласует размерности правой и левой частей уравнения.

Для правой алгебры действия вводятся правые базисные векторы

$${}_r\mathbf{e}_K\,.$$

Они отличаются от левых базисных векторов только тем, что при умножении правых базисных векторов

[9] То есть пространство действия есть многомерное векторное пространство.

номер структурной матрицы совпадает с индексом базисного вектора, стоящего справа, то есть

$$ {}_r\mathbf{e}_{K_1} \circ {}_r\mathbf{e}_{K_2} = {}_r\mathbf{e}_K \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2}\,, \tag{23} $$

где ${}_rC^K{}_{K_1K_2}$ – структурные постоянные правой алгебры действия фундаментальных объектов ${}_r\mathbb{S}$.

Учитывая, что

$$ \mathbf{S}_1 = {}_r\mathbf{e}_{K_1} \cdot S_1^{K_1}\,, \quad \mathbf{S}_2 = {}_r\mathbf{e}_{K_2} \cdot S_2^{K_1}\,, $$

из выражений (22) и (23) получим закон умножения координат в правой алгебре действия

$$ {}_rS^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot S_1^{K_1} \cdot S_2^{K_2}\,. \tag{24} $$

2. Левая алгебра действия фундаментальных объектов

Левая алгебра действия фундаментальных объектов обозначается ${}_l\mathbb{S}$. Для векторов этой алгебры оговорено левое произведение

$$ {}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1\,. \tag{25} $$

где на векторах, участвующих в умножении установлен порядок. Последующий вектор $\mathbf{S}_2$ умножается на начальный вектор $\mathbf{S}_1$ слева.

Для левой алгебры действия вводятся левые базисные векторы

$$ {}_l\mathbf{e}_K\,. $$

Они отличаются от правых базисных векторов только тем, что при умножении левых базисных векторов номер структурной матрицы совпадает с индексом базисного вектора, стоящего слева, то есть

$$ {}_l\mathbf{e}_{K_2} \circ {}_l\mathbf{e}_{K_1} = {}_l\mathbf{e}_K \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2}\,. \tag{26} $$

Далее покажем, что из алгебраической структуры множества векторов действия следуют квантовые дифференциальные операторы и задача на собственные значения для этих операторов, которая может рассматриваться как квантовый постулат.

VIII. УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Она проявляется в существовании для алгебр *уравнений структуры*. Далее рассмотрим уравнения структуры для алгебры действия фундаментальных объектов $\mathbb{S}$.

1. Дифференцирование по направлению

Дифференциал в алгебре $\mathbb{S}$ обозначим d. Базисные векторы $\mathbf{e}_K$ – величины постоянные в том смысле, что

$$ d\mathbf{e}_K = 0\,, $$

поэтому

$$ d\mathbf{S} = \mathbf{e}_K \cdot dS^K\,. $$

Наличие закона умножения заставляет ввести *дифференциал по направлению*. Так для правого умножения

$$ d_1\,{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}d\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2\,, \tag{27} $$

здесь дифференциал d_1 – дифференциал по направлению 1 – означает приращение вектора ${}_r\mathbf{S}$ при приращении вектора $\mathbf{S}_1$. Соответственно

$$ d_2\,{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_1 \circ d\mathbf{S}_2 \tag{28} $$

– дифференциал по направлению 2 – означает приращение вектора ${}_r\mathbf{S}$ при приращении вектора $\mathbf{S}_2$.

Аналогичные соотношения имеют место для левого умножения:

$$ d_1\,{}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_2 \circ d\mathbf{S}_1\,, \tag{29} $$

$$ d_2\,{}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}d\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1\,. \tag{30} $$

2. Уравнение структуры вблизи единицы алгебры

Рассматривая второй дифференциал от закона умножения, примем, что сначала дифференцирование выполняется по вектору $\mathbf{S}_1$, а затем по вектору $\mathbf{S}_2$.

2.1. Для правой алгебры

Для правого умножения имеем

$$ d_2d_1\,{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}d\mathbf{S}_1 \circ d\mathbf{S}_2\,. \tag{31} $$

Отсюда следует второй дифференциал от правого произведения координат векторов действия

$$ d_2d_1\,{}_rS^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot dS_1^{K_1} \cdot dS_2^{K_2}\,. \tag{32} $$

Вблизи единицы алгебры, в частности для $\mathbf{S}_2 \to S_0$, из выражения (27) имеем

$$ d\mathbf{S}_1 = d_1\,{}_r\mathbf{S}\,. \tag{33} $$

Вблизи единицы алгебры, в частности для $\mathbf{S}_1 \to S_0$, из выражения (28) имеем

$$d\mathbf{S}_2 = d_2\,{}_r\mathbf{S}\,. \tag{34}$$

Используя выражения (33) и (34) в соотношении (31), получим

$$d_2 d_1\,{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d_1\,{}_r\mathbf{S} \circ d_2\,{}_r\mathbf{S}\,. \tag{35}$$

Это соотношение называется *уравнением структуры* правой алгебры действия фундаментальных объектов ${}_r\mathbb{S}$, или просто *правым уравнением структуры*.

По отношению к координатам векторов правое уравнение структуры имеет вид

$$d_2 d_1\,{}_r S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot d_1\,{}_r S^{K_1} \cdot d_2\,{}_r S^{K_2}\,. \tag{36}$$

2.2. Для левой алгебры

Для левого умножения имеем

$$d_2 d_1\,{}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d\mathbf{S}_2 \circ d\mathbf{S}_1\,. \tag{37}$$

Отсюда следует второй дифференциал от левого произведения координат векторов действия

$$d_2 d_1\,{}_l S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot dS_1^{K_1} \cdot dS_2^{K_2}\,. \tag{38}$$

Вблизи единицы алгебры, в частности для $\mathbf{S}_2 \to S_0$, из соотношения (29) имеем

$$d\mathbf{S}_1 = d_1\,{}_l\mathbf{S}\,. \tag{39}$$

Вблизи единицы алгебры, в частности для $\mathbf{S}_1 \to S_0$, из соотношения (30) имеем

$$d\mathbf{S}_2 = d_2\,{}_l\mathbf{S}\,. \tag{40}$$

Используя равенства (39) и (40) в соотношении (37), получим

$$d_2 d_1\,{}_l\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d_2\,{}_l\mathbf{S} \circ d_1\,{}_l\mathbf{S}\,. \tag{41}$$

Это соотношение называется *уравнением структуры* левой алгебры действия фундаментальных объектов ${}_l\mathbb{S}$, или просто *левым уравнением структуры*. По отношению к координатам векторов левое уравнение структуры имеет вид

$$d_2 d_1\,{}_l S^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot d_1\,{}_l S^{K_1} \cdot d_2\,{}_l S^{K_2}\,. \tag{42}$$

3. Уравнение структуры в общем случае

Выведем уравнения структуры в общем случае (не вблизи единицы). Для этого из соотношения (27) выразим $\mathbf{S}_1$. Имеем

$$d_1\,{}_r\mathbf{S} \circ \mathbf{S}_2^{-1} = d\mathbf{S}_1 \circ \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_2^{-1}\,.$$

Отсюда

$$d_1\,{}_r\mathbf{S} \circ \mathbf{S}_2^{-1} = S_0 \cdot d\mathbf{S}_1$$

и

$$d\mathbf{S}_1 = \frac{1}{S_0} d_1\,{}_r\mathbf{S} \circ \mathbf{S}_2^{-1}\,.$$

Аналогично выводится

$$d\mathbf{S}_2 = \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_1^{-1} \circ d_2\,{}_r\mathbf{S}\,.$$

Подставляя полученные дифференциалы в равенство (31), получим

$$d_2 d_1\,{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}\frac{1}{S_0} d_1\,{}_r\mathbf{S} \circ \mathbf{S}_2^{-1} \circ \frac{1}{S_0}\mathbf{S}_1^{-1} \circ d_2\,{}_r\mathbf{S}$$

и окончательно с использованием

$$\frac{1}{S_0}\mathbf{S}_2^{-1} \circ \mathbf{S}_1^{-1} = {}_r\mathbf{S}^{-1}$$

получим

$$d_2 d_1\,{}_r\mathbf{S} = \frac{1}{(S_0)^2} d_1\,{}_r\mathbf{S} \circ {}_r\mathbf{S}^{-1} \circ d_2\,{}_r\mathbf{S}\,. \tag{43}$$

Это соотношение представляет собой правое уравнение структуры в общем случае. Аналогично выводится левое уравнение структуры в общем случае:

$$d_2 d_1\,{}_l\mathbf{S} = \frac{1}{(S_0)^2} d_2\,{}_l\mathbf{S} \circ {}_l\mathbf{S}^{-1} \circ d_1\,{}_l\mathbf{S}\,. \tag{44}$$

4. Правый и левый дифференциалы

Правый дифференциал определим следующим образом:

$${}_r d\mathbf{S} = \frac{1}{S_0}(\mathbf{S} + d\mathbf{S}) \circ \mathbf{S}^{-1} - S_0\,.$$

Отсюда

$${}_r d\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} d\mathbf{S} \circ \mathbf{S}^{-1}\,. \tag{45}$$

Отсюда следует соотношение, которое понадобится в дальнейшем

$${}_r d\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{S_0} d\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S}\,. \tag{46}$$

По отношению к координатам вектора правый дифференциал запишется в виде

$$ {}_r dS^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \cdot dS^{K_1} = {}_r\Omega^K{}_{K_1} \cdot dS^{K_1} \,, $$

где введено обозначение

$$ {}_r\Omega^K{}_{K_1} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_r C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \,. $$

Левый дифференциал определим следующим образом:

$$ {}_l d\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \mathbf{S}^{-1} \circ (\mathbf{S} + d\mathbf{S}) - S_0 \,. $$

Отсюда

$$ {}_l d\mathbf{S} = \frac{1}{S_0} \cdot \mathbf{S}^{-1} \circ d\mathbf{S} \,. \tag{47} $$

Отсюда следует соотношение, которое понадобится в дальнейшем

$$ {}_l d\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{S_0} \cdot \mathbf{S} \circ d\mathbf{S}^{-1} \,. \tag{48} $$

По отношению к координатам вектора левый дифференциал запишется в виде

$$ {}_l dS^K = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \cdot dS^{K_1} = {}_l\Omega^K{}_{K_1} \cdot dS^{K_1} \,, $$

где введено обозначение

$$ {}_l\Omega^K{}_{K_1} = \frac{1}{S_0} \cdot {}_l C^K{}_{K_1 K_2} \cdot (S^{-1})^{K_2} \,. $$

Установим связь между правым и левым дифференциалами. Для этого продифференцируем соотношение, определяющее обратный вектор действия

$$ \frac{1}{S_0} \mathbf{S} \circ \mathbf{S}^{-1} = S_0 \,. $$

Получим

$$ \frac{1}{S_0} d\mathbf{S} \circ \mathbf{S}^{-1} + \frac{1}{S_0} \mathbf{S} \circ d\mathbf{S}^{-1} = 0 \,. $$

Отсюда и из выражения (45)

$$ {}_r d\mathbf{S} = -\frac{1}{S_0} \mathbf{S} \circ d\mathbf{S}^{-1} \,. $$

Сравнивая правую часть равенства с соотношением (48), получим

$$ {}_r d\mathbf{S} = -\, {}_l d\mathbf{S}^{-1} \,. $$

Аналогично устанавливается связь между левым и правым дифференциалами. Для этого продифференцируем другое соотношение, определяющее обратный вектор действия,

$$ \frac{1}{S_0} \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S} = S_0 \,. $$

Получим

$$ \frac{1}{S_0} d\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S} + \frac{1}{S_0} \mathbf{S}^{-1} d \circ \mathbf{S} = 0 \,. $$

Отсюда и из равенства (47)

$$ {}_l d\mathbf{S} = -\frac{1}{S_0} d\mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{S} \,. $$

Сравнивая правую часть равенства с соотношением (46), получим

$$ {}_l d\mathbf{S} = -\, {}_r d\mathbf{S}^{-1} \,. $$

Таким образом, рассматривая алгебраические свойства действия, необходимо привлекать два типа векторов – правые и левые – и их дифференциалы.

IX. КВАНТОВЫЕ ПОСТУЛАТЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

1. Правые квантовые постулаты

Обратимся к правому уравнению структуры (35). В этом уравнении введем обозначение

$$ d_1\, {}_r\mathbf{S} = {}_r\psi \,. $$

Вектор ${}_r\psi$ назовем *правой волновой функцией* и отождествим его с обобщением волновой функции, вводимой в квантовой теории [10].

---

[10] Указанное определение волновой функции имеет тот недостаток, что конечная функция ψ отождествляется с дифференциалом. Этот недостаток устраняется следующим образом. Запишем

$$ d_1\mathbf{S} = \frac{d_1\mathbf{S}}{d_2 s} \cdot d_2 s \,, $$

где s скалярная величина, например интервал СТО. Теперь выражение (31) запишем следующим образом:

$$ d_2 \left(\frac{d_1\mathbf{S}}{d_2 s} \cdot d_2 s \right) = \frac{1}{\hbar} \cdot \left(\frac{d_1\mathbf{S}}{d_2 s} \cdot d_2 s \right) \circ d_2\mathbf{S} \,. $$

Введем волновую функцию следующим образом:

$$ \psi = \frac{d_1\mathbf{S}}{d_2 s} \,. $$

Тогда уравнение структуры приобретет вид

$$ d_2(\psi \cdot d_2 s) = \frac{1}{\hbar} \cdot \psi \circ d_2\mathbf{S} \cdot d_2 s \,. $$

Если учесть, что второй дифференциал от независимой переменной равен нулю

$$ d_2 d_2 s = 0 \,, $$

то уравнение структуры записывается следующим образом:

$$ d_2(\psi) \cdot d_2 s = \frac{1}{\hbar} \cdot \psi \circ d_2\mathbf{S} \cdot d_2 s $$

или

$$ d_2\psi = \frac{1}{\hbar} \cdot \psi \circ d_2\mathbf{S} \,. $$

Кроме того, введем обозначение d для дифференциала d_2, а также положим

$$S_0=\hbar\ -\ \text{постоянной Планка}\,.$$

Правое уравнение структуры в новых обозначениях принимает вид

$$d\,{}_r\psi=\frac{1}{\hbar}\,{}_r\psi\circ d\,{}_r\mathbf{S}\,. \tag{49}$$

Это уравнение можно записать для координат волновой функции ${}_r\psi^K=d_1\,{}_rS^K$:

$$d\,{}_r\psi^K=\frac{1}{\hbar}\,{}_rC^K{}_{K_1K_2}\cdot{}_r\psi^{K_1}\cdot d\,{}_rS^{K_2}\,. \tag{50}$$

Обратим внимание на то, что уравнение (50), как и квантовый постулат (12), представляет собой задачу на собственные значения дифференциального оператора d. На этом основании будем рассматривать уравнения (49) и (50) как обобщение квантового постулата, используемого в квантовой теории. Для того, чтобы выявить конкретное содержание квантового постулата (49), (50), учтем, что координаты правого вектора действия зависят от коэффициентов разложения координат универсальной контравариантной алгебры искривленного пространства-времении в ряд Тейлора – правых кинематических переменных (параметров поля внутренней симметрии)

$${}_rS^K={}_rS^K\left(Y^I(x)\,,\ L^I_K(x)\,,\ L^I_{K_1K_2}(x)\right)\,.$$

Соответственно правая волновая функция таким же образом зависит от параметров поля внутренней симметрии

$${}_r\psi^K={}_r\psi^K\left(Y^I(x)\,,\ L^I_K(x)\,,\ L^I_{K_1K_2}(x)\right)\,.$$

Рассмотрим частные производные от ${}_rS^K$ и ${}_r\psi^K$ по параметрам поля внутренней симметрии и соответствующие им квантовые постулаты.

1. Частное дифференцирование по Y^I.

Из выражения (50) имеем

$$\frac{\partial\,{}_r\psi^K}{DY^I}L^I_{K_3}=\frac{1}{\hbar}\,{}_rC^K{}_{K_1K_2}\cdot\frac{\partial\,{}_rS^{K_2}}{DY^I}\cdot L^I_{K_3}\cdot{}_r\psi^{K_1}\,.$$

Из Раздела I.2 Главы 3.2 имеем

$$\frac{\partial\,{}_rS^{K_2}}{DY^I}\cdot L^I_{K_3}=-Q^{K_2}{}_{K_3}$$

– заряд фундаментального объекта. Учитывая это обстоятельство, получим квантовый постулат для заряда фундаментального объекта

$$\frac{\partial\,{}_r\psi^K}{DY^I}\cdot L^I_{K_3}=-\frac{1}{\hbar}\cdot{}_rC^K{}_{K_1K_2}\cdot Q^{K_2}{}_{K_3}\cdot{}_r\psi^{K_1}\,. \tag{51}$$

2. Частное дифференцирование по $L^I_{K_4}$.

Из выражения (50) имеем

$$\frac{\partial\,{}_r\psi^K}{DL^I_{K_4}}\cdot L^I_{K_3}=\frac{1}{\hbar}\cdot{}_rC^K{}_{K_1K_2}\cdot\frac{\partial\,{}_rS^{K_2}}{DL^I_{K_4}}\cdot L^I_{K_3}\cdot{}_r\psi^{K_1}\,.$$

Из Раздела I.2 Главы 3.2 имеем

$$\frac{\partial\,{}_rS^{K_2}}{DL^I_{K_4}}\cdot L^I_{K_3}=-I^{K_2K_4}{}_{K_3}$$

– ток фундаментального объекта. Учитывая это обстоятельство, получим квантовый постулат для тока фундаментального объекта

$$\frac{\partial\,{}_r\psi^K}{DL^I_{K_4}}\cdot L^I_{K_3}=-\frac{1}{\hbar}\cdot{}_rC^K{}_{K_1K_2}\cdot I^{K_2K_4}{}_{K_3}\cdot{}_r\psi^{K_1}\,. \tag{52}$$

3. Аналогично получается квантовый постулат для второго тока фундаментального объекта.

2. Левые квантовые постулаты

Обратимся к левому уравнению структуры (41). В этом уравнении введем обозначение

$$d_1\,{}_l\mathbf{S}={}_l\psi\,.$$

Вектор ${}_l\psi$ назовем *левой волновой функцией* и также отождествим его с обобщением волновой функции, вводимой в квантовой теории. Кроме того, введем обозначение d для дифференциала d_2, а также положим

$$S_0=\hbar\ -\ \text{постоянной Планка}\,.$$

Левое уравнение структуры в новых обозначениях принимает вид

$$d\,{}_l\psi=\frac{1}{\hbar}\,{}_l\psi\circ dS\,. \tag{53}$$

Это уравнение можно записать для координат волновой функции ${}_l\psi^K=d_1\,{}_lS^K$:

$$d\,{}_l\psi^K=\frac{1}{\hbar}\,{}_lC^K{}_{K_1K_2}\cdot{}_l\psi^{K_1}\cdot d\,{}_lS^{K_2}\,. \tag{54}$$

Обратим внимание на то, что уравнение (54), как и квантовый постулат (12), представляет собой задачу на собственные значения дифференциального оператора d. На этом основании будем также рассматривать уравнения (53) и (54) как обобщение квантового постулата, используемого в квантовой теории. Для того, чтобы выявить конкретное содержание квантового постулата (53), (54), учтем, что координаты левого вектора действия зависят от коэффициентов разложения координат универсальной контравариантной алгебры искривленного пространства-времении в ряд Тейлора (параметров поля)

$${}_lS^K={}_lS^K\left(y^I(x)\,,\ l^I_K(x)\,,\ l^I_{K_1K_2}(x)\right)\,.$$

Соответственно левая волновая функция таким же образом зависит от параметров поля

$$ {}_l\psi^K = {}_l\psi^K \left(y^I(x)\,,\ l^I_K(x)\,,\ l^I_{K_1K_2}(x) \right)\,. $$

Рассмотрим частные производные от ${}_lS^K$ и ${}_l\psi^K$ по параметрам поля и соответствующие им квантовые постулаты.

1. Частное дифференцирование по y^I.

Из выражения (54) имеем

$$ \frac{\partial\,{}_l\psi^K}{Dy^I} l^I_{K_3} = \frac{1}{\hbar}\,{}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot \frac{\partial\,{}_lS^{K_2}}{Dy^I} l^I_{K_3} \cdot {}_l\psi^{K_1}\,. $$

Из Раздела I.1. Главы 3.2 имеем

$$ \frac{\partial\,{}_lS^{K_2}}{Dy^I} l^I_{K_3} = -T^{K_2}{}_{K_3} $$

– тензор энергии-импульса фундаментального объекта. Учитывая это обстоятельство, получим квантовый постулат для энергии-импульса фундаментального объекта

$$ \frac{\partial\,{}_l\psi^K}{Dy^I} l^I_{K_3} = -\frac{1}{\hbar}\,{}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot T^{K_2}{}_{K_3} \cdot {}_l\psi^{K_1}\,. \tag{55} $$

2. Частное дифференцирование по $l^I_{K_4}$.

Из выражения (54) имеем

$$ \frac{\partial\,{}_l\psi^K}{Dl^I_{K_4}} \cdot l^I_{K_3} = \frac{1}{\hbar} \cdot {}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot \frac{\partial\,{}_lS^{K_2}}{Dl^I_{K_4}} l^I_{K_3} \cdot {}_l\psi^{K_1}\,. $$

Из Раздела I.1. Главы 3.2 имеем

$$ \frac{\partial\,{}_lS^{K_2}}{{}_lDl^I_{K_4}} \cdot l^I_{K_3} = -m^{K_2K_4}{}_{K_3} $$

– момент фундаментального объекта. Учитывая это обстоятельство, получим квантовый постулат для момента фундаментального объекта

$$ \frac{\partial\,{}_l\psi^K}{Dl^I_{K_4}} \cdot l^I_{K_3} = -\frac{1}{\hbar}\,{}_lC^K{}_{K_1K_2} \cdot m^{K_2K_4}{}_{K_3} \cdot {}_l\psi^{K_1}\,. \tag{56} $$

3. Аналогично получается квантовый постулат для второго момента фундаментального объекта.

Заканчивая этот Раздел, отметим следующее.

1. Квантование (дискретность) физических величин объясняется алгебраической структурой множества векторов действия.

2. Квантовые постулаты есть не что иное, как уравнения структуры алгебры действия.

3. Ключевая характеристика, предназначенная для описания квантовых явлений, – волновая функция – это дифференциал вектора действия.

3. Обобщенное уравнение Дирака

Приведем вывод уравнения Дирака, исходя из условия, что множество векторов действия составляет правую алгебру. Для этого воспользуемся уравнением структуры (50) и запишем его в следующем виде:

$$ \frac{\partial\,{}_r\psi^K}{\partial x^{K_3}} = \frac{1}{\hbar} \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot \frac{\partial\,{}_rS^{K_2}}{\partial x^{K_3}} \cdot {}_r\psi^{K_1} \tag{57} $$

– и умножим его на ковариантные структурные матрицы ${}_lC^{K_3K_4}{}_K$, сворачивая индексы K_3 и K,

$$ {}_lC^{K_3K_4}{}_K \frac{\partial\,{}_r\psi^K}{\partial x^{K_3}} = \frac{1}{\hbar}\,{}_lC^{K_3K_4}{}_K \cdot {}_rC^K{}_{K_1K_2} \cdot \frac{\partial\,{}_rS^{K_2}}{\partial x^{K_3}} \cdot {}_l\psi^{K_1}\,. $$

Далее остановимся на частном случае

$$ \frac{\partial\,{}_rS^{K_2}}{\partial x^{K_3}} \to \frac{\partial S^0}{\partial x^0} = -m \cdot c\,. $$

Тогда уравнение упрощается:

$$ {}_lC^{K_3K_4}{}_K \frac{\partial\,{}_r\psi^K}{\partial x^{K_3}} = \frac{1}{\hbar}\,{}_lC^{0K_4}{}_K \cdot {}_rC^K{}_{K_10} \cdot \frac{\partial S^0}{\partial x^0} \cdot {}_r\psi^{K_1}\,. $$

Учитывая, что

$$ {}_lC^{0K_4}{}_K = \delta^{K_4}_K\,, \quad {}_rC^K{}_{K_10} = \delta^K{}_{K_1}\,, $$

получим *обобщенное уравнение Дирака*

$$ {}_lC^{K_3K_4}{}_K \frac{\partial\,{}_r\psi^K}{\partial x^{K_3}} = -\frac{m \cdot c}{\hbar} \cdot {}_r\psi^{K_4}\,, \tag{58} $$

которое сводится к уравнению Дирака в том случае, если алгебра действия сводится к алгебре Клиффорда, а суммирование по индексу K_3 ограничивается четырехмерным пространством-временем.

Приведем другой вывод уравнения Дирака. Запишем правое уравнение структуры (49), используя оператор *набла*[11], в следующем виде:

$$ {}_r\psi \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{dS}{ds} \cdot {}_r\psi\,. \tag{59} $$

Здесь

$$ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^I} \cdot {}_l\mathbf{E}^I $$

– оператор *набла*, действующий на векторную функцию ${}_r\psi$, а

$$ \frac{dS}{ds} = -m\,c\,. $$

Умножим выражение (59) справа на базисный вектор ${}_l\mathbf{E}^K$

$$ \left({}_r\psi \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \circ {}_l\mathbf{E}^K = -\frac{m\,c}{\hbar}\,{}_r\psi \circ {}_l\mathbf{E}^K $$

---

[11] Оператор набла рассмотрен в Разделе III.3.2. Главы 1.6.

и учтем ассоциативность универсального умножения

$$ {}_r\psi \circ \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \circ {}_l\mathbf{E}^K \right) = -\frac{m\,c}{\hbar}\ {}_r\psi \circ {}_l\mathbf{E}^K \,. $$

В это уравнение подставим выражение оператора набла через координаты

$$ \frac{\partial\, {}_r\psi}{\partial x^I} \circ \left({}_l\mathbf{E}^I \circ {}_r\mathbf{E}^K \right) = -\frac{m\,c}{\hbar}\ {}_r\psi \circ {}_l\mathbf{E}^K \,. $$

Далее учтем, что произведение ${}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K$ выражается через структурные матрицы

$$ {}_l\mathbf{E}^I \circ {}_l\mathbf{E}^K = {}_lC^{IK}{}_L \cdot {}_l\mathbf{E}^L \,, $$

$$ {}_lC^{IK}{}_L \cdot \frac{\partial\, {}_r\psi}{\partial x^I} \circ {}_l\mathbf{E}^L = -\frac{m\,c}{\hbar}\ {}_r\psi \circ {}_l\mathbf{E}^K \,. $$

Подставим сюда выражение волновой функции через координаты

$$ {}_r\psi = {}_r\mathbf{e}_M \cdot {}_r\psi^M \,, $$

$$ {}_lC^{IK}{}_L \cdot \frac{\partial\, {}_r\psi^M}{\partial x^I} \cdot \left({}_r\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{E}^L \right) = -\frac{m\,c}{\hbar} \cdot {}_r\psi^M \cdot {}_r\left(\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{E}^K \right) . $$

Учитывая, что

$$ {}_r\mathbf{e}_M \circ {}_l\mathbf{E}^L = {}_r\mathbf{e}_M \cdot {}_l\mathbf{E}^L = \delta^L_M \,, $$

получим уравнение

$$ {}_lC^{IK}{}_L \cdot \frac{\partial\, {}_r\psi^L}{\partial x^I} = -\frac{m\,c}{\hbar} \cdot {}_r\psi^K \,, $$

которое сводится к классическому уравнению Дирака в том случае, если универсальная алгебра сводится к алгебре Клиффорда, а суммирование по индексу I ограничивается четырехмерным пространством-временем.

Отметим, что уравнение Дирака, а вместе с ним и вся квантовая механика, сформулированы по отношению к правой волновой функции фундаментального объекта. Вместе с тем лево-правая симметрия алгебры действия фундаментального объекта подталкивает к тому, чтобы записать аналог уравнения Дирака для левой волновой функции фундаментального объекта. Такое уравнение записано в следующем Разделе и в Разделе IX Главы 4.3.

4. К выводу уравнения Дирака

В предыдущем Разделе дан вывод уравнения Дирака, исходя из правил умножения векторов в универсальной контравариантной алгебре и универсальной ковариантной алгебре (алгебре фундаментальных объектов и антиобъектов). Этот вывод можно сделать более прозрачным и точным, если рассмотреть универсальное умножение контравариантных и ковариантных векторов в полном объеме. Обратимся к универсальному умножению контравариантных базисных векторов $\mathbf{e}_K$ и ковариантных базисных векторов $\mathbf{E}^I$. В предыдущем Разделе мы использовали только скалярную часть универсального произведения этих векторов. То есть, мы рассмотрели

$$ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I \equiv \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{E}^I = \delta^I_K \,. $$

Но согласно общему определению универсального произведения оно помимо скалярного произведения содержит векторное и тензорное произведения. Тензорное умножение (и его результат – тензорное произведение) здесь рассматриваться не будет, так как оно выводит нас за пределы алгебры фундаментальных объектов и антиобъектов[12]. Здесь остановимся на векторном произведении векторов $\mathbf{e}_K$ и $\mathbf{E}^I$. Или

$$ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I \equiv \mathbf{e}_K \times \mathbf{E}^I \,. \tag{60} $$

Это произведение можно рассматривать двояким образом.

а) Вектор $\mathbf{e}_K$ умножается на вектор $\mathbf{E}^I$ *слева*. Тогда

$$ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I = {}_lC^I{}_{LK} \cdot \mathbf{E}^L \,. \tag{61} $$

Напомним, что в этом случае индекс K нумерует структурные матрицы, индекс I нумерует строки матриц, индекс L нумерует столбцы матриц.

б) Это же произведение (60) можно рассматривать иначе: вектор $\mathbf{E}^I$ умножается на вектор $\mathbf{e}_K$ *справа*.

$$ \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I = \mathbf{e}_L \cdot {}_rC^{IL}{}_K \,. \tag{62} $$

Здесь индекс I нумерует структурные матрицы, индекс L нумерует строки матриц, индекс K нумерует столбцы матриц.

Сравнивая выражения (61) и (62), получим

$$ {}_lC^I{}_{LK} \cdot \mathbf{E}^L = \mathbf{e}_L \cdot {}_rC^{IL}{}_K \,. $$

Остановимся на произведении

$$ \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K \equiv \mathbf{E}^I \times \mathbf{e}_K \,. \tag{63} $$

Это произведение также можно рассматривать двояким образом.

а) Вектор $\mathbf{E}^I$ умножается на вектор $\mathbf{e}_K$ *слева*. Тогда

$$ \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = \mathbf{e}_L \cdot {}_lC^{IL}{}_K \,. \tag{64} $$

б) Это же произведение (63) можно рассматривать иначе: вектор $\mathbf{e}_K$ умножается на вектор $\mathbf{E}^I$ *справа*.

$$ \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K = {}_rC^I{}_{LK} \cdot \mathbf{E}^L \,. \tag{65} $$

Сравнивая выражения (64) и (65), получим

$$ \mathbf{e}_L \cdot {}_lC^{IL}{}_K = {}_rC^I{}_{LK} \cdot \mathbf{E}^L \,. $$

[12] Тензорное произведение в составе универсального произведения $\mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I$ рассмотрено в Разделе III.3 Главы 1.6.

4.1. Уравнение Дирака для фундаментального объекта

Обратимся теперь к выводу уравнения Дирака, рассматривая действие слева оператора набла на волновую функцию

$$\nabla \circ \psi = \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K \cdot \frac{\partial \psi^K}{\partial x^I}\,.$$

Используя (64), получим

$$\nabla \circ \psi = \mathbf{e}_L \cdot {}_l C^{IL}{}_K \cdot \frac{\partial \psi^K}{\partial x^I}\,. \tag{66}$$

Воспользуемся вышеприведенным соотношением для вывода уравнения Дирака для фундаментального объекта из уравнения структуры

$$d\psi = \frac{1}{S_0}\psi \circ d\mathbf{S}\,,$$

или

$$d\psi = \frac{1}{S_0}\,{}_r C^K{}_{PQ} \cdot dS^Q \cdot \psi^P \cdot \mathbf{e}_K\,.$$

От этого уравнения перейдем к уравнению, в котором вместо дифференциала d используется оператор набла

$$\nabla \circ \psi = \frac{1}{S_0}\nabla(S^Q) \circ \mathbf{e}_K \cdot {}_r C^K{}_{PQ} \cdot \psi^P\,, \tag{67}$$

или

$$\nabla \circ \psi = \frac{1}{S_0}\mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K \cdot {}_r C^K{}_{PQ} \cdot \frac{\partial S^Q}{\partial x^I} \cdot \psi^P\,,$$

Учитывая (66) и (64), получим обобщенное уравнение Дирака для фундаментального объекта

$${}_l C^{IL}{}_K \cdot \frac{\partial \psi^K}{\partial x^I} = \frac{1}{S_0}\,{}_l C^{IL}{}_K \cdot {}_r C^K{}_{PQ} \cdot \frac{\partial S^Q}{\partial x^I} \cdot \psi^P\,. \tag{68}$$

После ранее указанных ограничений оно сводится к классическому уравнению Дирака.

Уравнение (68) сформулировано по отношению к правой волновой функции, поэтому назовем это уравнение *правым* уравнением Дирака в отличие от того уравнения, которое будет рассмотрено далее.

4.2. Левое уравнение Дирака для фундаментального антиобъекта

Обратимся теперь к выводу уравнения, которое сформулировано по отношению к левой волновой функции и которое мы назвали левым уравнением Дирака для фундаментального антиобъекта. Предварительно рассмотрим сопряженное выражение от действия слева оператора набла на волновую функцию

$$(\nabla \circ \psi)^* = \psi^* \circ \nabla^* = \frac{\partial \psi_I}{\partial x_K} \cdot \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K\,.$$

Используя (65), получим

$$(\nabla \circ \psi)^* = \frac{\partial \psi_I}{\partial x_K} \cdot {}_r C^I{}_{LK} \cdot \mathbf{E}^L\,. \tag{69}$$

Воспользуемся вышеприведенным соотношением для вывода девого уравнения Дирака для фундаментального антиобъекта из уравнения (67), переходя от этого уравнения к уравнению ему сопряженному

$$(\nabla \circ \psi)^* = \frac{1}{S_0}(\nabla(S^Q) \circ \mathbf{e}_K \cdot {}_r C^K{}_{PQ} \cdot \psi^P)^*\,.$$

или

$$(\nabla \circ \psi)^* = \frac{1}{S_0}\psi_P \cdot \frac{\partial S_Q}{\partial x_K} \cdot {}_l C^{QP}{}_I \cdot \mathbf{E}^I \circ \mathbf{e}_K\,.$$

Учитывая (69) и (65), получим левое уравнение Дирака для фундаментального антиобъекта

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial x_K} \cdot {}_r C^I{}_{LK} = \frac{1}{S_0}\psi_P \cdot \frac{\partial S_Q}{\partial x_K} \cdot {}_l C^{QP}{}_I \cdot {}_r C^I{}_{LK}\,. \tag{70}$$

В современной физике это уравнение не используется.

4.3. Правое уравнение Дирака для фундаментального антиобъекта

Обратимся теперь к выводу уравнения, которое назовем правым уравнением Дирака для фундаментального антиобъекта. Предварительно рассмотрим выражение

$$(\psi \circ \nabla)^* = \nabla^* \circ \psi^* = \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I \cdot \frac{\partial \psi_I}{\partial x_K}\,.$$

Используя (61), получим

$$\nabla^* \circ \psi^* = {}_l C^I{}_{LK} \cdot \frac{\partial \psi_I}{\partial x_K} \cdot \mathbf{E}^L\,. \tag{71}$$

Воспользуемся вышеприведенным соотношением для вывода правого уравнения Дирака для фундаментального антиобъекта из уравнения структуры

$$d\psi^* = \frac{1}{S_0}\psi^* \circ d\mathbf{S}^*\,,$$

или

$$d\psi^* = \frac{1}{S_0}\,{}_r C^{QP}{}_I \cdot dS_Q \cdot \psi_P \cdot \mathbf{E}^I\,.$$

От этого уравнения перейдем к уравнению, в котором вместо дифференциала d используется оператор набла ∇^*

$$\nabla^* \circ \psi^* = \frac{1}{S_0}\nabla^*(S_Q) \circ \mathbf{E}^I \cdot {}_r C^{QP}{}_I \cdot \psi_P\,, \tag{72}$$

или

$$\nabla^* \circ \psi^* = \frac{1}{S_0} \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I \cdot {}_rC^{QP}{}_I \cdot \frac{\partial S_Q}{\partial x_K} \cdot \psi_P \,.$$

Учитывая (71) и (61), получим правое уравнение Дирака для фундаментального антиобъекта

$$_lC^I{}_{LK} \cdot \frac{\partial \psi_I}{\partial x_K} = \frac{1}{S_0}\, {}_lC^I{}_{LK} \cdot {}_rC^{QP}{}_I \cdot \frac{\partial S_Q}{\partial x_K} \cdot \psi_P \,. \qquad (73)$$

После ранее указанных ограничений оно сводится к классическому уравнению Дирака для античастицы.

4.4. Левое уравнение Дирака для фундаментального объекта

Обратимся теперь к выводу уравнения, которое назовем левым уравнением Дирака для фундаментального объекта. Предварительно рассмотрим следующее выражение:

$$((\psi \circ \nabla)^*)^* = (\nabla^* \circ \psi^*)^* = \psi \circ \nabla = \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I \cdot \frac{\partial \psi^K}{\partial x^I} \,.$$

Используя (62), получим

$$\psi \circ \nabla = \mathbf{e}_L \cdot {}_rC^{IL}{}_K \cdot \frac{\partial \psi^K}{\partial x^I} \,. \qquad (74)$$

Воспользуемся вышеприведенным соотношением для вывода левого уравнения Дирака для фундаментального объекта из уравнения (72), переходя от этого уравнения к уравнению ему сопряженному

$$(\nabla^* \circ \psi^*)^* = \frac{1}{S_0} (\nabla^*(S_Q) \circ \mathbf{E}^I \cdot {}_rC^{QP}{}_I \cdot \psi_P)^* \,,$$

или

$$\psi \circ \nabla = \frac{1}{S_0} \psi^P \cdot {}_lC^K{}_{PQ} \cdot \mathbf{e}_K \circ \mathbf{E}^I \cdot \frac{\partial S^Q}{\partial x^x} \,.$$

Учитывая (74) и (62), получим левое уравнение Дирака для фундаментального объекта

$$_rC^{IL}{}_K \cdot \frac{\partial \psi^K}{\partial x^I} = \frac{1}{S_0}\, {}_rC^{IL}{}_K \cdot {}_lC^K{}_{PQ} \cdot \frac{\partial S^Q}{\partial x^I} \cdot \psi^P \,. \qquad (75)$$

В современной физике это уравнение не используется. На этом мы закончим вывод разновидностей уравнения Дирака.

Следующий шаг состоит в том, чтобы конкретизировать уравнение Дирака для каждого типа фундаментальных частиц. Конкретизация уравнения Дирака связана с выделением подалгебр из универсальной алгебры действия, которые ставятся в соответствие типам фундаментальных частиц. Указанные подалгебры рассмотрены в Главе 3.4.

В следующем Разделе рассмотрим простейший случай алгебры действия, изоморфной алгебре действительных чисел.

X. ПРОСТЕЙШАЯ АЛГЕБРА ДЕЙСТВИЯ

Вернемся к действию нерелятивистской частицы в потенциальном поле, рассмотренному в Разделе II. В этом случае действие есть скалярная величина, значениями которой являются действительные числа. Поставим в соответствие этому случаю простейшую алгебру действия, когда в организации алгебры образующее пространство не рассматривается (размерность образующего пространства равна нулю). Тогда размерность алгебры действия

$$N = 2^0 = 1$$

и алгебра действия изоморфна алгебре действительных чисел

$$\mathbb{S} = S$$

с умножением

$$S = \frac{1}{S_0} \cdot S_2 \cdot S_1 \,.$$

1. Уравнения структуры простейшей алгебры действия

В рассматриваемом случае уравнение структуры сводится с следующему соотношению[13]:

$$d_2 d_1 S = \frac{1}{S_0} \cdot d_2 S \cdot d_1 S \,.$$

Отождествим дифференциал d_2 с дифференциалом d, а дифференциал d_1 с вариацией δ, рассмотренными в Разделе II. Получим уравнение структуры в следующем виде:

$$d\delta S = \frac{1}{S_0} \cdot dS \cdot \delta S \,. \qquad (76)$$

В соответствии с выражением (4)

$$dS = \Big(\frac{m}{2} \cdot \Big(\frac{dx^a \cdot dx_a}{dt^2}\Big) - U(x)\Big) \cdot dt \,,$$

в соответствии с выражением (7)

$$\delta S = -\int \Big(m \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\Big) \cdot \delta x^a \cdot dt \,,$$

а

$$d\delta S = -\Big(m \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} + \frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\Big) \cdot \delta x^a \cdot dt \,.$$

---

[13] Алгебра коммутативна, поэтому разделение умножения на правое и левое отсутствует.

Подставляя вышеуказанные дифференциалы в уравнение структуры (76), получим

$$\Big(m\cdot\frac{d^2x_a}{dt^2}+\frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\Big)\cdot\delta x^a = \\ =\frac{1}{S_0}\cdot\Big(\frac{m}{2}\cdot\Big(\frac{dx^c\cdot dx_c}{dt}\Big)-U(x)\Big)\times \\ \times\int\Big(m\cdot\frac{d^2x_b}{dt^2}+\frac{\partial U(x)}{\partial x^b}\Big)\cdot\delta x^b\cdot dt \tag{77}$$

Перейдем к определению волновой функции в простейшей алгебре действия. Для этого уравнение структуры (76) запишем в следующем виде[14]:

$$d\frac{\delta S}{dt}=\frac{1}{S_0}\cdot dS\cdot\frac{\delta S}{dt}$$

и введем волновую функцию Ψ в соответствии с определением

$$\Psi=-\frac{\delta S}{dt}=\int\Big(m\cdot\frac{d^2x_a}{dt^2}+\frac{\partial U(x)}{\partial x^a}\Big)\cdot\frac{\delta x^a}{dt}\cdot dt\,.$$

Волновая функция имеет размерность энергии (Н·м). Используя волновую функцию, получим уравнение структуры в следующем виде

$$d\Psi=\frac{1}{S_0}\cdot dS\cdot\Psi\,. \tag{78}$$

После интегрирования этого уравнения получим

$$C+\ln\left(\frac{\Psi}{\Psi_0}\right)=\frac{1}{S_0}\cdot S\,, \tag{79}$$

или

$$C+\ln\Big(\frac{1}{\Psi_0}\cdot\int\Big(m\cdot\frac{d^2x_b}{dt^2}+\frac{\partial U(x)}{\partial x^b}\Big)\cdot\frac{\delta x^b}{dt}\cdot dt\Big)= \\ =\frac{1}{S_0}\cdot\int\Big(\frac{m}{2}\cdot\Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt}\Big)-U(x)\Big)\cdot dt\equiv\frac{S}{S_0}\,.$$

Здесь C и Ψ_0 постоянные интегрирования. Постоянная C безразмерна, постоянная Ψ_0 имеет размерность энергии (Н·м). Взяв экспоненту от левой и правой части уравнения (79), получим

$$\frac{C_1}{\Psi_0}\cdot\Psi=\exp\Big(\frac{S}{S_0}\Big)\,, \tag{80}$$

или

$$\frac{C_1}{\Psi_0}\cdot\int\Big(m\cdot\frac{d^2x_b}{dt^2}+\frac{\partial U(x)}{\partial x^b}\Big)\cdot\frac{\delta x^b}{dt}\cdot dt=\exp\Big(\frac{S}{S_0}\Big)\,.$$

Здесь $C_1=\exp(C)$. После дифференцирования (80), получим[15]

$$\frac{C_1}{\Psi_0}\cdot\frac{d\Psi}{dt}=\frac{L}{S_0}\exp\Big(\frac{S}{S_0}\Big)\,.$$

Отсюда имеем

$$\Big(m\cdot\frac{d^2x_b}{dt^2}+\frac{\partial U(x)}{\partial x^b}\Big)\cdot\frac{\delta x^b}{dt}=\frac{\Psi_0\cdot L}{C_1\cdot S_0}\exp\Big(\frac{S}{S_0}\Big)\,. \tag{81}$$

Это уравнение обобщает второй закон Ньютона на квантовые явления. Уравнение структуры (76) обобщает принцип наименьшего действия, который может быть сведен к соотношению

$$d\delta S=0\,.$$

Принцип наименьшего действия осуществляется только в том случае, когда алгебраические свойства действия не рассматриваются. Отсюда следует, что квантовые уравнения необходимо получать не путем "квантования" классических уравнений, то есть путем замены физических величин их квантовыми операторами, а путем перехода от принципа наименьшего действия к уравнениям структуры алгебры действия.

1.1. Квантовые постулаты для простейшей алгебры действия

Волновая функция Ψ зависит от геометрических координат и времени

$$\Psi=\Psi(x^1,\,x^2,\,x^3,\,t)\,,$$

поэтому полный дифференциал по времени d от волновой функции записывается через частные дифференциалы d_{x^1}, d_{x^2}, d_{x^3}, d_t

$$d\Psi(x^1(t),\,x^2(t),\,x^3(t),\,t)=d_{x^1}\Psi(x^1(t),\,x^2,\,x^3,\,c_t)+ \\ +d_{x^2}\Psi(x^1,\,x^2(t),\,x^3,\,c_t)+d_{x^3}\Psi(x^1,\,x^2,\,x^3(t),\,c_t)+ \\ +d_t\Psi(x^1,\,x^2,\,x^3,\,t)\,.$$

Или в компактной записи

$$d\Psi=d_{x^1}\Psi+d_{x^2}\Psi+d_{x^3}\Psi+d_t\Psi\,.$$

Учитывая, что в соответствии с соотношением (8)

$$dS=p_1\cdot dx^1+p_2\cdot dx^2+p_3\cdot dx^3-H\cdot dt\,,$$

---

[14] Здесь учтено, что при дифференцировании дифференциал от независимой переменной можно рассматривать как постоянную величину. Действительно,

$$\frac{d}{dt}dt=0\,.$$

[15] Напомним, что здесь L – функция Лагранжа

$$L=m\cdot\Big(\frac{dx^a\cdot dx_a}{dt}\Big)-U(x^a)\,.$$

запишем уравнения структуры (78) в следующем виде:

$$d_{x^1}\Psi + d_{x^2}\Psi + d_{x^3}\Psi + d_t\Psi = \\ = \frac{1}{S_0}\cdot(p_1\cdot dx^1 + p_2\cdot dx^2 + p_3\cdot dx^3 - H\cdot dt)\cdot\Psi\,.$$

Это уравнение распадается на четыре квантовых постулата для простейшей алгебры действия

$$d_{x^1}\Psi = \frac{1}{S_0}\cdot p_1\cdot dx^1\cdot\Psi\,,$$
$$d_{x^2}\Psi = \frac{1}{S_0}\cdot p_2\cdot dx^2\cdot\Psi\,,$$
$$d_{x^3}\Psi = \frac{1}{S_0}\cdot p_3\cdot dx^3\cdot\Psi\,,$$
$$d_t\Psi = -\frac{1}{S_0}\cdot H\cdot dt\cdot\Psi\,. \qquad (82)$$

2. Правило Тициуса-Боде

Правило Тициуса-Боде устанавливает закономерность, которой подчиняются радиусы орбит планет (спутников), вращающихся вокруг центрального массивного тела. При этом предполагается, что орбиты представляют собой лежащие в одной плоскости концентрические окружности.

В общем случае правило Тициуса-Боде можно записать в следующем виде:

$$r_n = C_1\cdot(C_2)^n\,. \qquad (83)$$

Здесь n – натуральные числа ($n = 0, 1, 2, 3, ...$), нумерующие планеты (спутники), r_n – радиусы соответствующих орбит планет (спутников) в относительных единицах, коэффициенты C_1 и C_2 подбираются из условия наилучшего приближения вычисленных радиусов к наблюдаемым значениям.

Далее покажем, что представление о простейшей алгебре действия позволяет *вывести* правило Тициуса-Боде (83). Для вывода правила Тициуса-Боде нам понадобятся сведения о параметрах движения массивной точки вокруг центрального массивного тела.

2.1. Движение массивной точки вокруг центрального массивного тела

Рассмотрим движение массивной точки вокруг центрального массивного тела. При этом будем исходить из того, что орбитой, по которой движется массивная точка, является окружность.

Запишем дифференциал действия (8) для декартовой плоскости с координатами x и y

$$dS = p_x\cdot dx + p_y\cdot dy - E\cdot dt\,.$$

Здесь[16]

$$p_x = m\cdot\frac{dx}{dt} = m\cdot\dot{x},\quad p_y = m\cdot\frac{dy}{dt} = m\cdot\dot{y},$$
$$E(\dot{x},\dot{y},x,y) = \frac{m}{2}\cdot\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) - \gamma\frac{m\cdot M}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ = \frac{m}{2}\cdot(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \gamma\frac{m\cdot M}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

где M – масса центрального тела, γ – гравитационная постоянная.

Нашу задачу удобно решать в полярных координатах (r, φ), к которым перейдем в соответствии с преобразованиями

$$\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi\,, & \dot{x} &= \dot{r}\cdot\cos\varphi - r\cdot\sin\dot{\varphi}\,,\\ y &= r\cdot\sin\varphi\,, & \dot{y} &= \dot{r}\cdot\sin\varphi + r\cdot\cos\dot{\varphi}\,. \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} dx &= dr\cdot\cos\varphi - r\cdot\sin d\varphi\,,\\ dy &= dr\cdot\sin\varphi + r\cdot\cos d\varphi\,. \end{aligned}$$

Выражение $p_x\cdot dx + p_y\cdot dy$ в полярных координатах приобретает вид:

$$p_x\cdot dx + p_y\cdot dy = (m\cdot\dot{x})\cdot dx + (m\cdot\dot{y})\cdot dy = \\ = (m\cdot\dot{r})\cdot dr + (m\cdot r^2\cdot\dot{\varphi})\cdot dy = p_r\cdot dr + p_\varphi\cdot d\varphi\,.$$

Таким образом, для компонент импульса в полярных координатах имеем

$$p_r = m\cdot\dot{r} = m\cdot\frac{dr}{dt},\quad p_\varphi = m\cdot r^2\cdot\dot{\varphi} = m\cdot r^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}\,. \qquad (84)$$

Выражение для энергии в полярных координатах приобретает вид:

$$E(\dot{x},\dot{y},x,y) = \frac{m}{2}\cdot(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \gamma\frac{m\cdot M}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ = \frac{m}{2}\cdot(\dot{r}^2 + r^2\cdot\dot{\varphi}^2) - \gamma\frac{m\cdot M}{r} = E(\dot{r},\dot{\varphi},r,\varphi) \qquad (85)$$

В результате дифференциал действия в полярных координатах выглядит следующим образом:

$$dS = p_r\cdot dr + p_\varphi\cdot d\varphi - E(\dot{r},\dot{\varphi},r,\varphi)\cdot dt\,. \qquad (86)$$

Далее запишем уравнения движения массивной точки относительно массивного центра, воспользовавшись уравнениями Гамильтона

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}\,, \qquad (87)$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}\,, \qquad (88)$$
$$\frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}\,, \qquad (89)$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}\,. \qquad (90)$$

---

[16] Здесь и далее для удобства записи используется также ньютоново обозначение производной по времени.

Для этого от энергии $E(\dot{r}, \dot{\varphi}, r, \varphi)$ перейдем к функции Гамильтона $H \equiv E(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$. Используя выражения для компонент импульса (84), получим функцию Гамильтона

$$H(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \left({p_r}^2 + \frac{{p_\varphi}^2}{r^2} \right) - \gamma \frac{m \cdot M}{r}\,, \quad (91)$$

которую подставим в уравнения (87), (88), (89), (90). Уравнения Гамильтона (88), (90) приводят к соотношениям

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m}\,, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{m \cdot r^2}\,,$$

которые, по существу, повторяют определение компонент импульса. Для нас содержательный смысл заключен в уравнениях Гамильтона (87), (89).

Уравнение Гамильтона (87) приобретает следующий вид:

$$\frac{dp_r}{dt} = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2} - \frac{{p_\varphi}^2}{m \cdot r^3}$$

или

$$\frac{dp_r}{dt} = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2} - m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}\,. \quad (92)$$

Для движения по окружности, которым мы ограничились, сила притяжения, действующая на массивную точку, равна центробежной силе

$$\gamma \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}\,,$$

поэтому из (92) следует, что при движении массивной точки по окружности

$$\frac{dp_r}{dt} = 0\,,$$

а отсюда, в свою очередь, следует, что

$$p_r = m \cdot \frac{dr}{dt} - \text{величина постоянная}\,. \quad (93)$$

Этот результат мы используем далее при выводе правила Тициуса-Боде.

Так как функция Гамильтона не зависит от координаты φ, то уравнение Гамильтона (89) приобретает следующий вид:

$$\frac{dp_r}{dt} = 0\,.$$

Отсюда, как и в предыдущем случае, следует, что[17]

$$p_\varphi = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \text{величина постоянная}\,. \quad (94)$$

Этот результат мы также используем далее при выводе правила Тициуса-Боде.

[17] Указанный результат выполняется при любой траектории движения массивной точки.

2.2. *Вывод правила Тициуса-Боде*

Для простоты дольнейших преобразований удобно ввести безразмерную волновую функцию

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0}\,.$$

Для нее уравнения структуры (78) переписывается следующим образом:

$$d\psi = \frac{1}{S_0} \cdot dS \cdot \psi\,. \quad (95)$$

Вывод правила Тициуса-Боде начнем с записи квантовых постулатов в полярной системе координат. Волновая функция ψ зависит от координат r, φ и времени

$$\psi = \psi(r,\, \varphi,\, t)\,,$$

поэтому полный дифференциал по времени d от волновой функции записывается через частные дифференциалы d_r, d_φ, d_t

$$d\psi = d_r\psi + d_\varphi\psi + d_t\psi\,.$$

Учитывая соотношение (86), запишем уравнения структуры (95) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &d_r\psi + d_\varphi\psi + d_t\psi = \\ &= \frac{1}{S_0} \cdot (p_r \cdot dr + p_\varphi \cdot d\varphi - H(\dot{r}, \dot{\varphi}, r, \varphi) \cdot dt) \cdot \psi\,. \end{aligned}$$

Это уравнение распадается на три квантовых постулата

$$\begin{aligned} d_r\psi &= \frac{1}{S_0} \cdot p_r \cdot dr \cdot \psi\,, \\ d_\varphi\psi &= \frac{1}{S_0} \cdot p_\varphi \cdot d\varphi \cdot \psi\,, \\ d_t\psi &= -\frac{1}{S_0} \cdot H \cdot dt \cdot \psi\,. \end{aligned}$$

Далее мы остановимся на первом из них

$$d_r\psi = \frac{1}{S_0} \cdot p_r \cdot dr \cdot \psi \quad (96)$$

и выполним для него следующие преобразования.

Первое. Введем модифицированную волновую функцию ψ_r в соответствии с определением

$$\frac{d\psi_r}{\psi_r} = \frac{d_r\psi}{\psi}\,.$$

Тогда соотношение (96) перепишем так:

$$\frac{d\psi_r}{\psi_r} = \frac{1}{S_0} \cdot p_r \cdot dr\,. \quad (97)$$

Второе. Введем квантовое условие, аналогичное квантовому условию Зоммерфельда

$$S_0 = n \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi \,,$$

где n – натуральные числа ($n = 0, 1, 2, 3, ...$). В соответствии с (94) компонента импульса p_φ представляет собой постоянную величину, поэтому

$$S_0 = n \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = n \cdot p_\varphi = n \cdot m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \,,$$

Подставляя это значение S_0 в соотношение (97), получим

$$\frac{d\psi_r}{\psi_r} = \frac{p_r}{n \cdot p_\varphi} \cdot dr \,. \tag{98}$$

Третье. Учтем, что, в соответствии с результатом (93), компонента импульса $p_r = m \cdot \frac{dr}{dt}$ есть постоянная величина. Поэтому отношение бесконечно малых в производной $\frac{dr}{dt}$ может быть заменено отношением конечных величин, то есть

$$p_r = m \cdot \frac{dr}{dt} = m \cdot \frac{r}{t} \,. \tag{99}$$

Кроме того, учтем, что, в соответствии с результатом (94), компонента импульса $p_\varphi = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ есть постоянная величина. Поэтому отношение бесконечно малых в производной $\frac{d\varphi}{dt}$ может быть заменено отношением конечных величин, то есть,[18]

$$p_\varphi = m \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = m \cdot r^2 \cdot \frac{1}{t} \,. \tag{100}$$

Используя (99) и (100) преобразуем выражение (98) в следующее соотношение:

$$n \cdot \frac{d\psi_r}{\psi_r} = \frac{dr}{r} \,.$$

Рассматривая радиус орбиты r как безразмерную относительную величину, проинтегрируем это соотношение. Получим

$$C + n \cdot \ln \psi_r = \ln r \,.$$

Возьмем экспоненту от обеих частей уравнения. Получим

$$\exp C \cdot (\psi_r)^n = r \,.$$

Перейдем к другим обозначениям $\exp C \to C_1$, $\psi_r \to C_2$, $r \to r_n$. Получим правило Тициуса-Боде (83):

$$r_n = C_1 \cdot (C_2)^n \,.$$

[18] За время t материальная точка поворачивается на один радиан.

XI. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТИЦ В ОПЫТЕ ЮНГА С ДВУМЯ ЩЕЛЯМИ

Введенные представления используем для анализа основополагающего опыта квантовой механики. Здесь имеется в виду опыт (Рис. 1.), в котором поток частиц, двигаясь вдоль оси 1, падает на пластину П с двумя щелями a и b. За пластиной расположен экран Э, на котором регистрируются частицы, прошедшие щели a и b.

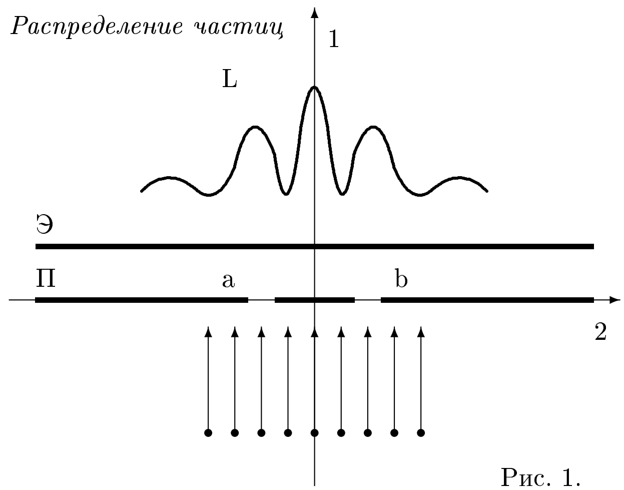


Рис. 1.

Распределение частиц вдоль оси 2 представлено кривой L[19].

Современное квантово-механическое объяснение указанного распределения основано на отказе от представления о траектории движения частицы.

Приведем объяснение распределения частиц L, использующее представление о векторе действия.

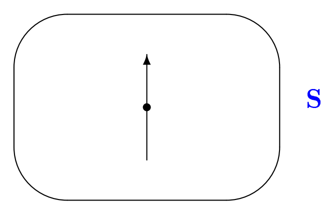


Рис. 2.

Движущаяся частица (Рис. 2.) окружена полем векторов действия **S**. Частица есть особенность поля векторов действия **S**. Конфигурация этого поля определяет параметры движения частицы и, в частности,

[19] Это распределение подобно распределению интенсивности волны, падающей на пластину П, проходящей через щели a и b и падающей на экран Э. Для волны распределение интенсивности вида L объясняется интерференцией (наложением) волны, выходящей из щели a, и волны, выходящей из щели b.

траекторию ее движения. Обратимся к частице, движущейся в направлении щели a (Рис. 3.). Ее поле обозначим $\mathbf{S}_0$ и назовем начальным. Начальное поле подчиняется уравнению структуры

$$d_2 d_1 \mathbf{S}_0 = \frac{1}{\hbar} d_1 \mathbf{S}_0 \circ d_2 \mathbf{S}_0 \, .$$

Начальное поле определяет траекторию движения частицы до пластины. Вектор $d_2\mathbf{S}_0$ определяет значение импульса частицы до пластины

$$\mathbf{p}_0 \sim d_2 \mathbf{S_0} \, .$$

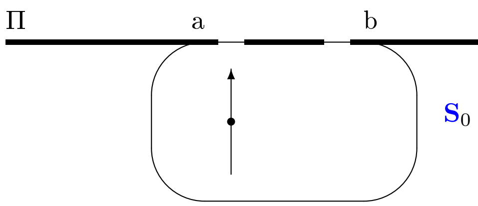


Рис. 3.

Это поле необходимо разбить на две составляющих (Рис. 4.)

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_{0a} + \mathbf{S}_{0b} \, .$$

$\mathbf{S}_{0a}$ – это поле, которое проходит через щель a вместе с частицей;
$\mathbf{S}_{0b}$ – это поле, которое проходит через щель b;[20]

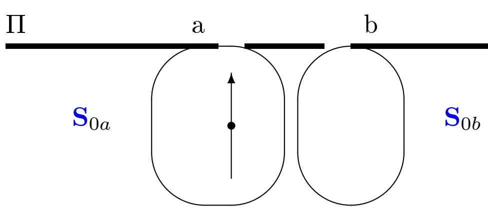


Рис. 4.

Щель a искажает проходящее через нее начальное поле $\mathbf{S}_{0a}$ и формирует новое поле $\mathbf{S}_a$. Формирование поля $\mathbf{S}_a$ подчиняется уравнению структуры

$$d_2 d_1 \mathbf{S}_a = \frac{1}{\hbar} d_1 \mathbf{S}_a \circ d_2 \mathbf{S}_a \, .$$

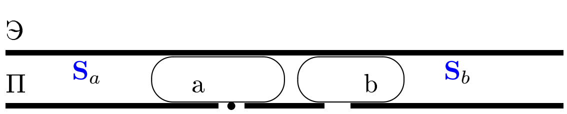


Рис. 5.

[20] часть поля, которая отражается от пластины или поглощается ею, не рассматривается.

Щель b искажает проходящее через нее начальное поле $\mathbf{S}_{0b}$ и формирует новое поле $\mathbf{S}_b$. Формирование поля $\mathbf{S}_b$ подчиняется уравнению структуры

$$d_2 d_1 \mathbf{S}_b = \frac{1}{\hbar} d_1 \mathbf{S}_b \circ d_2 \mathbf{S}_b \, .$$

После прохождения поля действия через щели a и b в области между пластиной П и экраном Э возникает новое поле действия (Рис. 6.)

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_a + \mathbf{S}_b \, .$$

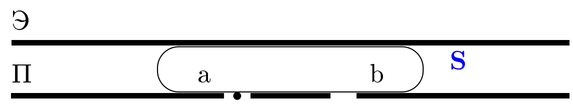


Рис. 6.

Таким образом, после прохождения щели a частица попадает в окружение нового поля действия $\mathbf{S}$. Конфигурация этого поля определяет новые параметры движения частицы, в частности, новую траекторию движения. Вектор $d_2\mathbf{S}$ определяет новое значение импульса частицы

$$\mathbf{p} \sim d_2 \mathbf{S} \, .$$

В результате после прохождения частицей щели ее траектория движения претерпевает резкое изменение (Рис. 7).

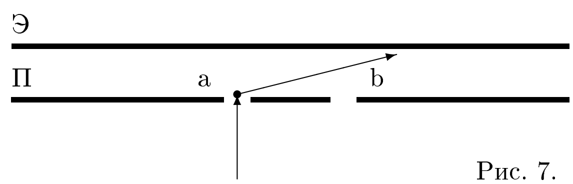


Рис. 7.

Таким образом, интерференция в распределении частиц объясняется уравнением структуры векторов действия и разбросом в начальных условиях движения частиц и граничных условиях для полей действия. Две частицы, движущиеся с одинаковыми начальными условиями и имеющие одинаковую конфигурацию поля действия, в результате попадут в одну и туже точку экрана.

В заключение Раздела подчеркнем *ключевую особенность* поля действия: между полем действия и динамическими параметрами частиц имеет место взаимная зависимость. В частности, траектория движения частиц находится во взаимной зависимости с полем действия частиц. Поле действия определяет траекторию движения частиц и, напротив, траектория движения частиц определяет их поле действия. Поэтому, оказывая влияние на движение частиц, можно сформировать их поле действия и, напротив, оказывая влияние на поле действия частиц, можно сформировать их траекторию движения, что, собственно, и происходит в двухщелевом опыте.

Изложенные соображения относительно поля действия частицы позволяют понять соотношения неопределенности Гейзенберга. Попытка точного определения координаты частицы сопровождается искажением поля действия частицы, что приводит к изменению ее импульса. Однако, нужно понимать, что соотношения неопределенности не означают, что импульс и координата частицы не имеют точного значения.

XII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- Итак, нами получена задача на собственные значения физических величин как следствие алгебраического закона умножения векторов действия, существование которого мы допустили. Тем самым мы подошли к объяснению квантовых явлений алгебраической структурой пространства векторов действия.

- Установлен путь объяснения загадочного вида квантовых операторов по отношению к классическим операторам дифференцирования. Этот вид объясняется алгебраической структурой пространства-времени. Множители квантовых операторов – это структурные постоянные ковариантной алгебры пространства-времени. В частном случае указанные структурные постоянные могут быть представлены мнимой единицей.

- Квантовые операторы физических величин – это операторы дифференцирования, снабженные структурными постоянными в качестве множителей. Они представляют собой обобщенные операторы набла.

- Установлено новое понимание волновой функции как частного дифференциала вектора действия.

- Квантовые уравнения необходимо получать не путем "квантования" классических уравнений, то есть путем замены физических величин их квантовыми операторами, а путем перехода от принципа наименьшего действия к уравнениям структуры алгебры действия.

- Наряду с правым уравнением Дирака для частиц и античастиц необходимо рассматривать левое уравнение Дирака для частиц и античастиц.

- Обращение к простейшей алгебре действия при описании гравитационного взаимодействия массивных тел позволяет вывести правило Тициуса-Боде.

- Интерференция в распределении частиц в опыте Юнга с двумя щелями объясняется уравнением структуры векторов действия и разбросом в начальных условиях движения частиц и граничных условиях для полей действия.

Глава 3.4 Симметрии тензоров и классификация фундаментальных частиц

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой Главе излагается единый подход к описанию фундаментальных частиц. Под *фундаментальными* мы понимаем частицы, не являющиеся составными и не относящиеся к промежуточным бозонам (частицам, переносящим взаимодействие). Прежде всего к фундаментальным частицам относятся лептоны и кварки трех поколений. Примером и образцом является уже установленное описание лептонов, основывающееся на алгебре Клиффорда.

Здесь понятие *фундаментальная частица* отождествлено с понятием *фундаментальный объект*. Пространство действия $\mathbb{S}$ фундаментальных частиц рассматривается как множество векторов вида

$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_k\,\psi^k + \mathbf{e}_{k_1k_2}\,\psi^{k_1k_2} + \ldots + \mathbf{e}_{k_1\ldots k_n}\,\psi^{k_1\ldots k_n} + \ldots .$$

Здесь буквой $\mathbf{e}$ обозначены базисные векторы. Через $\mathbf{e}_0$ обозначена единица множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Через $\mathbf{e}_k$ обозначены базисные векторы пространства-времени СТО. Пространство векторов вида

$$\psi = \mathbf{e}_k\,\psi^k$$

является образующим. Базисные векторы

$$\mathbf{e}_{k_1k_2\ldots k_p} = \mathbf{e}_{k_1}\circ\mathbf{e}_{k_2}\circ\ldots\circ\mathbf{e}_{k_p}\,,$$

где символ $\circ$ означает *универсальное* умножение векторов в пространстве действия. Наличие на множестве векторов $\mathbb{S}$ операций сложения и умножения делает это множество алгеброй, которая называется *контравариантной алгеброй действия фундаментальных частиц*[1].

Аналогичным образом формируется пространство-время $\mathbb{X}$ фундаментальной частицы.

Пространство действия $\mathbb{S}^*$ фундаментальных античастиц рассматривается как множество векторов вида

$$\psi^* = \psi_0\mathbf{E}^0 + \psi_k\mathbf{E}^{k_1} + \psi_{k_1k_2}\mathbf{E}^{k_1k_2} + \ldots + \psi_{k_1\ldots k_n}\mathbf{E}^{k_1\ldots i_n} + \ldots$$

Через $\mathbf{E}^0$ обозначена единица множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Через $\mathbf{E}^k$ обозначены базисные векторы сопряженного пространства-времени СТО

$$\mathbf{E}^{k_1k_2\ldots k_p} = \mathbf{E}^{k_1}\circ\mathbf{E}^{k_2}\circ\ldots\circ\mathbf{E}^{k_p}\,.$$

Наличие на множестве векторов S^* операций сложения и умножения делает это множество алгеброй, которая называется *ковариантной алгеброй действия фундаментальных античастиц.*

Аналогичным образом формируется пространство-время $\mathbb{X}^*$ фундаментальных античастиц.

Различные правила умножения базисных векторов $\mathbf{e}_k$ приводят к разным алгебрам, соответствующим разным фундаментальным частицам. Вместе с тем, различные правила умножения базисных векторов $\mathbf{e}_k$ приводят к разным свойствам тензоров второго, третьего и четвертого рангов при перестановке индексов. В результате свойства структурных матриц, свойства квантовых уравнений и, в конечном счете, свойства фундаментальных частиц определяются свойствами тензоров при перестановке индексов. Такие свойства тензоров изучаются с помощью *диаграмм Юнга.* Поэтому далее рассмотрим применение диаграмм Юнга к классификации алгебр фундаментальных частиц.

Для простоты изложения примем следующие условия.

1. Далее не будем различать ко- и контравариантные компоненты тензора. Например, компонента $\psi^{k_1k_2\ldots k_n}$ будет неотличима от $\psi_{k_1k_2\ldots k_n}$.

2. Будем опускать обозначения тензора и индексов а оперировать только с номерами индексов. Номера индексов будем писать жирным шрифтом для того, чтобы в случае необходимости отличать эти числа от значений индексов. Так, например, вместо тензоров $\mathbf{e}_{k_1k_2\ldots k_n}$, $\psi^{k_1k_2\ldots k_n}$, $\psi_{k_1k_2\ldots k_1}$, $\mathbf{E}^{k_1k_2\ldots k_n}$ будем писать $\mathbf{123\ldots n}$.

3. Рассматриваем алгебры, в которых умножение двух одинаковых базисных векторов дает число, являющееся скалярным произведением этих векторов. Поэтому набор индексов с двумя одинаковыми значениями переходит в набор индексов, в котором эти значения отсутствуют, например, $\mathbf{1(22)3} = \mathbf{13}$. Таким образом, заранее можно сказать, что произвольная комбинация индексов сводится к такой, в которой остаются только индексы с разными значениями. Поэтому набор чисел можно рассматривать либо как номера индексов, либо как их значения. Например, комбинация чисел $\mathbf{123}$ может означать комбинацию индексов $k_1k_2k_3$, а может быть и значением этой комбинации при $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Далее будем придерживаться второй точки зрения.

Рассмотрим симметризацию тензоров на основании диаграмм Юнга.

---

[1] В представленной записи вектор ψ выглядит как бесконечномерный. Но если учесть, что, с одной стороны, произведение одинаковых базисных векторов есть скалярное произведение, то есть число, а с другой стороны, образующие базисные векторы подчиняются определенным перестановочным соотношениям, вектор ψ принимает вид

$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_k\,\psi^k + \mathbf{e}_{k_1k_2}\,\psi^{k_1k_2} + \mathbf{e}_{k_1k_2k_3}\,\psi^{k_1k_2k_3} + \mathbf{e}_{1324}\,\psi^{1324}\,,$$

то есть, является конечномерным с числом координат, равным $2^4 = 16$.

II. СИММЕТРИЗАЦИЯ ТЕНЗОРОВ. ДЕРЕВО ЮНГА

1. Необходимые определения

1. *Перестановка* – набор чисел от 1 до n в определенном порядке, например, $(\mathbf{132})$ для $n = 3$. Число перестановок равно $n!$.

2. *Подстановка* – отображение одной перестановки в другую, например $\sigma(\mathbf{132}) = (\mathbf{312})$, $(\mathbf{132})$ – перестановка-аргумент, $(\mathbf{312})$ – перестановка-функция. Если перестановка-аргумент фиксирована, например представляет собой набор чисел в порядке возрастания $(\mathbf{123...n})$, то подстановки изоморфны перестановкам. Отсюда число подстановок равно $n!$.

3. *Транспозиция* – подстановка, меняющая в перестановке местами два числа, например, $\sigma(\mathbf{1324}) = (\mathbf{4321})$.

4. *Соседняя* перестановка – подстановка, меняющая в перестановке местами два расположенных рядом числа, например, $\sigma(\mathbf{1324}) = (\mathbf{1234})$.

5. Подстановка $\sigma(\mathbf{123...n}) = (\mathbf{23...n1})$ называется *циклической*, или круговой. Число циклических подстановок равно n.

6. *Инверсия.* В перестановке чисел i и j, где i левее j, составляют инверсию, если $i > j$. В перестановке $(\mathbf{123...n})$ число инверсий равно нулю. Перестановка *четная*, если она состоит из четного числа инверсий и наоборот. Например, перестановка $(\mathbf{451362})$ содержит 8 инверсий, а перестановка $(\mathbf{38524671})$ содержит 15 инверсий. Подстановка σ *четная*, если перестановка $\sigma(\mathbf{123...n})$ состоит из четного числа инверсий и наоборот. Например, подстановка $\sigma(\mathbf{123456}) = (\mathbf{451362})$ четная, а подстановка $\sigma(\mathbf{12345678}) = (\mathbf{38524671})$ нечетная.

7. На перестановках вводится *сложение* и *умножение на число.* В результате рассматриваются *линейные комбинации* перестановок, например

$$\langle\mathbf{12}\rangle = \mathbf{12} + \mathbf{21}\,, \qquad [\mathbf{12}] = \mathbf{12} - \mathbf{21}\,.$$

8. Соответственно на подстановках вводится *сложение* и *умножение на число.* В результате рассматриваются *линейные комбинации* подстановок, например $[\mathbf{12}] = \sigma(\mathbf{12})$, где $\sigma = \sigma_1 + (-1)\cdot\sigma_2$, а $\sigma_1(\mathbf{12}) = (\mathbf{12})$ и $\sigma_2(\mathbf{12}) = (\mathbf{21})$.

9. Последовательное выполнение нескольких подстановок (например σ_1 и σ_2) равносильно выполнению некоторой подстановки

$$\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1\,,$$

называемой *произведением* подстановок σ_1 и σ_2. Всякая подстановка может быть представлена в виде произведения соседних перестановок. Относительно произведения подстановки образуют *группу*, а так как на подстановках введены *сложение* и *умножение на число*, то подстановки образуют *алгебру*.

2. Симметризация тензоров

Сначала остановимся на простейших случаях симметризации тензорных индексов путем их перестановки.

Выделим прежде всего два типа тензоров: *симметричные* тензоры, то есть сохраняющие знак при соседней перестновки, и *антисимметричные* тензоры, изменяющие знак при соседней перестановке. Для них будем использовать следующие обозначения.

- Для симметричных тензоров
  - ◇ второго ранга
  $$\langle\mathbf{12}\rangle = (\mathbf{12} + \mathbf{21})\cdot\tfrac{1}{2}\,,$$
  - ◇ третьего ранга
  $$\langle\mathbf{123}\rangle = (\mathbf{123}+\mathbf{231}+\mathbf{312}+\mathbf{213}+\mathbf{132}+\mathbf{321})\cdot\tfrac{1}{3!}\,,$$
  - ◇ n-го ранга
  $$\langle\mathbf{12}\ldots\rangle = \Big(\sum_\sigma \sigma(\mathbf{12}\ldots n)\Big)\cdot\tfrac{1}{n!}\,,$$
  где суммирование выполняется по всем подстановкам σ.
- Для антисимметричных тензоров
  - ◇ второго ранга
  $$[\mathbf{12}] = (\mathbf{12} - \mathbf{21})\cdot\tfrac{1}{2}\,,$$
  - ◇ третьего ранга
  $$[\mathbf{123}] = (\mathbf{123}+\mathbf{231}+\mathbf{312}-\mathbf{213}-\mathbf{132}-\mathbf{321})\cdot\tfrac{1}{3!}\,,$$
  - ◇ n-го ранга
  $$[\mathbf{12}\ldots n] = \Big(\sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma)\cdot\sigma(\mathbf{12}\ldots n)\Big)\cdot\tfrac{1}{n!}\,,$$
  где суммирование выполняется по всем подстановкам σ. Выражение $\mathrm{sign}(\sigma)$ равно $(+1)$ или (-1) в зависимости от того, является ли подстановка четной или нечетной.

Рассмотрим далее разложение тензоров на сумму, содержащую симметричные и антисимметричные слагаемые. Такое разложение назовем *симметризацией* тензора, а слагаемые, на которые разлагается тензор, назовем *симметриями.*

2.1. Симметризация тензора второго ранга

Очевидно, для тензора второго ранга имеет место

$$\mathbf{12} = \langle\mathbf{12}\rangle + [\mathbf{12}].$$

2.2. Симметризация тензора третьего ранга

Тензор $\mathbf{123}$ не разлагается на сумму только симметричных и антисимметричных слагаемых. Действительно,

$$\langle\mathbf{123}\rangle + [\mathbf{123}] = (\mathbf{123} + \mathbf{231} + \mathbf{312}) \cdot \tfrac{1}{3}\,.$$

Поэтому разложение тензора $\mathbf{123}$ требует привлечения дополнительных слагаемых. Вид этих слагаемых устанавливается с помощью процедуры Юнга, которую рассмотрим в следующем разделе. Забегая вперед, скажем, что тензор 3-го ранга может быть представлен в виде суммы четырех симметрий.

$$\mathbf{123} = ((\mathbf{123})_1 + (\mathbf{123})_2 + (\mathbf{123})_3 + (\mathbf{123})_4) \cdot \tfrac{3}{2}\,,$$

где

$$(\mathbf{123})_1 = [\mathbf{123}]\,, \qquad (\mathbf{123})_4 = \langle\mathbf{123}\rangle\,,$$

$$(\mathbf{123})_2 = (\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312} - \mathbf{213} - \mathbf{132} + \mathbf{321}) \cdot \tfrac{1}{3!}\,,$$

$$(\mathbf{123})_3 = (\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312} + \mathbf{213} + \mathbf{132} - \mathbf{321}) \cdot \tfrac{1}{3!}\,.$$

2.3. Симметризация тензора четвертого ранга

Тензор 4-го ранга может быть представлен в виде суммы 16 симметрий.

$$\begin{aligned}\mathbf{1234} = \tfrac{3}{2} \cdot ((\mathbf{1234})_1 + (\mathbf{1234})_2 + (\mathbf{1234})_3 + (\mathbf{1234})_4 +\\ + (\mathbf{1234})_5 + (\mathbf{1234})_6 + (\mathbf{1234})_7 + (\mathbf{1234})_8 +\\ + (\mathbf{1234})_9 + (\mathbf{1234})_{10} + (\mathbf{1234})_{11} + (\mathbf{1234})_{12} +\\ + (\mathbf{1234})_{13} + (\mathbf{1234})_{14} + (\mathbf{1234})_{15} + (\mathbf{1234})_{16})\,,\end{aligned}$$

где

$$(\mathbf{1234})_1 = [\mathbf{1234}]\,, \qquad (\mathbf{1234})_{16} = \langle\mathbf{1234}\rangle\,.$$

Каждая из указанных шестнадцати симметрий находится в соответствии с набором перестановочных соотношений базисных векторов. Далее приведем таблицу таких соответствий.

$$(\mathbf{1234})_1 :$$

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_2 :$$

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_3 :$$

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = \mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = \mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_4 :$$

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = \mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = \mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_5 :$$

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_6 :$$

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_7 :$$

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = \mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = \mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_8 :$$

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = \mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = \mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_9 :$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_{10} :$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_{11} :$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,\\ \mathbf{14} = \mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = \mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_{12}:$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = \mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_{13}:$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_{14}:$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_{15}:$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = \mathbf{34}$$

$$(\mathbf{1234})_{16}:$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = \mathbf{34}$$

Для примера приведем симметрию $(\mathbf{1234})_6$, установленную в соответствии с перестановочными соотношениями

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,,\quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,,\quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,,\quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,,\quad \mathbf{34} = -\mathbf{34}:$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{1234})_6 &= \\ = \ &\tfrac{1}{4!}\,(\mathbf{1234} - \mathbf{2134} - \mathbf{2314} + \mathbf{3214} - \mathbf{3124} - \mathbf{1324} - \\ &- \mathbf{1243} + \mathbf{2143} - \mathbf{2413} - \mathbf{4213} + \mathbf{4123} - \mathbf{1423} - \\ &- \mathbf{1342} - \mathbf{3142} + \mathbf{3412} - \mathbf{4312} - \mathbf{4132} + \mathbf{1432} + \\ &+ \mathbf{2341} - \mathbf{3241} - \mathbf{3421} + \mathbf{4321} - \mathbf{4231} - \mathbf{2431})\ .\end{aligned}$$

Симметризация тензора произвольного ранга выполняется, на основании процедуры Юнга, которую рассмотрим далее.

3. Процедура Юнга

Разложение тензора произвольного ранга n на сумму, содержащую симметричные и антисимметричные слагаемые $\langle 12\ldots n\rangle$ и $[12\ldots n]$, осуществляется с помощью процедуры Юнга. Разложим число индексов n (ранг тензора) на сумму r слагаемых

$$n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\,,$$

где $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r \geq 1$. Например, число $n = 3$ допускает следующие разложения:

$$3 = 1 + 1 + 1\,,\qquad 3 = 2 + 1\,,\qquad 3 = 3\,.$$

В первом случае $\alpha_1 = 1\,, \alpha_2 = 1\,, \alpha_3 = 1\,, r = 3$. Во втором случае $\alpha_1 = 2\,, \alpha_2 = 1\,, r = 2$. В третьем случае $\alpha_1 = 3\,, r = 1$. Пусть число разложений ранга тензора n равно s, а m – текущий индекс, нумерующий эти разложения, тогда текущее разложение запишем следующим образом:

$$n(m) = \sum_{i=1}^{r_m} \alpha_i^m\,,$$

где m принимает значения от 1 до s. Набор чисел $\alpha(m) = (\alpha_1^m, \alpha_2^m, \ldots, \alpha_{r_m}^m)$ называется *системой Юнга*. Например, для $n = 2$ имеют место следующие системы Юнга:

$$\alpha(1) = (1,1),\qquad \alpha(2) = (2)\,,$$

для $n = 3$ имеют место следующие системы Юнга:

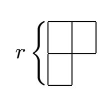
$$\alpha(1) = (1,1,1),\quad \alpha(2) = (2,1),\quad \alpha(3) = (3)\,,$$

а для $n = 4$ имеют место системы Юнга

$$\alpha(1) = (1,1,1,1)\,,\qquad \alpha(2) = (2,1,1),$$
$$\alpha(3) = (2,2)\,,\quad \alpha(4) = (3,1)\,,\quad \alpha(5) = (4)\,.$$

На множестве систем Юнга для заданного числа n целесообразно ввести отношение порядка. Система $\alpha(m) = (\alpha_1^m, \alpha_2^m, \ldots, \alpha_{r_m}^m) >$ системы $\beta(n) = (\beta_1^n, \beta_2^n, \ldots, \beta_{r_n}^n)$, если $\alpha_i^m > \beta_i^n$ для первого i из значений $1, 2, \ldots, \min(r_m, r_n)$. Например, $(3,2) > (3,1,1) > (2,2,1)$.

Каждой системе Юнга ставится в соответствие *диаграмма Юнга* – таблица из r_m строк по α_i^m клеток в i-ой строке. Так системе Юнга (2,1) для $n = 3$, $r = 2$ соответствует диаграмма Юнга:



Число клеток в таблице равно числу индексов n (рангу тензора).

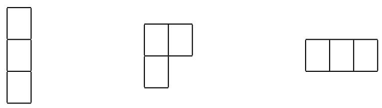
3.1. Симметрии тензора второго ранга

Симметризация тензора второго ранга использует системы Юнга $\alpha(1) = (1,1)$, $\alpha(2) = (2)$. Таким системам соответствуют диаграммы Юнга:

Первая диаграмма представляет антисимметричный тензор, вторая – симметричный.

3.2. Симметрии тензора третьего ранга

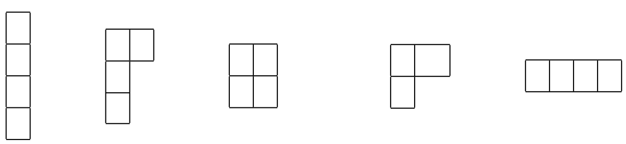
Симметризация тензора третьего ранга использует системы Юнга $\alpha(1) = (1,1,1)$, $\alpha(2) = (2,1)$, $\alpha(3) = (3)$. Таким системам соответствуют диаграммы Юнга:



Первая и третья диаграммы представляют антисимметричный и симметричный тензоры. Тензоры, соответствующие второй диаграмме, рассмотрены далее.

3.3. Симметрии тензоров четвертого ранга

Симметризация тензора четвертого ранга использует системы Юнга $\alpha(1) = (1,1,1,1)$, $\alpha(2) = (2,1,1)$, $\alpha(3) = (2,2)$, $\alpha(4) = (3,1)$, $\alpha(5) = (4)$. Таким системам соответствуют диаграммы Юнга:



Первая и пятая диаграммы представляют антисимметричный и симметричный тензоры. Тензоры, соответствующие второй, третьей и четвертой диаграммам, рассмотрены в Разделе II.4.

В клетках диаграммы Юнга размещаются все числа от 1 до n, нумерующие индексы тензора,

например $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{2} \\ \cline{1-1}\end{array}$.

Диаграмма Юнга обозначается символом $D_{\alpha(m)}$. На числах диаграммы $D_{\alpha(m)}$ вводится группа подстановок $S(n)$. В $S(n)$ имеются следующие подгруппы, связанные с диаграммой $D_{\alpha(m)}$.

1. P – подстановки, действующие внутри строки, не меняющие набор чисел в строке.

2. Q – подстановки, действующие внутри столбца, не меняющие набор чисел в столбце.

Каждой диаграмме Юнга поставим в соответствие два оператора, переставляющих числа диаграммы,– *симметризаторы Юнга*:

$$C_1(\mathbf{12\ldots n}) = \sum_{q,p} \operatorname{sign}(q)\cdot p\circ q(\mathbf{12\ldots n}) \quad \text{и}$$
$$C_2(\mathbf{12\ldots n}) = \sum_{p,q} \operatorname{sign}(q)\cdot q\circ p(\mathbf{12\ldots n}),$$

где p пробегает подстановки подгруппы P, а q – подстановки подгруппы Q, $\operatorname{sign}(q) = 1$, если подстановка q четная, и $\operatorname{sign}(q) = -1$, если подстановка q нечетная.

В частном случае, когда диаграмма $D_{\alpha(m)}$ состоит из одной строки, что соответствует случаю $\alpha = (\alpha_1) = n$, $Q = 1$, симметризатор

$$C_1(\mathbf{12\ldots n}) = C_2(\mathbf{12\ldots n}) = \sum_p p(\mathbf{12\ldots n})$$

определяет симметричный тензор. Если $D_{\alpha(m)}$ состоит из одного столбца, то $\alpha = (\overbrace{1,\ldots,1}^{n})$, $P = 1$, а симметризатор

$$C_1(\mathbf{12\ldots n}) = C_2(\mathbf{12\ldots n}) = \sum_q \operatorname{sign} q\cdot q(\mathbf{12\ldots n})$$

определяет антисимметричный тензор.

Каждая оцифрованная диаграмма снабжается направленным отрезком, указывающим направление соседней транспозиции, например

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Причем вертикальная часть отрезка соответствует антисимметричной транспозиции, а горизонтальная часть отрезка соответствует симметричной транспозиции. Указание направления соседней транспозиции позволяет поставить в соответствие диаграммам Юнга условия соседней перестановки для образующих базисных векторов и, следовательно, алгебру фундаментальной частицы. Например, из вышеприведенной диаграммы следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32} \qquad (1)$$

или

$$\langle\mathbf{12}\rangle = 0\,, \quad [\mathbf{13}] = \mathbf{0}\,, \quad \langle\mathbf{23}\rangle = \mathbf{0}\,. \qquad (2)$$

Необходимо отметить, что условия соседней перестановки определяют симметрии тензора произвольного ранга. Так из соотношений (1) для симметрии тензора третьего ранга, соответствующей вышеприведенной диаграмме, следует

$$\mathbf{123} = (\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312} - \mathbf{213} - \mathbf{132} + \mathbf{321})\cdot \tfrac{1}{3!}\,,$$

то есть $\mathbf{123} = (\mathbf{123})_2$ – симметрии, введенной в Разделе II.2.

Так же диаграмме

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

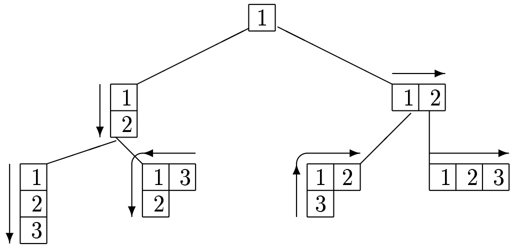


Рис. 1. Трехуровневое дерево Юнга.

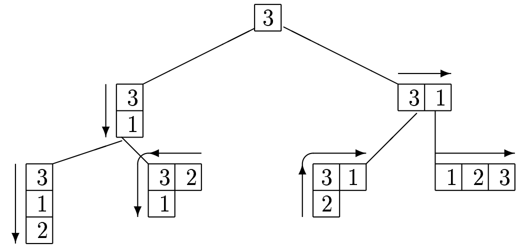


Рис. 2. Трехуровневое дерево Юнга второго поколения

соответствуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$

из которых следует, что

$$\mathbf{123} = (\mathbf{123} - \mathbf{231} - \mathbf{312} + \mathbf{213} + \mathbf{132} - \mathbf{321}) \cdot \tfrac{1}{3!}\,,$$

то есть

$$\mathbf{123} = (\mathbf{123})_3\,.$$

Процедура построения систем Юнга, диаграмм Юнга, их оцифровка и указание направления соседней транспозиции позволяет рассмотреть симметрии тензоров произвольного ранга. Для этого удобно воспользоваться *деревом* Юнга.

4. Дерево Юнга

Диаграммы Юнга для тензоров ранга $1, 2, \ldots, n$, соединенные *графами*, будем называть *деревом Юнга*. Диаграммы Юнга, относящиеся к тензору ранга n, будем называть *уровнем* n дерева Юнга. Диаграммы дерева Юнга оцифровываются номерами индексов в соответствии с выбираемым порядком и снабжаются направленным отрезком, указывающим направление соседней транспозиции. Построение дерева Юнга подчиняется рекуррентному правилу: диаграммы уровня n получаются из диаграмм уровня $(n-1)$ добавлением в строку и в столбец клетки с новым индексом. Диаграммы, связанные этим правилом, соединяются графом. Направленный отрезок, указывающий направление соседней транспозиции, диаграммы, находящейся в конце графа, включает в себя направленный отрезок, указывающий направление соседней транспозиции, диаграммы, находящейся в начале графа. На рис. 1 приведено трехуровневое дерево Юнга, то есть дерево для тензоров ранга 1, 2, 3. На приведенном дереве Юнга первым по порядку рассматривается индекс $\mathbf{1}$, затем $\mathbf{2}$, затем $\mathbf{3}$.

Тензоры ранга n, поставленные в соответствие диаграммам уровня n, есть *симметрии* исходного тензора ранга n. На симметриях одного уровня введем нумерацию путем сопоставления симметрии того номера, который получает соответствующая диаграмма

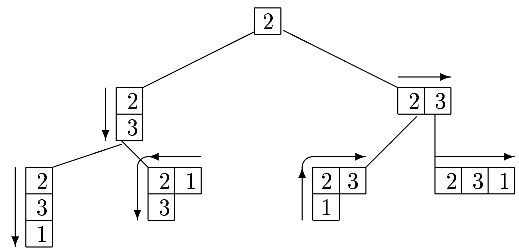


Рис. 3. Трехуровневое дерево Юнга третьего поколения

при перечислении диаграмм этого уровня слева направо. Например, для тензора ранга 3 имеем четыре вида симметрии:

$$(\mathbf{123})_1 = [\mathbf{123}]\,, \quad (\mathbf{123})_2\,, \quad (\mathbf{123})_3\,, \quad (\mathbf{123})_4 = \langle \mathbf{123} \rangle\,.$$

Это как раз те симметрии, на которые разлагается тензор $\mathbf{123}$.[2]

Дерево Юнга будем использовать для классификации фундаментальных частиц. При этом дерево Юнга, оцифрованное по порядку $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$, поставим в соответствие фундаментальным частицам первого поколения. Такое дерево Юнга (рис. 1) будем называть деревом Юнга *первого поколения.* По нашему представлению переход от фундаментальных частиц первого поколения к фундаментальным частицам второго и третьего поколений связан с циклической перестановкой геометрических базисных векторов, то есть с циклическими подстановками $\sigma(\mathbf{123})$. Поэтому второму поколению фундаментальных частиц поставим в соответствие дерево Юнга, оцифрованное по порядку $\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$ (рис. 2). Такое дерево Юнга будем называть деревом Юнга *второго поколения.* Третьему поколению фундаментальных частиц поставим в соответствие дерево Юнга, оцифрованное по порядку $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{1}$ (рис. 3). Такое дерево Юнга будем называть деревом Юнга *третьего поколения.* Так как число циклических подстановок равно числу индексов, то есть трем, то число поколений фундаментальных частиц равно трем и, соответственно, число деревьев Юнга равно трем.

---

[2] См. Раздел II.2.2.

Используя приведенные соображения, построим четырехуровневое дерево Юнга первого поколения. (рис. 4)

Четырехуровневое дерево Юнга второго и третьего поколений отличаются оцифровкой диаграмм первых трех уровней в соответствии с рис. 2 и рис. 3

На четвертом уровне дерева Юнга имеем десять симметрий, которые пронумеруем от 1 до 10. Перестановочные соотношения для выбранной симметрии устанавливаются по направленному отрезку соседней транспозиции. Зная условия соседней перестановки, можно записать выбранную симметрию.

Например, для второй диаграммы четвертого уровня имеем условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}\,.$$

Отсюда для второй симметрии имеем[3]

$$\begin{aligned}(\mathbf{1234})_2 = (&\mathbf{1234} - \mathbf{2134} + \mathbf{2314} - \mathbf{3214} + \mathbf{3124} - \mathbf{1324}\\ &+ \mathbf{2341} - \mathbf{3241} + \mathbf{3421} - \mathbf{4321} + \mathbf{4231} - \mathbf{2431}\\ &- \mathbf{3412} + \mathbf{4312} - \mathbf{4132} - \mathbf{1432} + \mathbf{1342} - \mathbf{3142}\\ &+ \mathbf{4123} + \mathbf{1423} - \mathbf{1243} + \mathbf{2143} + \mathbf{2413} - \mathbf{4213}) \cdot \tfrac{1}{6!}\,.\end{aligned}$$

Далее рассмотрим классификацию фундаментальных частиц на основании дерева Юнга.

III. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Дадим определения, которыми установим связь между введенными понятиями и фундаментальными частицами. Пусть даны алгебра действия фундаментальных частиц $\mathbb{S}$ и алгебра действия фундаментальных античастиц $\mathbb{S}^*$. Воспользуемся деревом Юнга (рис. 4) для того, чтобы разложить базисные векторы этих алгебр $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k_1k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_1k_2\ldots k_n}$ и соответственно $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{E}^{k_1}$, $\mathbf{E}^{k_1k_2}, \ldots, \mathbf{E}^{k_1k_2\ldots k_p}$ по симметриям [4].

Каждый набор базисных векторов, соответствующий некоторому стволу в дереве Юнга, определяет подпространство в пространстве $\mathbb{S}$, относящееся к определенной фундаментальной частице. Назовем пространство алгебры $\mathbb{S}$, представленное в виде суммы подпространств, соответствующих разложению базисных векторов по дереву Юнга, *пространством действия фундаментальных частиц*. Соответственно пространство алгебры $\mathbb{S}^*$, представленное в виде суммы подпространств, соответствующих разложению базисных векторов по дереву Юнга, назовем *пространством действия фундаментальных античастиц*.

На уровне тензора второго ранга дерево Юнга разделяется на две ветви. Одна ветвь имеет *вершиной* диаграмму $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$ и соответственно антисимметричный тензор $[\mathbf{12}]$, другая ветвь имеет вершиной диаграмму $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}$ и соответственно симметричный тензор $\langle\mathbf{12}\rangle$.

Обратимся к левой алгебре действия фундаментальных частиц. Для нее антисимметричные базисные векторы ${}_l\mathbf{e}_{[ab]}$ представляют собой базисные векторы *спина* и в регулярном представлении выражаются через матрицы Паули. Кроме того, направление $\mathbf{12}$ является *основным* для фундаментальных частиц первого поколения.[5] Таким образом, ветвь дерева Юнга, опирающаяся на диаграмму $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$, соответствует фундаментальным частицам первого поколения с отличным от нуля спином по основному направлению.

В соответствии с этим подпространство пространства $\mathbb{S}$, построенное на базисных векторах $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_{i_1}$ и базисных векторах *ветви* дерева Юнга с вершиной $\begin{array}{|c|}\hline \ \\\hline \ \\\hline\end{array}$, отнесем к фундаментальным фермионам. Это подпространство назовем *пространством фундаментальных фермионов* и обозначим $\mathbb{F}$. Соответствующую ветвь дерева Юнга будем называть *фермионной* (рис. 5). Далее, говоря о пространствах частиц с базисными векторами $\mathbf{e}$, будем полагать, что аналогичные соображения относятся к пространствам античастиц с базисными векторами $\mathbf{E}$.

Логика привлечения дерева Юнга для классификации фундаментальных частиц требует соответствующей интерпретации для второй ветви дерева Юнга. Пространству, построенному на базисных векторах этой ветви, поставим в соответствие гипотетические частицы. Так как для рассматриваемой ветви антисимметричные тензоры второго ранга по основному направлению равны нулю, то спин этих частиц по основному направлению следует считать равным нулю. В связи с этим подпространство пространства $\mathbb{S}$, построенное на базисных векторах $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_{k_1}$ и базисных векторах ветви дерева Юнга с вершиной $\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\\hline\end{array}$, отнесем к гипотетическим частицам, которые являются *бозонами*. Упомянутое пространство назовем *пространством фундаментальных бозонов* и обозначим $\mathbb{B}$. Соответствующую ветвь дерева Юнга будем называть *бозонной* (рис. 6).

Между фермионной и бозонной ветвями (пространствами фундаментальных фермионов и бозонов) име-

[3] Интересно отметить, что общеизвестное определение детерминанта квадратной матрицы согласуется только с алгеброй Клиффорда. Привлечение другой алгебры требует корректировки в определении детерминанта.

[4] Нужно иметь в виду, что дерево Юнга, представленное на рис. 4 мы отнесем к фундаментальным частицам первого поколения, поэтому дальнейшие соображения напрямую связаны с этими частицами. Аналогичные выкладки необходимо выполнить для деревьев второго и третьего поколений.

[5] Подробно этот вопрос рассмотрен в Главе 4.1.

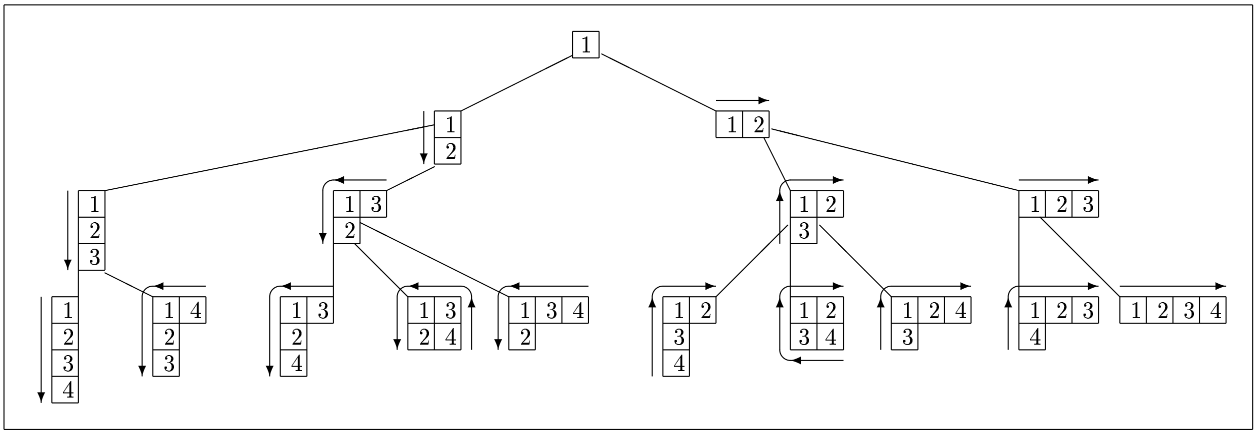
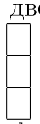
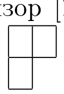


Рис. 4. Четырехуровневое дерево Юнга первого поколения

ет место симметрия в том смысле, что каждой диаграмме фермионной ветви дерева Юнга соответствует диаграмма бозонной ветви дерева Юнга. Эту симметрию будем называть *суперсимметрией*.

Спин фундаментальных фермионов по основному направлению ${}_\iota\mathbf{e}_{[ab]}$ $(a \neq b)$ отличен от нуля. У фундаментальных бозонов спин по основному направлению отсутствует. Однако фундаментальные бозоны могут быть охарактеризованы динамическим параметром, суперсимметричным спину, который мы назвали *инерцией*. Базисными векторами инерции служат симметричные векторы ${}_\iota\mathbf{e}_{\langle ab\rangle}$ $(a \neq b)$. У фундаментальных фермионов инерция по основному направлению отсутствует.

На уровне тензора третьего ранга фермионная ветвь разделяется на две ветви. Одна ветвь имеет *вершиной* диаграмму  и соответственно антисимметричный тензор $[\mathbf{123}]$, другая ветвь имеет вершиной диаграмму  и соответственно тензор смешанной симметрии $(\mathbf{123})_2$. Этим ветвям поставим в соответствие два класса фундаментальных фермионов – лептоны и кварки.

Подпространство пространства $\mathbb{F}$, построенное на базисных векторах ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - [\mathbf{123}] - \dots,$$

отнесем к лептонам. Это подпространство назовем *пространством лептонов* и обозначим $\mathbb{C}$, а соответствующую ветвь диаграммы Юнга назовем *лептонной* (рис. 7).

Подпространство пространства $\mathbb{F}$, построенное на базисных векторах фермионной ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - (\mathbf{123})_2 - \dots,$$

отнесем к кваркам. Это подпространство назовем *пространством кварков* и обозначим $\mathbb{Q}$, а соответствующую ветвь диаграммы Юнга назовем *кварковой* (рис. 8).

Принцип суперсимметрии, заложенный в дереве Юнга, заставляет также разделить бозонную ветвь на две ветви на уровне тензора третьего ранга. Одна

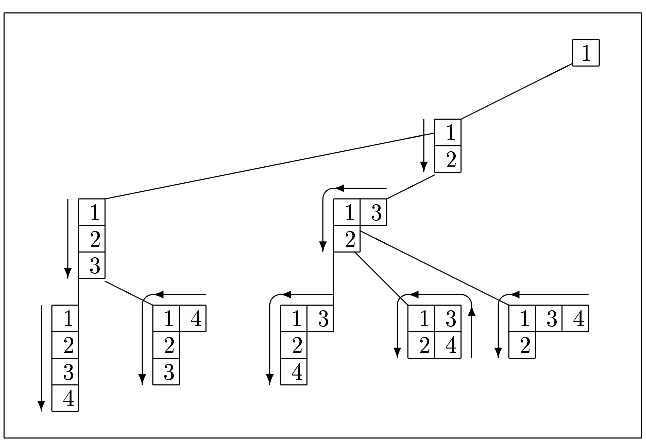


Рис. 5. Фермионная ветвь дерева Юнга

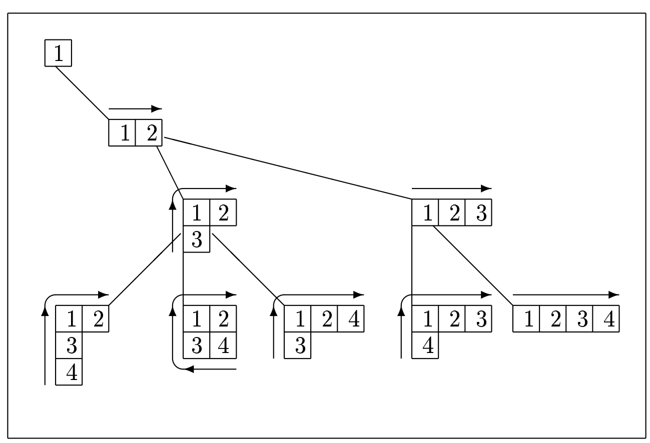


Рис. 6. Бозонная ветвь дерева Юнга

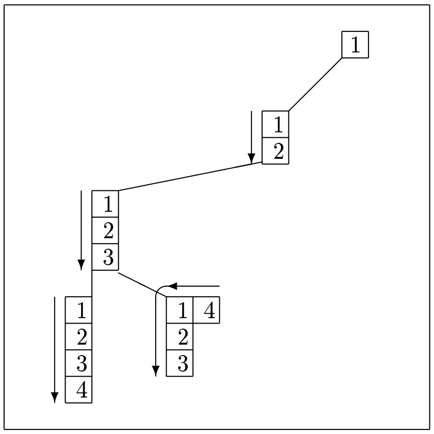


Рис. 7. Лептонная ветвь дерева Юнга

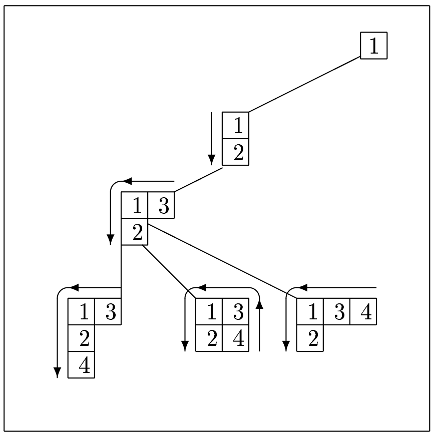
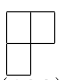
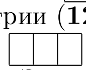


Рис. 8. Кварковая ветвь дерева Юнга

ветвь имеет *вершиной* диаграмму  и соответственно тензор смешанной симметрии $(\mathbf{123})_3$, другая ветвь имеет вершиной диаграмму  и соответственно симметричный тензор $\langle\mathbf{123}\rangle$. Этим ветвям поставим в соответствие два гипотетических класса фундаментальных бозонов, которые назовем *кваркино* и *лептино*.

Подпространство пространства $\mathbb{B}$, построенное на базисных векторах бозонной ветви

$$\mathbf{1} - \langle\mathbf{12}\rangle - (\mathbf{123})_3 - \ldots,$$

отнесем к кваркино. Это подпространство назовем *пространством кваркино* и обозначим $\mathbb{Q}^s$, а соответствующую ветвь диаграммы Юнга назовем *кваркинной* (рис. 9).

Подпространство пространства $\mathbb{B}$, построенное на базисных векторах ветви

$$\mathbf{1} - \langle\mathbf{12}\rangle - \langle\mathbf{123}\rangle - \ldots,$$

отнесем к лептино. Это подпространство назовем *пространством лептино* и обозначим $\mathbb{C}^s$, а соответствующую ветвь диаграммы Юнга назовем *лептинной* (рис. 10).

Определим *лептонный заряд* L:

$$L = \begin{cases} 1\,, & \text{если } [\mathbf{123}] \neq 0 \\ 0\,, & \text{если } [\mathbf{123}] = 0\,. \end{cases}$$

Определим *барионный заряд* B:

$$B = \begin{cases} 1\,, & \text{если } (\mathbf{123})_2 \neq 0 \\ 0\,, & \text{если } (\mathbf{123})_2 = 0\,. \end{cases}$$

Определим *кваркинный заряд* B^s:

$$B^s = \begin{cases} 1\,, & \text{если } (\mathbf{123})_3 \neq 0 \\ 0\,, & \text{если } (\mathbf{123})_3 = 0\,. \end{cases}$$

Определим *лептинный заряд* L^s:

$$L^s = \begin{cases} 1\,, & \text{если } \langle\mathbf{123}\rangle \neq 0 \\ 0\,, & \text{если } \langle\mathbf{123}\rangle = 0\,. \end{cases}$$

На уровне тензора четвертого ранга фермионная и бозонная ветви разделяются дополнительно. В свете указанного разделения рассмотрим сначала кварковую ветвь (рис. 8). Из нее следует, что кварки допускают разделение на три типа в зависимости от типа симметрии тензора четвертого ранга $(\mathbf{1234})_3$, $(\mathbf{1234})_4$, $(\mathbf{1234})_5$. Эти типы кварков отождествим с цветными кварками, соответственно красными, желтыми и синими. Таким образом, *ствол* кварковой ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - (\mathbf{123})_2 - (\mathbf{1234})_3$$

(рис. 11) определяет подпространство пространства $\mathbb{Q}$, которое отнесем к красным кваркам, назовем *пространством красных кварков* и обозначим $\mathbb{Q}_r$. Соответственно ствол кварковой ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - (\mathbf{123})_2 - (\mathbf{1234})_4$$

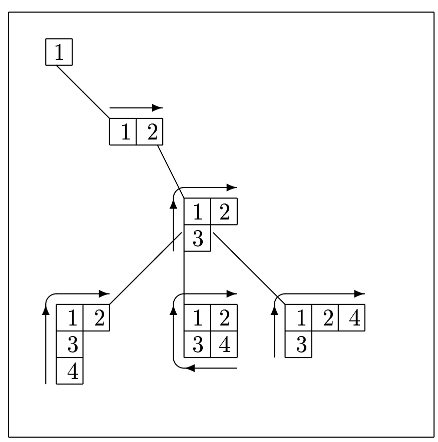


Рис. 9. Кваркинная ветвь дерева Юнга

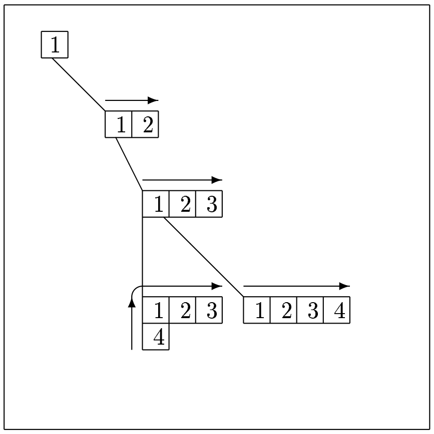


Рис. 10. Лептинная ветвь дерева Юнга

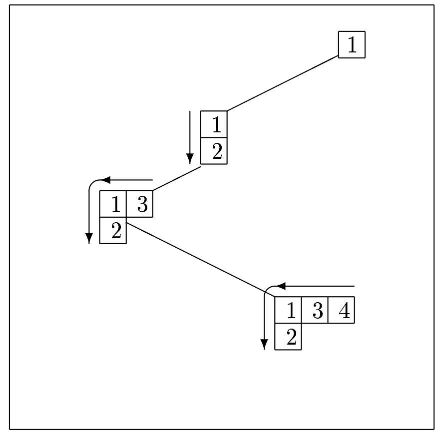


Рис. 13. Ствол синих кварков дерева Юнга

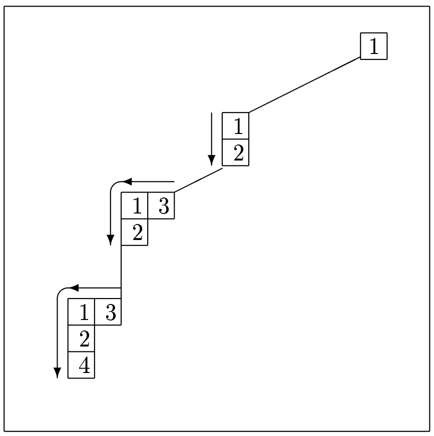


Рис. 11. Ствол красных кварков дерева Юнга

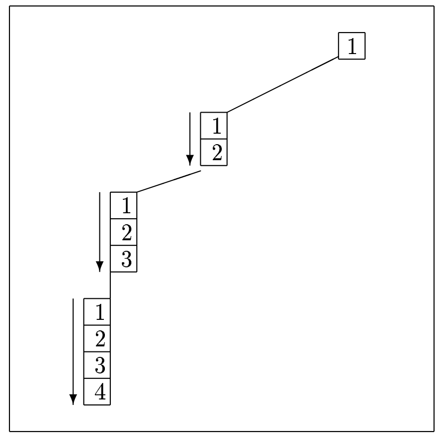


Рис. 14. Ствол белых лептонов дерева Юнга

(рис. 12) определяет подпространство пространства $\mathbb{Q}$, которое отнесем к желтым кваркам, назовем *пространством желтых кварков* и обозначим $\mathbb{Q}_y$. Соответственно ствол кварковой ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - (\mathbf{123})_2 - (\mathbf{1234})_5$$

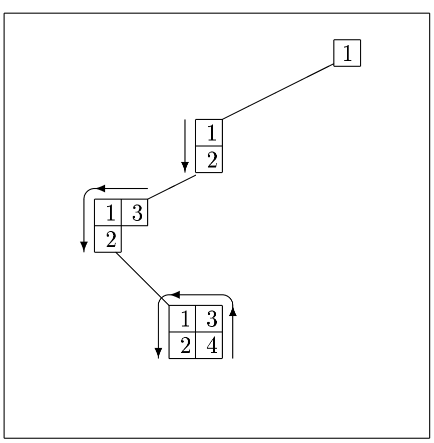


Рис. 12. Ствол желтых кварков дерева Юнга

(рис. 13) определяет подпространство пространства $\mathbb{Q}$, которое отнесем к синим кваркам, назовем *пространством синих кварков* и обозначим $\mathbb{Q}_b$.

Следуя логике дерева Юнга и рассматривая лептонную ветвь (рис. 7), необходимо заключить, что лептоны разделяются на два типа в зависимости от типа симметрии тензора четвертого ранга $[\mathbf{1234}]$ и $(\mathbf{1234})_2$. Эти типы лептонов отождествим с гипотетическими *цветными лептонами*, соответственно белыми и черными. Таким образом, ствол лептонной ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - [\mathbf{123}] - [\mathbf{1234}]$$

(рис. 14) определяет подпространство пространства $\mathbb{C}$, которое отнесем к белым лептонам. Назовем это подпространство *пространством белых лептонов* и обозначим его $\mathbb{C}_w$. Соответственно ствол лептонной ветви

$$\mathbf{1} - [\mathbf{12}] - [\mathbf{123}] - (\mathbf{1234})_2$$

(рис. 15) определяет подпространство пространства $\mathbb{C}$, которое отнесем к черным лептонам. Назовем это подпространство *пространством черных лептонов* и

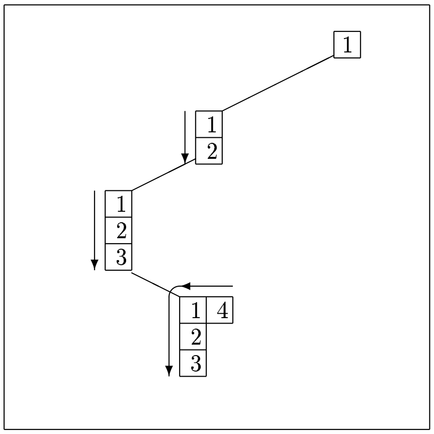


Рис. 15. Ствол черных лептонов дерева Юнга

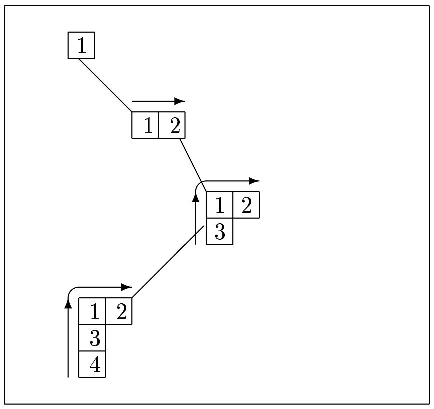


Рис. 16. Ствол синих кваркино дерева Юнга

обозначим его $\mathbb{C}_b$. Заметим, что пространство $\mathbb{C}_w$ является пространством алгебры Клиффорда. В настоящее время лептоны описываются волновой функцией, являющейся вектором алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_w$, и поэтому в сегодняшнем представлении лептоны выступают как одноцветные белые лептоны.

Подобно кваркам, существование разноцветных лептонов должно проявляться в образовании бесцветных пар, которые должны вести себя как бозоны. Возможно, электронные пары, которые обуславливают явление сверхпроводимости, образованы разноцветными электронами.

Логика дерева Юнга заставляет разделить по *цвету* также гипотетические суперсимметричные частицы кваркино и лептино. В результате ствол кваркинной ветви

$$\mathbf{1} - \langle \mathbf{12} \rangle - (\mathbf{123})_3 - (\mathbf{1234})_6$$

(рис. 16) определяет подпространство пространства $\mathbb{Q}^s$, которое отнесем к синим кваркино. Это подпространство назовем *пространством синих кваркино* и обозначим $\mathbb{Q}^s_b$. Соответственно ствол кваркинной ветви

$$\mathbf{1} - \langle \mathbf{12} \rangle - (\mathbf{123})_3 - (\mathbf{1234})_7$$

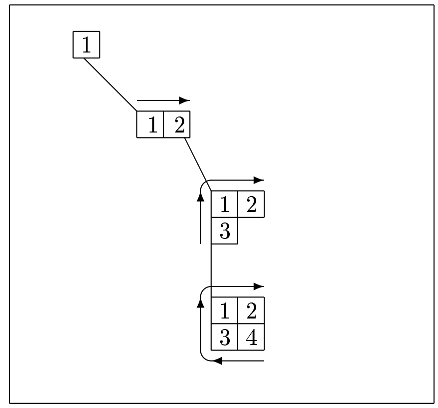


Рис. 17. Ствол желтых кваркино дерева Юнга

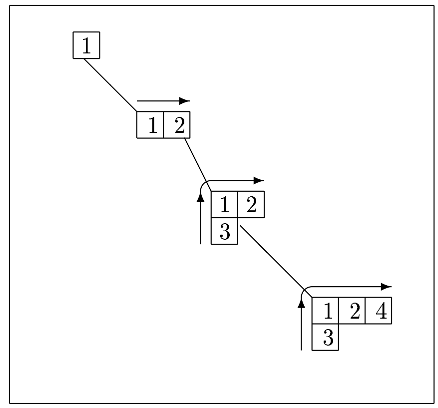


Рис. 18. Ствол красных кваркино дерева Юнга

(рис. 17) определяет подпространство пространства $\mathbb{Q}^s$, которое отнесем к желтым кваркино. Это подпространство назовем *пространством желтых кваркино* и обозначим $\mathbb{Q}^s_y$. Соответственно ствол кваркинной ветви

$$\mathbf{1} - \langle \mathbf{12} \rangle - (\mathbf{123})_3 - (\mathbf{1234})_8$$

(рис. 18) определяет подпространство пространства $\mathbb{Q}^s$, которое отнесем к красным кваркино. Это подпространство назовем *пространством кпасных кваркино* и обозначим $\mathbb{Q}^s_r$. Следуя логике дерева Юнга и рассматривая лептинную ветвь (рис. 10), необходимо заключить, что лептино разделяются на два типа в зависимости от типа симметрии тензора четвертого ранга $(\mathbf{1234})_9$ и $\langle \mathbf{1234} \rangle$. Эти типы лептино назовем соответственно черными и белыми. Таким образом, ствол лептинной ветви

$$\mathbf{1} - \langle \mathbf{12} \rangle - \langle \mathbf{123} \rangle - (\mathbf{1234})_9$$

(рис. 19) определяет подпространство пространства $\mathbb{C}^s$, которое отнесем к черным лептино. Это подпространство назовем *пространством черных лептино* и обозначим $\mathbb{C}^s_b$. Соответственно ствол лептинной ветви

$$\mathbf{1} - \langle \mathbf{12} \rangle - \langle \mathbf{123} \rangle - \langle \mathbf{1234} \rangle$$

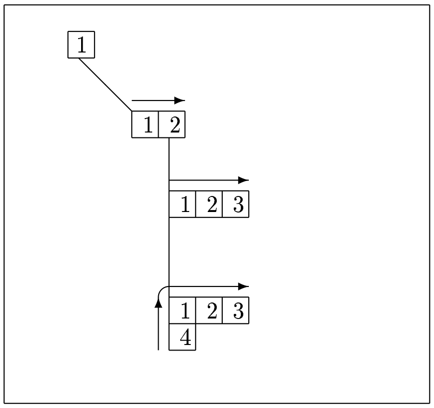


Рис. 19. Ствол черных лептино дерева Юнга

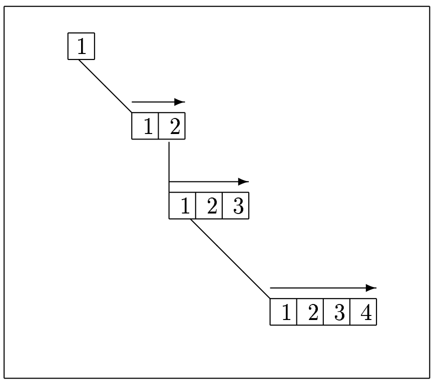


Рис. 20. Ствол белых лептино дерева Юнга

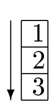
(рис. 20) определяет подпространство пространства $\mathbb{C}^s$, которое отнесем к белым лептино. Это подпространство назовем *пространством белых лептино* и обозначим $\mathbb{C}^s_w$.

IV. АЛГЕБРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Далее рассмотрим подалгебры алгебры фундаментальных частиц $\mathbb{S}$, которые поставим в соответствие различным типам фундаментальных частиц – лептонам, кваркам и суперсимметричным им гипотетическим кваркино и лептино.

1. Алгебра лептонов

Пространственная часть волновой функции лептонов определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры лептонов

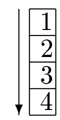
$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,.$$

В результате пространственная часть волновой функции лептонов имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_a\,\psi^a + \mathbf{e}_{[ab]}\,\psi^{[ba]} + \mathbf{e}_{[123]}\,\psi^{[321]}\,.$$

1.1. *Алгебра белых лептонов* $\mathbb{C}_w$

Алгебра белых лептонов определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия белых лептонов $\mathbb{C}_w$ есть множество векторов вида

$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_i\,\psi^i + \mathbf{e}_{[ik]}\,\psi^{[ki]} + \mathbf{e}_{[ikl]}\,\psi^{[lki]} + \mathbf{e}_{[1324]}\,\psi^{[4231]}\,.$$

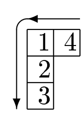
Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{C}_w)^p$, то пространство алгебры белых лептонов $\mathbb{C}_w$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_w = (\mathbb{C}_w)^0 + (\mathbb{C}_w)^1 + (\mathbb{C}_w)^2 + (\mathbb{C}_w)^3 + (\mathbb{C}_w)^4\,.$$

Алгебра белых лептонов есть алгебра Клиффорда.

1.2. *Алгебра черных лептонов* $\mathbb{C}_b$

Алгебра черных лептонов определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия черных лептонов $\mathbb{C}_b$ есть множество векторов вида

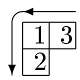
$$\begin{aligned}\psi &= \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_i\,\psi^i + \mathbf{e}_{[ab]}\,\psi^{[ba]} +\\ &+ \mathbf{e}_{\langle 14\rangle}\,\psi^{\langle 41\rangle} + \mathbf{e}_{[42]}\,\psi^{[24]} + \mathbf{e}_{[34]}\,\psi^{[43]} +\\ &+ \mathbf{e}_{[123]}\,\psi^{[321]} + \mathbf{e}_{(124)_2}\,\psi^{(421)_2} + \mathbf{e}_{(134)_2}\,\psi^{(431)_2} +\\ &+ \mathbf{e}_{[234]}\,\psi^{[432]} + \mathbf{e}_{(1324)_2}\,\psi^{(4231)_2}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{C}_b)^p$, то пространство алгебры черных лептонов $\mathbb{C}_b$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_b = (\mathbb{C}_b)^0 + (\mathbb{C}_b)^1 + (\mathbb{C}_b)^2 + (\mathbb{C}_b)^3 + (\mathbb{C}_b)^4 .$$

2. Алгебра кварков

Пространственная часть волновой функции кварков определена следующей диаграммой Юнга:



Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры кварков

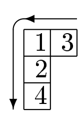
$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,.$$

В результате пространственная часть волновой функции кварков имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_a\,\psi^a + \mathbf{e}_{[21]}\,\psi^{[12]} + \mathbf{e}_{\langle 13\rangle}\,\psi^{\langle 31\rangle} + \mathbf{e}_{[32]}\,\psi^{[23]} + \\ + \mathbf{e}_{(123)_2}\,\psi^{(321)_2} .$$

2.1. Алгебра красных кварков $\mathbb{Q}_r$

Алгебра красных кварков определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия красных кварков $\mathbb{Q}_r$ есть множество векторов вида

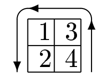
$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_i\,\psi^i + \mathbf{e}_{[21]}\,\psi^{[12]} + \mathbf{e}_{\langle 13\rangle}\,\psi^{\langle 31\rangle} + \mathbf{e}_{[32]}\,\psi^{[23]} + \\ + \mathbf{e}_{[14]}\,\psi^{[41]} + \mathbf{e}_{[42]}\,\psi^{[24]} + \mathbf{e}_{[34]}\,\psi^{[43]} + \mathbf{e}_{(123)_2}\,\psi^{(321)_2} + \\ + \mathbf{e}_{[124]}\,\psi^{[421]} + \mathbf{e}_{(134)_2}\,\psi^{(431)_2} + \mathbf{e}_{[234]}\,\psi^{[432]} + \\ + \mathbf{e}_{(1324)_3}\,\psi^{(4231)_3} .$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}_r)^p$, то пространство алгебры красных кварков $\mathbb{Q}_r$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_r = (\mathbb{Q}_r)^0 + (\mathbb{Q}_r)^1 + (\mathbb{Q}_r)^2 + (\mathbb{Q}_r)^3 + (\mathbb{Q}_r)^4 .$$

2.2. Алгебра желтых кварков $\mathbb{Q}_y$

Алгебра желтых кварков определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия желтых кварков $\mathbb{Q}_y$ есть множество векторов вида

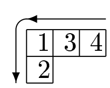
$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_i\,\psi^i + \mathbf{e}_{[21]}\,\psi^{[12]} + \mathbf{e}_{\langle 13\rangle}\,\psi^{\langle 31\rangle} + \mathbf{e}_{[32]}\,\psi^{[23]} + \\ + \mathbf{e}_{\langle 14\rangle}\,\psi^{\langle 41\rangle} + \mathbf{e}_{[42]}\,\psi^{[24]} + \mathbf{e}_{[34]}\,\psi^{[43]} + \mathbf{e}_{(123)_2}\,\psi^{(321)_2} + \\ + \mathbf{e}_{(124)_2}\,\psi^{(421)_2} + \mathbf{e}_{(134)_2}\,\psi^{(431)_2} + \mathbf{e}_{[234]}\,\psi^{[432]} + \\ + \mathbf{e}_{(1324)_4}\,\psi^{(4231)_4} .$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить ${\mathbb{Q}_y}^p$, то пространство алгебры желтых кварков $\mathbb{Q}_y$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_y = (\mathbb{Q}_y)^0 + (\mathbb{Q}_y)^1 + (\mathbb{Q}_y)^2 + (\mathbb{Q}_y)^3 + (\mathbb{Q}_y)^4 .$$

2.3. Алгебра синих кварков $\mathbb{Q}_b$

Алгебра синих кварков определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = -\mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = -\mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = -\mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = \mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия синих кварков $\mathbb{Q}_b$ есть множество векторов вида

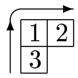
$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_i\,\psi^i + \mathbf{e}_{[21]}\,\psi^{[12]} + \mathbf{e}_{\langle 13\rangle}\,\psi^{\langle 31\rangle} + \mathbf{e}_{[32]}\,\psi^{[23]} + \\ + \mathbf{e}_{\langle 14\rangle}\,\psi^{\langle 41\rangle} + \mathbf{e}_{[42]}\,\psi^{[24]} + \mathbf{e}_{\langle 34\rangle}\,\psi^{\langle 43\rangle} + \mathbf{e}_{(123)_2}\,\psi^{(321)_2} + \\ + \mathbf{e}_{(124)_2}\,\psi^{(421)_2} + \mathbf{e}_{\langle 134\rangle}\,\psi^{\langle 431\rangle} + \mathbf{e}_{(234)_2}\,\psi^{(432)_2} + \\ + \mathbf{e}_{(1324)_5}\,\psi^{(4231)_5} .$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}_b)^p$, то пространство алгебры синих кварков $\mathbb{Q}_b$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_b = (\mathbb{Q}_b)^0 + (\mathbb{Q}_b)^1 + (\mathbb{Q}_b)^2 + (\mathbb{Q}_b)^3 + (\mathbb{Q}_b)^4 .$$

3. Алгебра кваркино

Пространственная часть волновой функции кваркино определена следующей диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры кваркино

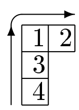
$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,.$$

В результате пространственная часть волновой функции кваркино имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_a\,\psi^a + \mathbf{e}_{\langle 21\rangle}\,\psi^{\langle 12\rangle} + \mathbf{e}_{[13]}\,\psi^{[31]} + \mathbf{e}_{\langle 32\rangle}\,\psi^{\langle 23\rangle} + \\ + \mathbf{e}_{(123)_3}\,\psi^{(321)_3}\,.$$

3.1. Алгебра синих кваркино $\mathbb{Q}_b^s$

Алгебра синих кваркино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = -\mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия синих кваркино $\mathbb{Q}_b^s$ есть множество векторов вида

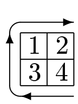
$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_i\,\psi^i + \mathbf{e}_{\langle 21\rangle}\,\psi^{\langle 12\rangle} + \mathbf{e}_{[13]}\,\psi^{[31]} + \mathbf{e}_{\langle 32\rangle}\,\psi^{\langle 23\rangle} + \\ + \mathbf{e}_{[14]}\,\psi^{[41]} + \mathbf{e}_{\langle 42\rangle}\,\psi^{\langle 24\rangle} + \mathbf{e}_{[34]}\,\psi^{[43]} + \mathbf{e}_{(123)_3}\,\psi^{(321)_3} + \\ + \mathbf{e}_{(124)_3}\,\psi^{(421)_3} + \mathbf{e}_{[134]}\,\psi^{[431]} + \mathbf{e}_{(234)_3s}\,\psi^{(432)_3} + \\ + \mathbf{e}_{(1324)_6}\,\psi^{(4231)_6}\,.$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}_b^s)^p$, то пространство алгебры синих кваркино $\mathbb{Q}_b^s$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_b^s = (\mathbb{Q}_b^s)^0 + (\mathbb{Q}_b^s)^1 + (\mathbb{Q}_b^s)^2 + (\mathbb{Q}_b^s)^3 + (\mathbb{Q}_b^s)^4\,.$$

3.2. Алгебра желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^s$

Алгебра желтых кваркино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = \mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^s$ есть множество векторов вида

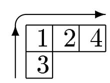
$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_i\,\psi^i + \mathbf{e}_{\langle 21\rangle}\,\psi^{\langle 12\rangle} + \mathbf{e}_{[13]}\,\psi^{[31]} + \mathbf{e}_{\langle 32\rangle}\,\psi^{\langle 23\rangle} + \\ + \mathbf{e}_{[14]}\,\psi^{[41]} + \mathbf{e}_{\langle 42\rangle}\,\psi^{\langle 24\rangle} + \mathbf{e}_{\langle 34\rangle}\,\psi^{\langle 43\rangle} + \mathbf{e}_{(123)_3}\,\psi^{(321)_3} + \\ + \mathbf{e}_{(124)_3}\,\psi^{(421)_3} + \mathbf{e}_{(134)_2}\,\psi^{(431)_2} + \mathbf{e}_{(234)_3s}\,\psi^{(432)_3} + \\ + \mathbf{e}_{(1324)_7}\,\psi^{(4231)_7}\,.$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}_y^s)^p$, то пространство алгебры желтых кваркино $\mathbb{Q}_y^s$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_y^s = (\mathbb{Q}_y^s)^0 + (\mathbb{Q}_y^s)^1 + (\mathbb{Q}_y^s)^2 + (\mathbb{Q}_y^s)^3 + \mathbb{Q}_y^{s\,4}\,.$$

3.3. Алгебра красных кваркино $\mathbb{Q}_r^s$

Алгебра красных кваркино определяется диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = -\mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = \mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия красных кваркино $\mathbb{Q}_r^s$ есть множество векторов вида

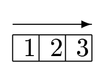
$$\psi = \mathbf{e}_0\,\psi^0 + \mathbf{e}_i\,\psi^i + \mathbf{e}_{\langle 21\rangle}\,\psi^{\langle 12\rangle} + \mathbf{e}_{[13]}\,\psi^{[31]} + \mathbf{e}_{\langle 32\rangle}\,\psi^{\langle 23\rangle} + \\ + \mathbf{e}_{\langle 14\rangle}\,\psi^{\langle 41\rangle} + \mathbf{e}_{\langle 42\rangle}\,\psi^{\langle 24\rangle} + \mathbf{e}_{\langle 34\rangle}\,\psi^{\langle 43\rangle} + \mathbf{e}_{(123)_3}\,\psi^{(321)_3} + \\ + \mathbf{e}_{\langle 124\rangle}\,\psi^{\langle 421\rangle} + \mathbf{e}_{(134)_3}\,\psi^{(431)_3} + \mathbf{e}_{\langle 234\rangle}\,\psi^{\langle 432\rangle} + \\ + \mathbf{e}_{(1324)_8}\,\psi^{(4231)_8}\,.$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{Q}_r^s)^p$, то пространство алгебры красных кваркино $\mathbb{Q}_r^s$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{Q}_r^s = (\mathbb{Q}_r^s)^0 + (\mathbb{Q}_r^s)^1 + (\mathbb{Q}_r^s)^2 + (\mathbb{Q}_r^s)^3 + (\mathbb{Q}_r^s)^4\,.$$

4. Алгебра лептино

Пространственная часть волновой функции лептино определена следующей диаграммой Юнга



Из нее следуют условия соседней перестановки для геометрических базисных векторов алгебры лептино

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,.$$

В результате пространственная часть волновой функции лептино имеет вид

$$\psi = \mathbf{e}_0\, \psi^0 + \mathbf{e}_a\, \psi^a + \mathbf{e}_{\langle ab\rangle}\, \psi^{\langle ba\rangle} + \mathbf{e}_{\langle 123\rangle}\, \psi^{\langle 321\rangle}\,.$$

4.1. Алгебра черных лептино $\mathbb{C}_b^s$

Алгебра черных лептино определяется диаграммой Юнга

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = -\mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = \mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия черных лептино $\mathbb{C}_b^s$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}\psi = {} & \mathbf{e}_0\, \psi^0 + \mathbf{e}_i\, \psi^i + \mathbf{e}_{\langle ab\rangle}\, \psi^{\langle ba\rangle} + \\ & + \mathbf{e}_{[14]}\, \psi^{[41]} + \mathbf{e}_{\langle 42\rangle}\, \psi^{\langle 24\rangle} + \mathbf{e}_{\langle 34\rangle}\, \psi^{\langle 43\rangle} + \mathbf{e}_{\langle 123\rangle}\, \psi^{\langle 321\rangle} + \\ & + \mathbf{e}_{(124)_3}\, \psi^{(421)_3} + \mathbf{e}_{(134)_3}\, \psi^{(431)_3} + \mathbf{e}_{\langle 234\rangle}\, \psi^{\langle 432\rangle} + \\ & + \mathbf{e}_{4321}\, \psi^{1234}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{C}_b^s)^p$, то пространство алгебры черных лептино $\mathbb{C}_b^s$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_b^s = (\mathbb{C}_b^s)^0 + (\mathbb{C}_b^s)^1 + (\mathbb{C}_b^s)^2 + (\mathbb{C}_b^s)^3 + (\mathbb{C}_b^s)^4\,.$$

4.2. Алгебра белых лептино $\mathbb{C}_w^s$

Алгебра белых лептино определяется диаграммой Юнга

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

Из нее следуют условия соседней перестановки

$$\mathbf{12} = \mathbf{21}\,, \quad \mathbf{13} = \mathbf{31}\,, \quad \mathbf{23} = \mathbf{32}\,,$$
$$\mathbf{14} = \mathbf{41}\,, \quad \mathbf{24} = \mathbf{42}\,, \quad \mathbf{34} = \mathbf{43}\,.$$

Отсюда пространство действия белых лептино $\mathbb{C}_w^s$ есть множество векторов вида

$$\begin{aligned}\psi = {} & \mathbf{e}_0\, \psi^0 + \mathbf{e}_i\, \psi^i + \mathbf{e}_{\langle ik\rangle}\, \psi^{\langle ki\rangle} + \mathbf{e}_{\langle ikl\rangle}\, \psi^{\langle lki\rangle} + \\ & + \mathbf{e}_{\langle 1324\rangle}\, \psi^{\langle 4231\rangle}\,.\end{aligned}$$

Если пространство с базисными векторами $\mathbf{e}_{i_1\ldots i_p}$ обозначить $(\mathbb{C}_w^s)^p$, то пространство алгебры белых лептино $\mathbb{C}_w^s$ представляет собой сумму пространств:

$$\mathbb{C}_w^s = (\mathbb{C}_w^s)^0 + (\mathbb{C}_w^s)^1 + (\mathbb{C}_w^s)^2 + (\mathbb{C}_w^s)^3 + (\mathbb{C}_w^s)^4\,.$$

V. ТАБЛИЦА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Далее используем общепринятое обозначение лептонов и кварков. Так как между лептонами и кварками с одной стороны и лептино и кваркино с другой имеет место симметрия, то для обозначения лептино и кваркино использованы те же буквы, что и для обозначения симметричных им лептонов и кварков, но в заглавном написании.

В Главах 4.8. и 4.9. показано, что волновая функция красного и желтого кварков в стандартном представлении распадается на две двухкомпонентные волновые функции, то есть эти кварки представлены верхней и нижней частицами. В Главе 4.10. показано, что, в отличие от красных и желтых кварков, волновая функция синих кварков в стандартном представлении остается четырех компонентной, то есть синий кварк представлен одной частицей в каждом поколении.

В Главах 4.10, 4.11, 4.12. показано, что из трех цветных частиц, которые мы назвали кваркино, волновая функция только синих кваркино разделяется в стандартном представлении на две двухкомпонентные волновые функции, то есть только синие кваркино представлены верхней и нижней частицами, а красные и желтые кваркино представлены одной частицей каждое в каждом поколении. Отсюда следует, что, если пользоваться развитыми представлениями, то нужно сказать, что в образовании составных частиц (адронов)участвуют красные и желтые кварки и синие кваркино. Можно пойти по другому пути: переобозначить синий кваркино в синий кварк и наоборот, но в этом случае придется нарушить эстетику алгебр, диаграмм и дерева Юнга. В Главах 4.14, 4.15. показано, что лептино также остаются четырехкомпонентной частицей в каждом поколении, то есть не разделяются на верхнюю и нижнюю частицы. Указанные обстоятельства отражены в Таблице фундаментальных частиц.

1. Фундаментальные частицы первого поколения

1. Лептоны

лептоны	белые	черные
верхние	ν_{e_w}	ν_{e_b}
нижние	e_w	e_b

2. Кварки

кварки	красные	желтые	синие
верхние	u_r	u_y	
нижние	d_r	d_y	d_b

3. Кваркино

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	U_b		
нижние	D_b	D_y	D_r

4. Лептино

черные	белые
E_b	E_w

2. Фундаментальные частицы второго поколения

1. Лептоны

лептоны	белые	черные
верхние	ν_{μ_w}	ν_{μ_b}
нижние	μ_w	μ_b

2. Кварки

кварки	красные	желтые	синие
верхние	c_r	c_y	
нижние	s_r	s_y	s_b

3. Кваркино

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	C_b		
нижние	S_b	S_y	S_r

4. Лептино

черные	белые
M_b	M_w

3. Фундаментальные частицы третьего поколения

1. Лептоны

лептоны	белые	черные
верхние	ν_{τ_w}	ν_{τ_b}
нижние	τ_w	τ_b

2. Кварки

кварки	красные	желтые	синие
верхние	t_r	t_y	
нижние	b_r	b_y	b_b

3. Кваркино

кваркино	синие	желтые	красные
верхние	T_b		
нижние	B_b	B_y	B_r

4. Лептино

черные	белые
T_b	T_w

VI. КОСМОГОНИЧЕСКИЙ НАБРОСОК

Динамику Вселенной свяжем с формированием тензорных компонент действия и пространства-времени. Пусть Вселенная находится в некотором предельном состоянии расширения, за которым начинается ее сжатие. В этом состоянии Вселенная представлена сонмом точек, а тензорные компоненты действия и пространства-времени представлены диаграммами первого уровня дерева Юнга. Сжатие Вселенной приводит к сближению точек и возникновению конфигураций из частей, вращающихся относительно центра и конфигураций из частей, падающих на центр. Таким образом, сжатие Вселенной приводит к возникновению спиновых и инерционных частиц. На этом этапе тензорные компоненты действия и пространства-времени представлены диаграммами второго уровня дерева Юнга. Дальнейшее сжатие приводит к формированию объемов и движению гиперповерхностей, то есть возникают тензорные компоненты действия и пространства-времени третьего уровня дерева Юнга. В результате формируются структуры, представляющие собой фундаментальные частицы – лептоны, кварки, кваркино, лептино. Дальнейшее сжатие приводит к уплотнению объема, ограничению переносов и вращений частей и формированию некоего единого пульсирующего объема. На этом этапе тензорные компоненты действия и пространства-времени представлены диаграммами четвертого уровня дерева Юнга. Это состояние достигает некоторого предела, за которым следует взрыв и расширение Вселенной с обратным направлением разделения тензорных компонент действия и пространства-времени – от тензоров четвертого ранга к тензорам третьего, второго и первого рангов. На этапе расширения Вселенной мы рассмотрим нерелятивистские комбинации тензора третьего ранга, за которыми стоит выделение фундаментальных частиц из начальной тензорной конфигурации. Симметрии тензора третьего ранга, входящие в волновую функцию определяют тип частицы. Поэтому введем следующее соответствие между симметриями тензора третьего ранга и типами частиц.[6]

$$
\begin{array}{lll}
[\mathbf{123}] \sim l_1\ , & [\mathbf{312}] \sim l_2\ , & [\mathbf{231}] \sim l_3\,, \\
(\mathbf{123})_2 \sim q_1\ , & (\mathbf{312})_2 \sim q_2\ , & (\mathbf{231})_2 \sim q_3\,, \\
(\mathbf{123})_3 \sim Q_1\,, & (\mathbf{312})_3 \sim Q_2\,, & (\mathbf{231})_3 \sim Q_3\,, \\
\langle\mathbf{123}\rangle \sim L_1\ , & \langle\mathbf{312}\rangle \sim L_2\ , & \langle\mathbf{231}\rangle \sim L_3\,.
\end{array}
$$

Пользуясь этим соответствием, перейдем от уста-

[6] Далее будем пользоваться следующими обозначениями. Лептоны первого, второго и третьего поколений обозначим соответственно l_1, l_2, l_3. Кварки первого, второго и третьего поколений обозначим соответственно q_1, q_2, q_3. Кваркино первого, второго и третьего поколений обозначим соответственно Q_1, Q_2, Q_3. Лептино первого, второго и третьего поколений обозначим соответственно L_1, L_2, L_3.

новленного ранее соотношения

$$\mathbf{123}\cdot\tfrac{2}{3}=(\mathbf{123})_1+(\mathbf{123})_2+(\mathbf{123})_3+(\mathbf{123})_4\,,$$

где

$$(\mathbf{123})_1=[\mathbf{123}]\,,\qquad (\mathbf{123})_4=\langle\mathbf{123}\rangle\,,$$

$$(\mathbf{123})_2=(\mathbf{123}-\mathbf{231}-\mathbf{312}-\mathbf{213}-\mathbf{132}+\mathbf{321})\cdot\tfrac{1}{3!}\,,$$

$$(\mathbf{123})_3=(\mathbf{123}-\mathbf{231}-\mathbf{312}+\mathbf{213}+\mathbf{132}-\mathbf{321})\cdot\tfrac{1}{3!}\,,$$

к ему соответствующему

$$\mathbf{123}\sim l_1+q_1+Q_1+L_1\,.$$

Это соотношение облекаем в следующее образное представление: из тензорной конфигурации **123** выделяется обособленный Мир частиц первого поколения. Этим ставим в соответствие соотношению факт существования обособленного Мира частиц первого поколения, в котором мы сами находимся и продуктом которого мы являемся.

При таком подходе соотношению

$$\mathbf{312}\cdot\tfrac{2}{3}=(\mathbf{312})_1+(\mathbf{312})_2+(\mathbf{312})_3+(\mathbf{312})_4\,,$$

где

$$(\mathbf{312})_1=[\mathbf{312}]\,,\qquad (\mathbf{312})_4=\langle\mathbf{312}\rangle\,,$$

$$(\mathbf{312})_2=(\mathbf{312}-\mathbf{132}-\mathbf{123}+\mathbf{213}-\mathbf{231}-\mathbf{321})\cdot\tfrac{1}{3!}\,,$$

$$(\mathbf{312})_3=(\mathbf{312}+\mathbf{132}-\mathbf{123}-\mathbf{213}-\mathbf{231}+\mathbf{321})\cdot\tfrac{1}{3!}\,.$$

соответствует

$$\mathbf{312}\sim l_2+q_2+Q_2+L_2\,.$$

Это соотношение истолковываем как выделение в процессе расширения Вселенной обособленного Мира[7] частиц второго поколения из тензорной конфигурации **312**.

Кроме того, соотношению

$$\mathbf{231}=((\mathbf{231})_1+(\mathbf{231})_2+(\mathbf{231})_3+(\mathbf{231})_4)\cdot\tfrac{3}{2}\,,$$

где

$$(\mathbf{231})_1=[\mathbf{231}]\,,\qquad (\mathbf{231})_4=\langle\mathbf{231}\rangle\,,$$

$$(\mathbf{231})_2=(\mathbf{231}-\mathbf{321}-\mathbf{312}+\mathbf{132}-\mathbf{123}-\mathbf{213})\cdot\tfrac{1}{3!}\,,$$

$$(\mathbf{231})_3=(\mathbf{231}+\mathbf{321}-\mathbf{312}-\mathbf{132}-\mathbf{123}+\mathbf{213})\cdot\tfrac{1}{3!}\,,$$

соответствует соотношение

$$\mathbf{231}\sim l_3+q_3+Q_3+L_3\,,$$

которое нужно истолковывать как выделение в процессе расширения Вселенной обособленного Мира частиц третьего поколения из тензорной конфигурации **231**.

Далее мы обратимся к соотношению, которое легко проверить:

$$(\mathbf{123})_2+(\mathbf{312})_2+(\mathbf{231})_2+(\mathbf{123})_4=0\,.$$

Ему соответствует соотношение[8]

$$q_1+q_2+q_3+(L_1+L_2+L_3)\cdot\tfrac{1}{3}\sim 0\,.$$

Это соотношение истолковываем как аннигиляцию Мира кварков и Мира лептино.

Также из соотношения, которое легко проверить,

$$(\mathbf{123})_3+(\mathbf{312})_3+(\mathbf{231})_3+(\mathbf{123})_1=0$$

и соответствующего ему соотношения

$$Q_1+Q_2+Q_3+(l_1+l_2+l_3)\cdot\tfrac{1}{3}\sim 0$$

следует аннигиляция Мира кваркино и Мира лептонов.

Можно установить, что имеют место соотношения

$$(\mathbf{312})_2+(\mathbf{231})_2+(\mathbf{312})_3+(\mathbf{231})_3=-\mathbf{123}\cdot\tfrac{2}{3}\,,$$

$$(\mathbf{123})_2+(\mathbf{231})_2+(\mathbf{123})_3+(\mathbf{231})_3=-\mathbf{312}\cdot\tfrac{2}{3}\,,$$

$$(\mathbf{123})_2+(\mathbf{312})_2+(\mathbf{123})_3+(\mathbf{312})_3=-\mathbf{231}\cdot\tfrac{2}{3}\,.$$

Отсюда, пользуясь принятым соответствием, получим

$$-\mathbf{123}\sim q_2+q_3+Q_2+Q_3\,,$$

$$-\mathbf{312}\sim q_1+q_3+Q_1+Q_3\,,$$

---

[7] Обособленного от других Миров и прежде всего от Мира частиц первого поколения.

[8] Мы учитываем, что в нашем подходе

$$[\mathbf{123}]=[\mathbf{312}]=[\mathbf{231}]=([\mathbf{123}]+[\mathbf{312}]+[\mathbf{231}])\cdot\tfrac{1}{3}\,.$$

Отсюда

$$l_1\sim l_2\sim l_3\sim(l_1+l_2+l_3)\cdot\tfrac{1}{3}\,.$$

А также

$$\langle\mathbf{123}\rangle=\langle\mathbf{312}\rangle=\langle\mathbf{231}\rangle=(\langle\mathbf{123}\rangle+\langle\mathbf{312}\rangle+\langle\mathbf{231}\rangle)\cdot\tfrac{1}{3}\,.$$

Отсюда

$$L_1\sim L_2\sim L_3\sim(L_1+L_2+L_3)\cdot\tfrac{1}{3}\,.$$

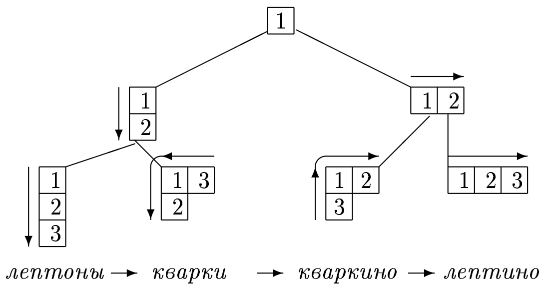


Рис. 21. Трехуровневое дерево Юнга

$$-\mathbf{231} \sim q_1 + q_2 + Q_1 + Q_2\,.$$

Последние соотношения свидетельствуют о том, что необходимо допустить существование Миров ($-\mathbf{123}$), ($-\mathbf{312}$), ($-\mathbf{123}$), которые мы назовем *дополнительными* к Мирам частиц первого, второго и третьего поколений **123**, **312**, **123** соответственно. Дополнительные Миры аннигилируют с Мирами соответствующих поколений.

VII. ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

Согласно сегодняшним представлениям, помимо лептонно-барионной материи существует так называемая *темная материя*. В отличие от лептонно-барионной материи темная материя не участвует в электромагнитном взаимодействии, поэтому невидима и поэтому названа *темной*. По оценкам масса темной материи во Вселенной на порядок превосходит массу лептонно-барионной материи.

Имея в виду вышесказанное, вернемся к трехуровневой диаграмме Юнга (Рис. 21.) На нижнем (третьем) уровне (уровне тензоров третьего ранга) четыре диаграммы соответствуют четырем видам фундаментальных частиц: лептоны – кварки – кваркино – лептино. На втором уровне (уровне тензора второго ранга) дерево Юнга разделяется на две ветви и соответственно фундаментальные частицы разделяются на две группы. Одна ветвь имеет *вершиной* диаграмму $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$ и соответственно антисимметричный тензор $[\mathbf{12}]$. Этой ветви соответствуют лептоны и кварки. Другая ветвь имеет вершиной диаграмму $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}$ и соответственно симметричный тензор $\langle\mathbf{12}\rangle$. Этой ветви соответствуют суперсимметричные частицы – кваркино и лептино.

Обратимся теперь к правой алгебре действия фундаментальных частиц. Для нее антисимметричный базисный вектор ${}_r\mathbf{e}_{[21]}$ представляет собой базисный вектор *электрического заряда*. Таким образом, ветвь дерева Юнга, опирающаяся на диаграмму $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$, соответствует фундаментальным частицам, участвующим в электромагнитном взаимодействии. Отсюда лептоны и кварки участвуют в электромагнитном взаимодействии.

И, напротив, другая ветвь, опирающаяся на диаграмму $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}$, относится к фундаментальным частицам, волновая функция которых не содержит направление, ответственное за электромагнитные свойства этих частиц[9]. Поэтому следует считать, что вторая группа фундаментальных частиц – кваркино и лептино – не участвует в электромагнитном взаимодействии. Это позволяет отождествить суперматерию и темную материю.

Стрелка на Рис. 21. между надписями *лептоны* и *кварки* символизирует переход от фундаментальной частицы с меньшей массой к фундаментальной частице с большей массой. Экстраполируя эту тенденцию на фундаментальные частицы при переходе по третьему уровню диаграммы Юнга слева направо, можно предположить, что кваркино и лептино массивнее лептонов и кварков. Такое предположение позволяет объяснить то обстоятельство, что масса темной материи, составленной из кваркино и лептино, больше массы лептонно-барионной материи, составленной из лептонов и кварков.

VIII. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

- В рамках классификации частиц в соответствии с подпространствами пространства $\mathbb{S}$ находит объяснение деление фундаментальных частиц со спином на две группы – лептоны и кварки, а также алгебраическое толкование таких характеристик лептонов и кварков, как лептонный и барионный заряды.

- Последовательное проведение соответствия между группами частиц и подпространствами пространства действия $\mathbb{S}$ заставляет ввести новую группу частиц с характеристикой симметрично аналогичной спину – инерцией. Эта группа частиц в свою очередь делится на две группы – лептино и кваркино. Указанное деление возникает уже на нерелятивистском уровне, когда в алгебру $\mathbb{S}$ включаются тензоры третьего ранга.

- На нерелятивистском уровне частицы делятся на четыре группы – лептоны, кварки, кваркино, лептино. Эти группы соответствуют разбиению тензора третьего ранга на четыре симметрии. Каждая группа частиц соответствует определенной симметрии тензора третьего ранга. Число

[9] Однако правая алгебра действия кваркино и лептино содержит базисный вектор ${}_r\mathbf{e}_{\langle 21\rangle}$, суперсимметричный базисному вектору ${}_r\mathbf{e}_{[21]}$. Поэтому следует считать, что кваркино и лептино участвуют во взаимодействии, суперсимметричном электромагнитному.

групп частиц равно числу симметрий тензора третьего ранга, то есть – четырем.

- На релятивистском уровне, когда в алгебру $\mathbb{S}$ включаются тензоры четвертого ранга, группы частиц получают дополнительную классификацию. Принято, что лептоны разбиваются на две подгруппы, а кварки разбиваются на три подгруппы.

- Трем подгруппам кварков ставим в соответствие кварки трех цветов. Тогда логично предположить, что лептоны двухцветны.

- На релятивистском уровне кваркино разбиваются на три подгруппы, лептино разбиваются на две подгруппы. Трем подгруппам кваркино ставим в соответствие кваркино трех цветов. Необходимо также предположить, что лептино двухцветны.

- С теоретической точки зрения было бы красиво цветным фундаментальным частицам поставить в соответствие все симметрии тензора четвертого ранга. Но тогда каждая из групп частиц – лептоны – кварки – кваркино – лептино – должна иметь четыре цветовые модификации. Тогда необходимо объяснить, почему в действительности кварки имеют три цветовые модификации, а лептоны предположительно имеют две цветовые модификации.

- Суперсимметричная материя может быть отождествлена с темной материей.

Научное издание

Кецарис Александр Августинович

Математические основания Новой Физики

Том первый

Редакция и компьютерная верстка автора